

METODA KINEMATYCZNA W DYNAMICE KONSTRUKCJI SZTYWNO-PLASTYCZNYCH

GRZEGORZ B A K (WARSZAWA)

Przedstawiono metodę kinematyczną rozwiązywania niestacjonarnych problemów dynamiki konstrukcji sztywno-plastycznych w zakresie małych przemieszczeń. Wybór odpowiedniego pola prędkości przemieszczeń, w każdej chwili procesu płynięcia dokonuje się na podstawie twierdzenia ekstremalnego teorii plastyczności [1]. Zastosowanie metody zilustrowano przykładami określenia ruchu sztywno-idealnie plastycznej płyty prostokątnej i powłoki kulistej o małej wyniosłości. Rozważano obciążenie dynamiczne dowolnie zmienne w czasie.

1. WSTĘP

Możliwości uzyskania rozwiązań zupełnych w dynamice konstrukcji sztywno-plastycznych, podobnie jak w statycznych zagadnieniach teorii nośności granicznej, są bardzo ograniczone. Znane rozwiązania zupełne dotyczą zagadnień dynamicznych belek prostych i niektórych przypadków obrotowo-symetrycznego płynięcia płyt i powłok. Stąd też poszukuje się metod przybliżonych, ujmujących głównie tylko aspekty kinematyczne dynamicznych procesów plastycznych. Wymaga się od tych metod dużego stopnia ogólności, prostej metody rozwiązywania zadań szczegółowych i wystarczającej dokładności.

Do najbardziej znanych metod dynamiki konstrukcji plastycznych należą metody oparte na twierdzeniach szacujących i metody rozdzielania zmiennych. Metody szacujące końcowe, trwałe przemieszczenia odznaczają się dużą prostotą. Mogą być jednak stosowane tylko w zagadnieniach, w których wymuszenie ruchu następuje w wyniku działania impulsu prędkości początkowej. Wyznaczony w ten sposób obszar, w którym zawiera się rozwiązanie ścisłe, nie w każdym przypadku jest dostatecznie wąski. Metody rozdzielania zmiennych zostały rozwinięte zarówno dla konstrukcji sztywno-plastycznych jak i sztywno-lepkoplastycznych. Za ich pomocą uzyskano wiele interesujących rozwiązań pozwalających na uzyskanie dobrej zgodności z wynikami badań eksperymentalnych. W przypadku konstrukcji sztywno-plastycznej poszukiwanie rozwiązania metodą rozdzielania zmiennych polega na przyjęciu stałej, niezmiennej w czasie formy ruchu. Szersze omówienie metod przybliżonych, ze wskazaniem prac podstawowych w tym zakresie przedstawiono w pracy [15]. Krytyczną ocenę rozwiązań w zakresie umiarkowanie dużych ugięć zawiera praca [9]. Podjęto w niej próbę klasyfikacji i wprowadzenia nomenklatury pojęć występujących w metodach przybliżonych.

Na szczególną uwagę zasługują również prace dotyczące twierdzeń ekstremalnych dla ciał sztywno-plastycznych [6] i sprężysto-plastycznych [7]. Dowodzi się, że w danej chwili, ścisłe pole prędkości przemieszczeń jest ekstremalą pewnego funkcjonału. Postać funkcjonału dobiera się tak, aby warunek znikania pierwszej wariacji prowadził do różniczkowego równania ruchu. Sformułowane twierdzenia ekstremalne pozwalają jednak na uzyskanie rozwiązań tylko tych zagadnień, dla których znane są rodziny pól prędkości przemieszczeń zawierające pola ścisłe. Krytyczne omówienie tych twierdzeń z propozycjami wykorzystania ich w konstruowaniu rozwiązań przybliżonych przedstawiono w pracy [10]. Inne wariacyjne metody, opierając się na założeniach stacjonarnej formy ruchu plastycznego, podano w pracy [8]. O ekstremalnej własności stacjonarnego pola prędkości przemieszczeń traktuje praca [5]. Uwagi o stosowaniu uogólnionej zasady Hamiltona do analizy niestacjonarnych procesów płynięcia konstrukcji zawarte są w artykule [9].

Wymienione prace nie wyczerpują całokształtu problematyki ekstremalnej formy ruchu konstrukcji plastycznych. Właściwe kryteria wyboru formy ruchu mogą stanowić podstawę ogólnych metod przybliżonych, użytecznych szczególnie w analizie procesów niestacjonarnych. Procesy takie występują przy działaniu obciążeń zmiennych w czasie lub przy oddziaływaniach dynamicznych o dużej intensywności. Przykłady rozwiązań ścisłych takich problemów przedstawiono w pracach dotyczących płyty kołowej [2 i 3] i powłoki walcowej [4].

W pracy niniejszej przedstawiono metodę kinematyczną dla konstrukcji sztywno-plastycznych poddanych działaniu obciążeń dowolnie zmiennych w czasie, wywołujących małe przemieszczenia. Metoda ta umożliwia analizę stacjonarnych i niestacjonarnych procesów płynięcia dynamicznego. Ogólnie jest to metoda przybliżona, w której wyboru ekstremalnej formy ruchu dokonuje się na podstawie twierdzenia minimalnego teorii plastyczności. W szczególności można otrzymać rozwiązania ścisłe.

2. SFORMUŁOWANIE METODY KINEMATYCZNEJ

Rozważamy ciało sztywno-plastyczne, które zajmuje obszar V i ograniczone jest powierzchnią S . Proces plastycznego płynięcia jest wywołany działaniem sił powierzchniowych $T_i(x_k, t)$, sił masowych $X_i(x_k, t)$ oraz impulsu prędkości początkowej $v_i(x_k, 0) = v_{i0}(x_k)$. Siły T_i działają na części powierzchni oznaczonej przez S_T . Na pozostałej powierzchni S_u dane są kinematyczne warunki brzegowe. Przyjmujemy, że na S_u prędkości przemieszczeń równe są zeru. Pole prędkości początkowej $v_{i0}(x_k)$ jest ciągle w obszarze zajmowanym przez ciało. Proces płynięcia scharakteryzowany jest zmiennym w czasie polem prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i(x_k, t)$, prędkości odkształceń $\dot{e}_{ij}(x_k, t)$ i naprężeń $\sigma_{ij}^e(x_k, t)$. Pole \dot{u}_i jest ciągle i spełnia kinematyczne warunki brzegowe. Prędkości przemieszczeń określone są wzorami geometrycznymi $\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$. Naprężenia σ_{ij}^e spełniają w każdej chwili t dynamiczny warunek plastyczności i równania ruchu:

$$(2.1) \quad \sigma_{ij}^e + X_i - B_i^e = 0,$$

gdzie $B_i^e = m\ddot{u}_i$ oznacza siły bezwładności. Na S_T są spełnione statyczne warunki brzegowe, $\sigma_{ij}^e n_j = T_i$. Pola naprężeń σ_{ij}^e i prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{ij}$ są związane ze sobą stowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego.

W przypadkach, w których nie jest możliwe uzyskanie rozwiązania ścisłego $\{\dot{u}_i, \dot{\epsilon}_{ij}, \sigma_{ij}^e\}$, poszukujemy rozwiązania przybliżonego. Zasada mocy wirtualnej dla kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości przemieszczeń \dot{w}_{ij}^c i zgodnego z nim pola, $\dot{\epsilon}_{ij}^c$, jest następująca:

$$(2.2) \quad \int_V \sigma_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^c dV - \int_V (X_i - B_i^e) \dot{w}_i^c dV - \int_{S_T} T_i \dot{w}_i^c dS = 0.$$

Wymagamy, aby w każdej chwili procesu płynięcia warunek plastyczności stanowił w przestrzeni naprężeń powierzchnię wypukłą. Warunek wypukłości wyraża nierówność

$$(2.3) \quad (\sigma_{ij}^c - \sigma_{ij}^e) \dot{\epsilon}_{ij}^c \geq 0.$$

Kinematycznie dopuszczalne naprężenia σ_{ij}^c wyznaczamy za pomocą stowarzyszonego prawa płynięcia ze znanych $\dot{\epsilon}_{ij}^c$. Na podstawie (2.2) i (2.3) można określić funkcjonał

$$(2.4) \quad J[\dot{w}_i^c(x_k, t)] = \int_V \sigma_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^c dV - \int_V (X_i - B_i^e) \dot{w}_i^c dV - \int_{S_T} T_i \dot{w}_i^c dS \geq 0.$$

Z twierdzenia kinematycznego teorii plastyczności [1] wynika, że spośród wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól $\{\dot{w}_i^c, \dot{\epsilon}_{ij}^c, \sigma_{ij}^c\}$ ścisłym jest pole, które minimalizuje funkcjonał (2.4).

Należy podkreślić, że siły bezwładności B_i^e nie są stowarzyszone z każdym z pól \dot{w}_i^c , a tylko z ekstremalnym polem ścisłym \dot{u}_i .

Uzyskanie rozwiązania kinematycznego problemu dynamicznego polega na wyznaczeniu pola prędkości przemieszczeń $\dot{w}_i(x_k, t)$, spośród przyjętej rodziny pól \dot{w}_i^c . Pole \dot{w}_i i stowarzyszone z nim pola $\dot{\epsilon}_{ij}$, σ_{ij} minimalizują funkcjonał $J[\dot{w}_i^c] = J^c$. Określając postać funkcjonału J^c należy przyjąć, że siły bezwładności B_i są wyznaczone przez pole ekstremalne \dot{w}_i ,

$$(2.5) \quad J^c = \int_V \sigma_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^c dV - \int_V (X_i - B_i) \dot{w}_i^c dV - \int_{S_T} T_i \dot{w}_i^c dS,$$

gdzie $B_i = m\ddot{w}_i$. Przy odpowiednich założeniach regularności warunek minimum funkcjonału jest następujący:

$$(2.6) \quad \delta J^c \Big|_{\dot{w}_i^c = \dot{w}_i} = 0.$$

Postać funkcjonału J^c wyraża bilans mocy dysypowanej oraz mocy sił masowych i powierzchniowych, obliczony dla kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu płynięcia \dot{w}_i^c . Poszukiwane siły bezwładności B_i oraz siły masowe X_i i siły powierzchniowe T_i muszą spełniać, w każdej chwili procesu płynięcia dynamicznego, równanie bilansu mocy:

$$(2.7) \quad \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_V (X_i - B_i) \dot{w}_i dV - \int_{S_T} T_i \dot{w}_i dS = 0.$$

Bilans mocy (2.7) jest równaniem podstawowym metody kinematycznej. Układ równań (2.6) i (2.7) pozwala określić rozwiązanie kinematyczne problemu dynamiki konstrukcji sztywno-plastycznej. Zastosowanie twierdzenia ekstremalnego teorii plastyczności umożliwia wybór ekstremalnego pola prędkości przemieszczeń w każdej chwili procesu płynięcia.

Dla oceny przedstawionej wyżej metody rozpatrujemy dwie grupy rozwiązań: ściśle $\{\dot{u}_i, \dot{\epsilon}_{ij}, \sigma_{ij}^e\}$ i kinematyczne $\{\dot{w}_i, \dot{\epsilon}_{ij}, \sigma_{ij}\}$. Rozwiązanie ściśle spełnia różniczkowe równania równowagi oraz kinematyczne i statyczne warunki brzegowe. Dla obydwu tych grup rozwiązań można napisać zależności, wyrażające zasadę mocy wirtualnych w każdej chwili procesu płynięcia:

$$(2.8) \quad \int_V \sigma_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_V (X_i - B_i^e) \dot{w}_i dV - \int_{S_T} T_i \dot{w}_i dS = 0,$$

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_V (X_i - B_i) \dot{w}_i dV - \int_{S_T} T_i \dot{w}_i dS = 0.$$

Odejmowanie prawych stron tych równań, przy wykorzystaniu postulatu (2.3), prowadzi do nierówności

$$(2.9) \quad \int_V (B_i^e - B_i) \dot{w}_i dV \geq 0.$$

Nierówność wskazuje na możliwość uzyskania metodą kinematyczną rozwiązania ściśłego. Z powyższej nierówności wynika, że otrzymane rozwiązanie szacuje przyspieszenie z niedomiarem w sensie normy całkowitej (2.9) z wagą \dot{w}_i .

W poszukiwaniu rozwiązań kinematycznych problemów dynamiki i statycznych problemów teorii nośności granicznej występuje daleko idące podobieństwo. Dla podkreślenia tego podobieństwa proponujemy następujący algorytm rozwiązania zadania dynamiki:

1. Przyjmujemy rodzinę kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń \dot{w}_i^e , opisujących ruch konstrukcji sztywno-plastycznych w procesie obciążenia dynamicznego

$$(2.10) \quad \dot{w}_i^e(x_k, t) = \dot{w}_{0i}^e(t) f_i[x_k, \alpha_{in}(x_k, t)],$$

gdzie $\dot{w}_{0i}^e(t)$ oznacza parameter intensywności pola, który jest prędkością charakterystycznego obszaru, linii lub punktu mechanizmu płynięcia ($i=1, 2, 3$), $\alpha_{in}(x_k, t)$ parametrami geometrycznymi opisującymi położenie i granice stref plastycznych obszarów sztywnych lub linii załomów ($i=1, 2, 3, n=1, 2, \dots$) oraz gdzie $f_i(x_k, t)$ jest funkcją opisującą zmienność kształtu pola prędkości \dot{w}_i^e w procesie płynięcia.

W rodzinie pól \dot{w}_i^e będziemy poszukiwać pola \dot{w}_i , którego własności określa, zgodnie z twierdzeniem ekstremalnym, warunek (2.6). Pole \dot{w}_i wyznaczone jest całkowicie przez parametry $\alpha_{in}(x_k, t)$ i $\dot{w}_{0i}^e(t)$.

Stowarzyszone siły bezwładności wynoszą $B_i = m\ddot{w}_i$. W ogólności pole B_i jest nieciągłe, jeżeli granice stref plastycznych mogą być ruchome. Nieciągłości te są dopuszczalne, ponieważ pole prędkości przemieszczeń \dot{w}_i jest ciągłe.

2. W ustalonej chwili t rozpatrujemy pomocnicze zadanie statyczne teorii nośności granicznej. Zadanie dotyczy obciążeń nieproporcjonalnych. Czynne obciążenia dynamiczne $\bar{X}_i(x_k, t)$ i $T_i(x_k, t)$ są ustalone. Poszukujemy natomiast intensywności i kształtu pola sił bezwładności $B_i(x_k, t)$. Wymagamy, aby pod łącznym działaniem sił X_i , T_i i B_i występował stan równowagi granicznej konstrukcji. Związki stanu granicznego określa w procesie płynięcia chwilowy warunek plastyczności. Należy również wyznaczyć spośród rodziny \dot{w}_i^c , stowarzyszony mechanizm płynięcia czyli pole prędkości przemieszczeń \dot{w}_i^s o własności ekstremalnej, zgodnie z twierdzeniem minimalnym. Interesuje nas jedynie kształt pola \dot{w}_i^s , a więc parametry geometryczne $\alpha_{in}^s(x_k, t)$. Rozpatrywane zadanie jest opisane układem równań

$$(2.11) \quad J[\dot{w}_i^s] = J^s = \int_V \sigma_{ij}^s \dot{\epsilon}_{ij}^s dV - \int_V (X_i - B_i) \dot{w}_i^s dV - \int_{S_T} T_i \dot{w}_i^s dS = 0,$$

$$\delta J^s = 0.$$

Warunek (2.11)₂ jest układem równań różniczkowych Eulera dla funkcjonału J^s . Jeżeli parametry geometryczne są tylko funkcjami czasu, $\alpha_{in}^s(x_k, t) = \alpha_{in}^s(t)$, to (2.11)₂ redukuje się do następującego układu:

$$(2.12) \quad \frac{\partial J^s}{\partial \alpha_{in}^s} = 0, \quad i=1, 2, 3, \quad n=1, 2, \dots$$

Ogółem (2.11) jest układem nieoznaczonym ze względu na występowanie niewiadomych \dot{w}_{0i} , α_{in} i α_{in}^s .

3. Sformułowane zadanie statycznej nośności granicznej będzie opisywać podstawiony problem dynamiczny, jeżeli siły bezwładności B_i będą stowarzyszone z ekstremalnym polem prędkości przemieszczeń \dot{w}_i^s . W tym celu należy utożsamić kształty pól \dot{w}_i oraz \dot{w}_i^s , przyjmując $\alpha_{in}^s(x_k, t) = \alpha_{in}(x_k, t)$. Wówczas układ równań (2.11), albo (2.11)₁ i (2.12), stanie się oznaczony.

Poszukiwanie rozwiązań metodą kinematyczną zilustrowano przykładami płyty prostokątnej i powłoki kulistej o małej wyniosłości deformującym się pod działaniem zmiennego w czasie obciążenia dynamicznego.

3. DYNAMIKA PŁYTY PROSTOKĄTNEJ

Rozpatrujemy prostokątną płytę przegubowo zamocowaną albo utwierdzoną na wszystkich krawędziach. Masa jednostkowa płyty wynosi m . Płyta jest wykonana z materiału sztywno-plastycznego, niewrażliwego na prędkość i wielkość odkształceń plastycznych. Własności plastyczne są zgodne z warunkiem największych naprężeń normalnych. Zmienne w czasie obciążenie dynamiczne $p(t)$, równomiernie rozłożone na całej powierzchni płyty, wywołuje małe przemieszczenia plastyczne. W dynamice konstrukcji sztywno-plastycznych forma ruchu plastycznego zależy od intensywności działających obciążeń dynamicznych. W tym przypadku wyróżnimy obciążenia o średniej i dużej intensywności. Poszukujemy rozwiązania zgodnie z algorytmem podanym w p. 2.

Rozpatrzmy przypadek obciążenia średniego.

1. *Określenie rodziny kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń.* Przy działaniu średnich obciążeń dynamicznych, pole prędkości przemieszczeń jest zgodne z mechanizmem płynięcia odpowiedniego zadania nośności granicznej (rys. 1).

Oszacowanie z nadmiarem obciążenia granicznego ma postać

$$(3.1) \quad p_{0k} = \frac{p_0}{\zeta_1^2}, \quad p_0 = \frac{6(1+\nu)M_0}{a^2},$$

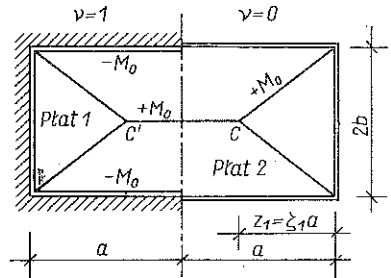
$$\zeta = \frac{a}{b} \geq 1, \quad \zeta_1 = \frac{z_1}{a}, \quad \zeta^2 \zeta_1^2 + 2\zeta_1 - 3 = 0,$$

gdzie M_0 oznacza moment uplastyczniający płytę oraz

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{dla płyty przegubowo zamocowanej,} \\ 1 & \text{dla płyty utwierdzonej.} \end{cases}$$

Ze względu na zmienność w czasie obciążenia $p(t)$, pole prędkości przemieszczeń w procesie dynamicznego płynięcia płyty jest niestacjonarne. Przyjmujemy, że linie załamów plastycznych, dobiegające do naroży płyty, są ruchome. Ich położenie określa współrzędna $z(t) = a\zeta(t)$. Intensywność pola prędkości przemieszczeń wyznacza prędkość środkowej linii załomu $CC' - \dot{w}_0^c(t)$. Obieramy rodzinę kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości \dot{w}^c w postaci

$$(3.2) \quad \dot{w}^c(x_k, t) = \begin{cases} \frac{\dot{w}_0^c(t)}{\zeta^c(t)} \frac{x_1}{a} & \text{dla płyta 1,} \\ \dot{w}_0^c(t) \frac{x_2}{b} & \text{dla płyta 2.} \end{cases}$$



Rys. 1. Kinematycznie dopuszczalna siatka linii załamów w statycznym zadaniu nośności granicznej płyty prostokątnej

Poszukujemy w rodzinie \dot{w}^c pola prędkości przemieszczeń \dot{w} , które jest przybliżonym rozwiązaniem zadania dynamiki. Jest ono określone parametrami $\dot{w}_0(t)$ i $\zeta(t)$. Stowarzyszone z \dot{w} pole sił bezwładności jest następujące:

$$(3.3) \quad B(x_k, t) = m \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{w}_0(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \frac{x_1}{a} & \text{dla płyta 1,} \\ \ddot{w}_0(t) \frac{x_2}{b} & \text{dla płyta 2.} \end{cases}$$

W polu przyspieszeń występują nieciągłości na ruchomych granicach płytów 1 i 2.

2. *Pomocnicze zadania statyczne teorii nośności granicznej.* Intensywność i kształt pola sił bezwładności, $B = B(\dot{w}_0, \zeta)$, wyznaczmy z warunku, aby pod działaniem obciążenia zewnętrznego p i B , wystąpił stan równowagi granicznej płyty prostokątnej.

Zadanie rozwiązujemy metodą kinematyczną. Określimy stowarzyszony mechanizm płynięcia plastycznego czyli pole prędkości przemieszczeń \dot{w}^s . Ilustrację zadania stanowi rys. 2. Układ równań (2.11)₁ im (2.12) ma postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} J^s &= D^s - L_p^s + L_B^s = 0, \\ \frac{d}{d\zeta^s} (D^s - L_p^s + L_B^s) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$D^s = \sum_m M_0 l_m \dot{\theta}_m^s = 2 \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^s} \right) ab p_0 \dot{w}_0^s$$

oraz gdzie l_m oznacza długość załomów, $\dot{\theta}_m^s$ prędkość obrotu płatów, przy czym

$$L_p^s = \int_S p(t) \dot{w}^s dS = 2(3 - \zeta^s) ab p(t) \dot{w}_0^s,$$

$$\begin{aligned} L_B^s &= \int_S B \dot{w}^s dS = \left\{ \left(\frac{\dot{w}_0}{\zeta} \right) \cdot \frac{\zeta^3}{\zeta^s} + \right. \\ &\quad \left. + w_0 \left[4 - 3\zeta^s + \frac{3}{2\zeta^s} (\zeta^{s^2} - \zeta^2) \right] \right\} abm \dot{w}_0^s. \end{aligned}$$

Określenie równań problemu dynamiki. Przyjmujemy w (3.4) $\zeta^s = \zeta$. Otrzymujemy układ równań opisujący problem dynamiki sztywno-plastycznej płyty prostokątnej pod działaniem obciążenia $p(t)$ o średniej intensywności w postaci

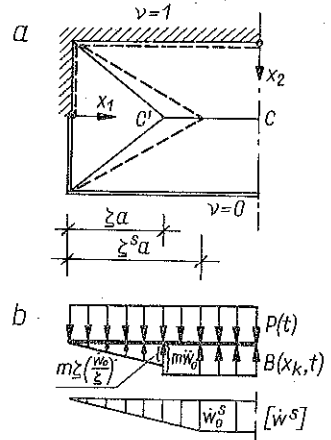
$$(3.5) \quad \begin{aligned} 2(3 - \zeta) p(t) - 2 \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta} \right) p_0 - 2(2 - \zeta) m \ddot{w}_0 + \zeta m \dot{w}_0 &= 0, \\ 2\zeta^2 p(t) - 2p_0 - \zeta^2 m \ddot{w}_0 + \zeta m \dot{w}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie (3.5) względem $\ddot{w}_0(t)$ i $\dot{\zeta}(t)$ prowadzi do układu równań różniczkowych

$$(3.6) \quad \begin{aligned} m \ddot{w}_0 &= \frac{2}{4 - 3\zeta} [(3 - 2\zeta) p(t) - \zeta^2 p_0], \\ m \dot{\zeta} &= \frac{2}{\zeta(4 - 3\zeta) \dot{w}_0} [(1 - \zeta) \zeta^2 p(t) + (\zeta^2 \zeta^2 + 3\zeta - 4) p_0]. \end{aligned}$$

Warunki początkowe problemu są następujące:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{w}_0(0) = w_0(0) &= 0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \\ \varphi \zeta_0^3 - (\varphi + \zeta^2) \zeta_0^2 - 3\zeta_0 + 4 &= 0, \end{aligned}$$



Rys. 2. Ilustracja graficzna poszukiwania rozwiązania zadania dynamiki dla średnich obciążeń: a) kinematycznie dopuszczalna siatka linii załomów: linie ciągłe — \dot{w} , linie przerywane — w^s , b) obciążenie zewnętrzne $p(t)$, siły inercyjne $B(x, t)$ i kształt pola \dot{w} dla zadania nośności granicznej w ustalonej chwili t procesu dynamicznego płynięcia

gdzie $\varphi = p(0)/p_0$ oznacza współczynnik początkowej intensywności obciążenia dynamicznego. Warunek na ζ_0 uzyskuje się z (3.6)₂ wymagając skończonej prędkości $\dot{\zeta}$ w chwili $t=0$. Zastosowanie reguły de L'Hospitala daje wzór

$$(3.8) \quad \dot{\zeta}(0) = - \frac{(1-\zeta_0)\zeta_0^3}{4[\varphi(1-\zeta_0)\zeta_0^2+1]p_0} \dot{p}(0).$$

Z (3.8) wynika, że znak pochodnej $\dot{p}(0)$ decyduje o kierunku ruchu linii załomów, dobiegających do naroży płyty w początkowym okresie czasu.

Ruch płyty plastycznej, pod działaniem obciążenia dowolnie zmiennego w czasie o intensywności średniej, odbywa się w jednej fazie od chwili $t=0$ aż do ustania ruchu w chwili t_f . Obciążenie dynamiczne może być zarówno monotonicznie malejące w całym okresie działania jak również początkowo rosnące i następnie malejące. Koniec ruchu wyznaczamy w warunku zanikania prędkości płyty:

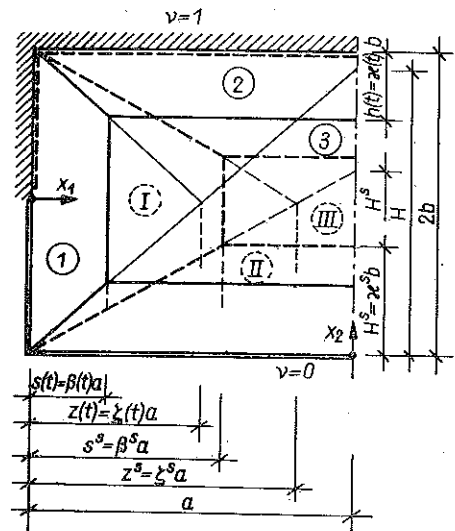
$$(3.9) \quad \dot{w}_0(t_f) = 0.$$

Górna granica obciążenia średniego podana zostanie w dalszej części pracy.

Z kolei rozpatrzmy przypadek obciążenia dużego.

1. *Określenie rodziny kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości.* Rodzina kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń \dot{w}^c , odpowiadająca obciążeniu o dużej intensywności, charakteryzuje się układem linii załomów pokazanych na rys. 3. Dodatkowo linie załomów plastycznych, równoległe do brzegu płyty, ograniczają płat środkowy. W procesie płynięcia dynamicznego zachowuje się on jak obszar sztywny i porusza się z prędkością $\dot{w}_0^c(t)$:

$$(3.10) \quad \dot{w}_i^c(x_k, t) = \begin{cases} \frac{\dot{w}_0^c(t)}{\beta^c(t)} \frac{x_1}{a} & \text{dla płata pierwszego,} \\ \frac{\dot{w}_0^c(t)}{\kappa^c(t)} \frac{x_2}{b} & \text{dla płata drugiego,} \\ \dot{w}_0^c(t) & \text{dla płata trzeciego.} \end{cases}$$



Rys. 3. Ilustracja graficzna poszukiwania rozwiązania zadania dynamiki dla dużych obciążeń; linie ciągłe — \dot{w}^s , linie przerywane — \dot{w}

Pole prędkości przemieszczeń $\dot{w}(x_k, t)$, stanowiące rozwiązanie przybliżone zadania dynamiki, należy do \dot{w}^c i jest określone parametrem intensywności $\dot{w}_0(t)$ i para-

metrami geometrycznymi $\zeta(t)$, $\beta(t)$, $\kappa(t)$. Parametry geometryczne wyznaczają położenie linii załomów plastycznych. Przyjęte oznaczenia i związki geometryczne (rys. 3) są następujące:

$$(3.11) \quad \zeta(t) = \frac{z(t)}{a}, \quad \beta(t) = \frac{s(t)}{a}, \quad \kappa(t) = \frac{h(t)}{b},$$

$$H(t) = \frac{h(t)}{\beta(t)}, \quad \kappa(t) = \frac{\beta(t)}{\zeta(t)}.$$

Pole sił bezwładności B wyznaczamy różniczkując pole prędkości \dot{w} względem czasu.

2. *Pomocnicze zadania statyczne teorii nośności granicznej.* Mechanizm plastycznego płynięcia \dot{w}^s określony jest liniami załomów, których położenie przedstawiono na rys. 3 liniami przerywanymi. Funkcjonał J^s ma w tym przypadku następującą postać:

$$(3.12) \quad J^s = D^s - L_p^s + L_B^s,$$

gdzie

$$D^s = \frac{1 + \zeta^2 \zeta^s}{6\beta^s} p_0 \dot{w}_0^s ab,$$

$$L_p^s = \frac{1}{6} \left(6 - 3\beta^s - 3\frac{\beta^s}{\zeta^s} + 2\frac{\beta^{s^2}}{\zeta^s} \right) p(t) \dot{w}_0^s ab,$$

$$L_B^s = L_B^{1-I} + L_B^{2-I} + L_B^{3-I} + L_B^{2-II} + L_B^{3-II} + L_B^{3-III}$$

oraz gdzie L_B^{r-R} oznacza moc sił bezwładności $B = m\ddot{w}$ występujących na obszarze płyt $r=1, 2, 3$, wyznaczoną dla pola prędkości przemieszczeń \dot{w}^s . Poszczególne płyty pola \dot{w}^s oznaczono kolejno $R=I, II, III$ (rys. 3), przy czym

$$L_B^{1-I} = \frac{1}{12} \left(\frac{\dot{w}_0}{\beta} \right)^* \frac{\beta^3}{\beta^s} \left(4 - 3\frac{\beta}{\zeta} \right) m\dot{w}_0^s ab,$$

$$L_B^{2-I} = \frac{1}{8} \left(\frac{\dot{w}_0 \zeta}{\beta} \right)^* \frac{\beta^4}{\zeta^4 \beta^s} (\zeta^{s^2} - \zeta^2) m\dot{w}_0^s ab,$$

$$L_B^{3-I} = \frac{1}{2} \ddot{w}_0 \left[\frac{\beta^2}{\beta^s} \left(1 - \frac{\beta}{\zeta} \right) \left(\frac{\zeta^{s^2}}{\zeta^2} - 1 \right) + \frac{\beta^s}{3} \left(3 - 2\frac{\beta^s}{\zeta^s} \right) - \frac{\zeta^{s^2} \beta^2}{3\beta^s \zeta^2} \left(3 - 2\frac{\beta}{\zeta} \right) \right] m\dot{w}_0^s ab,$$

$$L_B^{2-II} = \frac{1}{12} \left(\frac{\dot{w}_0 \zeta}{\beta} \right)^* \frac{\zeta^s \beta^3}{\beta^s \zeta^3} \left(4 - 3\frac{\zeta^s \beta}{\zeta} \right) m\dot{w}_0^s ab,$$

$$L_B^{3-II} = \frac{1}{6} \ddot{w}_0 \left[\frac{\beta^{s^2}}{\zeta^{s^2}} (3 - 2\beta^s) - \frac{\beta^2}{\zeta^2} \left(3 - 2\frac{\zeta^s \beta}{\zeta} \right) \right] \frac{\zeta^s}{\beta^s} m\dot{w}_0^s ab,$$

$$L_B^{3-III} = \ddot{w}_0 (1 - \beta^s) \left(1 - \frac{\beta^s}{\zeta^s} \right) m\dot{w}_0^s ab.$$

Przytoczone składniki (3.12) wyznaczono dla 1/4 obszaru płyty. Nie przytaczamy układu równań (2.11)₁, (2.12), który wyprowadzić należy dla postaci funkcjonau J^s , podobnie jak wzór (3.12).

3. *Równanie opisujące rozpatrywane zadanie dynamiki.* W tym przypadku, po utożsamieniu $\zeta^s = \zeta$ i $\beta^s = \beta$, otrzymujemy

$$(3.13) \quad \begin{aligned} & 2 \left(6 - 3\beta - 3 \frac{\beta}{\zeta} + 2 \frac{\beta^2}{\zeta} \right) p(t) - \frac{2}{\beta} (1 + \zeta^2 \zeta) p_0 - m \left[\left(\frac{\dot{w}_0}{\beta} \right)^* \beta^2 \left(4 - 3 \frac{\beta}{\zeta} \right) + \right. \\ & \quad \left. + 12 (1 - \beta) \left(1 - \frac{\beta}{\zeta} \right) \ddot{w}_0 + \left(\frac{\dot{w}_0 \zeta}{\beta} \right)^* \frac{\beta^2}{\zeta^2} (4 - 3\beta) \right] = 0, \\ & \frac{2\zeta^2}{\beta} p_0 - \frac{2\beta}{\zeta^2} (3 - 2\beta) p(t) + m \left[\left(\frac{\dot{w}_0 \zeta}{\beta} \right)^* \frac{\beta^2}{\zeta^3} (4 - 3\beta) + \left(\frac{\dot{w}_0}{\beta} \right)^* \beta \left(4 - 3 \frac{\beta}{\zeta} \right) \right] = 0, \\ & \frac{2\zeta^2}{\beta} p_0 - \frac{2\beta}{\zeta^2} (3 - 2\beta) p(t) + m \left[2 (2 - 3\beta) + 3 \frac{\beta}{\zeta} \right] \frac{\beta^2}{\zeta^2} \left(\frac{\dot{w}_0 \zeta}{\beta} \right)^* = 0. \end{aligned}$$

Równanie (3.13)₁ wyraża bilans mocy obciążeń zewnętrznych sił inercyjnych i sił wewnętrznych. Równanie (3.13)_{2,3} są natomiast warunkami (2.12) określającymi ekstremalne własności pola \dot{w}^s , utożsamionego następnie z \dot{w} . Wykorzystanie (3.13)_{2,3} w równaniu (3.13)₁ pozwala określić przyspieszenie środkowego obszaru płyty,

$$(3.14) \quad m \ddot{w}_0(t) = p(t).$$

Uwzględniając (3.14) w (3.13)_{2,3} otrzymujemy układ równań różniczkowych na poszukiwanie parametry geometryczne $\beta(t)$ i $\zeta(t)$:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \zeta &= \frac{2\zeta}{I(t) \beta \left(4 - 3 \frac{\beta}{\zeta} \right) (4 - 3\beta)} \left\{ \frac{\zeta - 1}{\zeta} \beta^3 p(t) - \left[\left(4 - 3 \frac{\beta}{\zeta} \right) \zeta^2 \zeta^2 - 3\beta + 4 \right] p_0 \right\}, \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{I(t) \beta \left(4 - 3 \frac{\beta}{\zeta} \right)} \left[2p_0 - \left(2 - \frac{\beta}{\zeta} \right) \beta^2 p(t) \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$I(t) = \int_0^t p(t) dt.$$

Ruch płyty, wywołany działaniem obciążenia dużego, należy analizować w kolejnych fazach. Liczba tych faz zależy od charakteru zmienności w czasie obciążenia dynamicznego.

Rozważmy obciążenie duże, monotonicznie malejące w całym okresie działania. Ruch będzie odbywać się w dwóch fazach. Fazę początkową opisują równania (3.14) i (3.15). Przy zerowych warunkach początkowych, $w_0(0) = \dot{w}_0(0) = 0$, układ równań (3.15) jest nieoznaczony w chwili $t=0$. Początkowe wartości poszukiwanych para-

metrów $\zeta(0) = \zeta_0$, $\beta(0) = \beta_0$ można otrzymać wymagając skończonych wartości dla $\dot{\zeta}(0)$ i $\dot{\beta}(0)$:

$$(3.16) \quad \varphi \beta_0^2 \left(2 - \frac{\beta_0}{\zeta_0} \right) = 2,$$

$$\zeta_0 = \frac{\beta_0}{\xi} \sqrt{\frac{\varphi(2 - \beta_0)}{2}},$$

gdzie

$$\varphi = p(0)/p_0.$$

Przy numerycznym całkowaniu (3.15) są użyteczne wartości $\dot{\zeta}(0)$ i $\dot{\beta}(0)$, które można otrzymać na podstawie reguły de l'Hospitala:

$$(3.17) \quad \dot{\zeta}(0) = \frac{\Delta \zeta}{\Delta}, \quad \dot{\beta}(0) = \frac{\Delta \beta}{\Delta},$$

$$\Delta \zeta = B_1 A_4 - B_2 A_2, \quad \Delta \beta = A_1 B_2 - A_3 B_1, \quad \Delta = A_1 B_2 - A_3 B_1,$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \varphi \beta_0^2 (4 - 3\beta_0) \left(4 - 3 \frac{\beta_0}{\zeta_0} \right) - \varphi \frac{\beta_0^3}{\zeta_0} + 8\xi^2 \zeta^2 - 3\xi^2 \zeta_0 \beta_0,$$

$$A_2 = 3\varphi(1 - \zeta_0)\beta_0^2 - 3\xi^2 \zeta_0 + 3\zeta_0,$$

$$A_3 = \varphi \frac{\beta_0^3}{\zeta_0^2}, \quad A_4 = 2\varphi \beta_0 \left(4 - 3 \frac{\beta_0}{\zeta_0} \right),$$

$$B_1 = \varphi(\zeta_0 - 1)\beta_0, \quad B_2 = -\beta_0^2 \left(2 - \frac{\beta_0}{\zeta_0} \right) \frac{\dot{p}(0)}{p_0},$$

gdzie

$$\varphi = p(0)/p_0.$$

Początkowa faza ruchu kończy się w chwili $t = t_1$ wraz z zanikiem środkowego obszaru 3. Zachodzi wówczas równość $\zeta(t_1) = \beta(t_1)$. W drugiej, końcowej fazie ruchu płynięcia pole prędkości jest takie same jak w przypadku (3.2). Wówczas poprawne są równania różniczkowe (3.6). Warunki początkowe dla tej fazy ruchu są warunkami końcowymi fazy poprzedniej:

$$(3.18) \quad w_0(t_1) = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} I(t) dt, \quad \dot{w}_0(t_1) = \frac{I(t_1)}{m},$$

$$\zeta(t_1) \quad \text{według (3.15),} \quad I(t) = \int_0^t p(t) dt.$$

Koniec ruchu wyznacza się na podstawie (3.9).

Mechanizm płynięcia, analizowany w początkowej fazie ruchu obciążenia dużego, obejmuje również mechanizm dla obciążeń średnich. Środkowy płat, w mechanizmie przedstawionym na rys. 3, redukuje się do linii załomów CC' w mechanizmie dla

obciążeń średnich (rys. 2). Można więc wyznaczyć na podstawie (3.16) taką wartość współczynnika intensywności początkowej obciążenia $\varphi = \varphi_g$, dla której początkowe wartości parametrów geometrycznych są sobie równe: $\zeta_0 = \beta_0$. Wartość φ_g określa górną granicę obciążenia o średniej intensywności,

$$(3.19) \quad \varphi_g = \frac{\max p_{sr}}{p_0} = \frac{(1 + 4\xi^2) - \sqrt{1 + 8\xi^2}}{4}.$$

Rozważmy następnie obciążenie, które jest rosnące w początkowym okresie i zmienia intensywność ze średniej na dużą. Ruch odbywa się wówczas w trzech fazach. Początkowa faza ruchu odpowiada obciążeniu średniemu. Narastające obciążenie osiąga w pewnej chwili t_0 , graniczną wartość obciążenia średniego: $p(t_0) = \max p_{sr}$. Od chwili t_0 należy analizować kolejne dwie fazy właściwe obciążeniu dużemu. Warunki początkowe dla pierwszej z tych faz są warunkami końcowymi fazy początkowej ruchu.

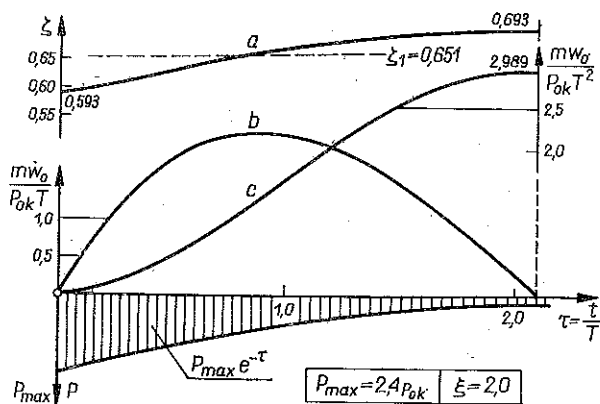
Przedstawione w tym punkcie zadanie dynamiki sztywno-plastycznej płyty prostokątnej, pod działaniem obciążenia dowolnie zmiennego w czasie, sprowadza się do ustalenia fazowości ruchu i rozwiązania układów równań różniczkowych z odpowiednimi warunkami początkowymi. W pracy poszukiwano rozwiązań tych układów równań na drodze numerycznej.

Na rys. 4 i 5 podano rozwiązania uzyskane dla obciążeń średnich

$$(3.20) \quad p(t) = p_{\max} e^{-\tau}, \quad \tau = \frac{t}{T}$$

oraz obciążeń dużych

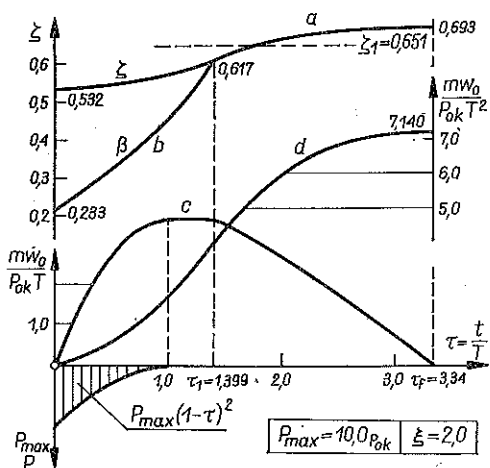
$$(3.21) \quad p(t) = p_{\max} \begin{cases} 1 - \tau^2 & \text{dla } 0 \leq \tau \leq 1, \\ 0 & \text{dla } \tau > 1. \end{cases}$$



Rys. 4. Zmienność w czasie charakterystycznych parametrów dynamicznego procesu pływnięcia wywołanego średnim obciążeniem (3.20); a parametr geometryczny $\zeta(t)$; b prędkość środka płyty $\dot{w}_0(t)$; c przemieszczenie środka płyty $w_0(t)$

Przedstawione wyniki numeryczne wskazują na małe zmiany wartości parametru $\zeta(t)$ w procesie płynięcia płyty. Ruch linii załomów, które dobiegają do naroży płyty, zmienia lokalnie kształt pola prędkości przemieszczeń i przez to formę ruchu. Zmienność w czasie parametru $\zeta(t)$ nie ma jednak dużego wpływu na końcowe przemieszczenie i czas trwania ruchu. Natomiast istotny wpływ na ruch płyty ma niestacjonarność linii załomów równoległych do brzegów płyty, które powstają przy działaniu obciążeń dużych. Proces płynięcia dynamicznego płyty prostokątnej przy założeniu $\zeta(t) = \zeta_1 = \text{const}$ analizowano w pracy [17].

Otrzymane rozwiązanie kinematyczne płyty prostokątnej w szczególnym przypadku $\zeta = 1$ jest zgodne z rozwiązaniem ścisłym płyty kwadratowej podanym w pracy [13]. Należy również podkreślić zgodność naszych rozważań z wcześniejszymi wynikami autora [16], gdzie sformułowano metodę równowagi dynamicznej płatów dla płyt sztywno-plastycznych odpowiadających warunkowi plastyczności Johansena.



Rys. 5. Zmienność w czasie charakterystycznych parametrów dynamicznego procesu płynięcia wywołanego dużym obciążeniem (3.21); a parametr geometryczny $\beta(t)$; b parametr geometryczny $\beta(t)$; c prędkość środka płyty $\dot{w}_0(t)$; d przemieszczenie środka płyty $w_0(t)$

4. POWŁOKA KULISTA O MAŁEJ WYNIOSŁOŚCI

Oszacowanie z nadmiarem obciążenia granicznego powłoki kulistej o małej wyniosłości przedstawiono w pracy [14]. Rozwiązanie uzyskano przyjmując uproszczoną powierzchnię graniczną. Siły wewnętrzne powłoki spełniają następujące warunki stanu granicznego:

$$(4.1) \quad N_r = N_\varphi = N_0, \quad M_\varphi = M_0, \quad 0 \leq M_r \leq M_0.$$

Mechanizm płynięcia powłoki określony jest powierzchnią stożkową. Oszacowanie kinematyczne obciążenia granicznego ma postać

$$(4.2) \quad p_{0k} = 6 \left(\frac{N_0}{3R} + \frac{M_0}{a_2} \right).$$

Rozważymy zagadnienie dynamiki dla zmiennego w czasie obciążenia o dużej intensywności. Rozwiązanie kinematyczne wyznaczymy opierając się na warunku minimum (2.6) i równaniu podstawowym metody kinematycznej (2.7).

Przyjmujemy, że warunki graniczne (4.1) określają dynamiczną powierzchnię plastyczności w całym procesie płynięcia. W początkowej fazie ruchu poszukujemy rozwiązania w rodzinie kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń:

$$(4.3) \quad \dot{w}^c(\rho, t) = \begin{cases} \frac{\dot{w}_0^c(t)}{1 - \alpha^c(t)} (1 - \rho), & \text{jeżeli } \alpha^c(t) \leq \rho = \frac{r}{a} \leq 1, \\ \dot{w}_0^c(t), & \text{jeżeli } 0 \leq \rho < \alpha^c(t). \end{cases}$$

Pole sił bezwładności $B(\rho, t)$, związane z poszukiwanym polem prędkości przemieszczeń $\dot{w} = \dot{w}(\dot{w}_0, \alpha)$, przedstawiono na rys. 6. Zadanie rozwiązujemy bezpośrednio wykorzystując układ równań metody kinematycznej (2.6) i (2.7). Funkcjonał (2.5) jest w tym przypadku następującą funkcją parametru α^c :

$$(4.4) \quad J[\dot{w}^c] = J^c(\alpha^c) = D^c - L_p^c + L_B^c,$$

gdzie

$$D^c = 2\pi \left\{ \int_0^a (N_r \dot{\varepsilon}_r^c + N_\varphi \dot{\varepsilon}_\varphi^c) r dr + \int_{\alpha^c}^a M_\varphi k_\varphi^c r dr + M_0 \frac{d\dot{w}^c}{d\rho} \alpha^c \right\} = \\ = \frac{\pi}{3} \left[\frac{2N_0}{R} (1 + \alpha^c + \alpha^{c^2}) + \frac{6M_0}{a^2} \frac{1}{1 - \alpha^c} \right] a^2 \dot{w}_0^c,$$

$$L_p^c = 2\pi \int_0^a p(t) \dot{w}^c r dr = \frac{\pi}{3} (1 + \alpha^c + \alpha^{c^2}) a^2 p(t) \dot{w}_0^c,$$

$$L_B^c = 2\pi \int_0^a B(r, t) \dot{w}^c r dr = \pi \left\{ \ddot{w}_0 \alpha^{c^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{\dot{w}_0}{1 - \alpha} \right) \frac{(1 - \alpha^3)(1 + 3\alpha)}{1 - \alpha^c} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \ddot{w}_0 \frac{1}{1 - \alpha^c} [3(\alpha^2 - \alpha^{c^2}) - 2(\alpha^3 - \alpha^{c^3})] \right\} ma^2 \dot{w}_0^c,$$

$$\dot{\varepsilon}_r^c = \dot{\varepsilon}_\varphi^c = \frac{\dot{w}^c}{R}, \quad k_\varphi^c = -\frac{1}{r} \frac{d\dot{w}^c}{dr}, \quad \frac{d\dot{w}^c}{d\rho} = \frac{d\dot{w}^c}{d\rho} \Big|_{\rho=\alpha^c-} - \frac{d\dot{w}^c}{d\rho} \Big|_{\rho=\alpha^c+}.$$

Z układu warunków (2.6) po wykorzystaniu $\alpha^c = \alpha$ i (2.7) otrzymujemy układ równań różniczkowych opisujących rozpatrywane zadanie dynamiki dla obciążeń o intensywności dużej:

$$(4.5) \quad m\ddot{w}_0(t) = p(t) - \frac{2N_0}{R}, \\ \dot{\alpha}(t) = \frac{\left[p(t) - \frac{2N_0}{R} \right] (1 + \alpha) (1 - \alpha)^2 - \frac{12M_0}{a^2}}{(1 - \alpha) (1 + 3\alpha) i(t)},$$

gdzie

$$i(t) = \int_0^t \left[p(t) - \frac{2N_0}{R} \right] dt.$$

Będziemy analizować ruch powłoki pod wpływem obciążenia dużego, monotonicznie malejącego w całym okresie działania. Należy rozważyć dwie fazy ruchu. W fazie początkowej linia załomu ruchomego, określona parametrem $\alpha(t)$, przemieszcza się do środka powłoki. Całkowanie układu równań (4.5) przy zerowych warunkach początkowych $w_0(0) = \dot{w}_0(0) = 0$ pozwala określić przemieszczenie środka powłoki i położenie załomu ruchomego:

$$(4.6) \quad w_0(t) = \frac{1}{m} \int_0^t i(t) dt,$$

$$(1-\alpha)^2(1+\alpha) = \frac{12M_0 t}{a^2 i(t)}.$$

Koniec fazy początkowej chwili $t=t_1$, należy wyznaczyć na podstawie (4.6)₂ wymagając, aby $\alpha(t_1) = 0$. Od chwili $t=t_1$ należy rozważać fazę końcową ruchu powłoki plastycznej. Forma ruchu będzie stacjonarna. Pole prędkości przemieszczeń \dot{w} stanowi powierzchnię stożkową, którą wyznacza niezmienny parametr intensywności $\dot{w}_0(t)$, tj. prędkość środka powłoki. Z zasady bilansu mocy sił wewnętrznych i mocy obciążeń zewnętrznych otrzymujemy przyspieszenie środka powłoki w tej fazie ruchu:

$$(4.7) \quad m\ddot{w}_0(t) = 2[p(t) - p_{ok}].$$

Czas trwania ruchu i końcowe przemieszczenie trwałe środka powłoki są równe odpowiednio

$$(4.8) \quad t_f = \frac{I(t_f)}{p_{ok}}, \quad t_1 = \frac{a^2 i(t_1)}{12M_0},$$

$$mw_0(t_f) = 2 \int_0^{t_f} i(t) dt - \int_0^{t_1} i(t) dt - \frac{6M_0}{a^2} (t_f^2 - t_1^2),$$

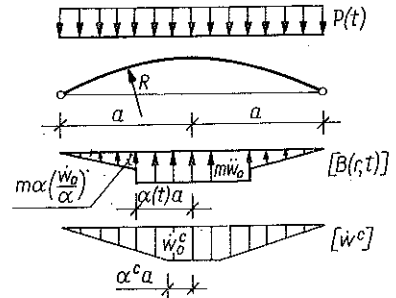
gdzie

$$I(t) = \int_0^t p(t) dt, \quad i(t) = \int_0^t \left[p(t) - \frac{2N_0}{R} \right] dt.$$

Graniczną wartość obciążenia średniego można wyznaczyć z (4.5)₂, podstawiając $\alpha = \alpha = 0$:

$$(4.9) \quad \max p_{sr} = 2 \left(\frac{6M_0}{a^2} + \frac{N_0}{R} \right).$$

Przy średnich obciążeniach dynamicznych ruch odbywa się w jednej fazie. Pole prędkości przemieszczeń \dot{w} jest identyczne z polem prędkości, które występuje w fazie



Rys. 6. Ilustracja graficzna poszukiwania rozwiązania zadania dynamiki powłoki kulistej o małej wyniosłości

końcowej przy działaniu obciążenia dużego. Końcowe przemieszczenie środka powłoki przy działaniu obciążenia średniego wynosi

$$(4.10) \quad mw_0(t_f) = 2 \int_0^{t_f} I(t) dt - p_{0k} t,$$

gdzie t_f jest wyznaczone z (4.8)₁.

Podane rozwiązanie przybliżone dla powłoki o małej wyniosłości redukuje się w granicznym przypadku $R \rightarrow \infty$ do rozwiązania ścisłego płyty kołowej pod obciążeniem zmiennym w czasie [3].

5. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona metoda kinematyczna umożliwia analizę stacjonarnych i niestacjonarnych procesów płynięcia konstrukcji sztywno-plastycznych obciążonych dynamicznie w zakresie małych przemieszczeń. Dokładność rozwiązań uzyskanych tą metodą w stosunku do rozwiązań ścisłych zależy od wyboru rodziny kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń \dot{w}_i^e , w której poszukujemy rozwiązania przybliżonego \dot{w}_i . Metody wariacyjne teorii plastyczności [1] pozwalają na określenie ekstremalnych własności pola prędkości \dot{w}_i . Metoda może być stosowana w zakresie ważności twierdzenia minimalnego. Jest ono poprawne dla statecznych materiałów plastycznych podlegających stowarzyszonemu prawu płynięcia plastycznego. Postulat stateczności Druckera (2.3) należy odnieść do każdej chwili procesu płynięcia dynamicznego. Dlatego będzie uzasadnione poszukiwanie rozwiązań dla materiałów o bardzo złożonych własnościach plastycznych, jak również uogólnienie metody dla zakresu dużych przemieszczeń. Przy poszukiwaniu rozwiązań stacjonarnych problemów metoda kinematyczna redukuje się do równości bilansu mocy (2.7) w każdej chwili procesu płynięcia. W tej formie była dotychczas stosowana między innymi w pracach [11 i 12]. Nie podejmowano jednak w nich problemu określenia ekstremalnej formy dynamicznego ruchu konstrukcji plastycznej. Przyjmowano, że forma ruchu jest niezmienna w czasie i identyczna z odpowiednim mechanizmem płynięcia statycznego zadania nośności granicznej.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. C. DRUCKER, *Variational principles in the mathematical theory of plasticity*, Proc. Symp. Appl. Math. 8, Calculus of variations and its applications, 7, 1958 [in Russian: *Mechanika* Nr 6 (58) 1959].
2. H. G. HOPKINS, W. PRAGER, *On the dynamic of plastic circular plates*, ZAMP, 1954.
3. P. PERZYNA, *Dynamic load carrying capacity of a circular plate*, Arch. Mech. Stos., 3, 1958.
4. P. G. HODGE, *Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells*, J. Mech. Phys. Solids, 5, 1955.
5. A. P. RZANICYN, *Extremal properties of the shape of the velocity field in the motion of rigid-plastic structure* [in Russian], Izv. A. N. SSSR, OTN, Mech. Mash., 2, 1959.
6. B. P. TAMURZ, *A minimum principle in dynamics of rigid-plastic bodies* [in Russian], Prik. Mat. Mech. OTN AN SSSR, 1962.

7. L. H. LEE, CHE-MOU-NI, *A minimum principle in dynamics of elastic-plastic continua at finite deformation*, Arch. Mech. Stos., **25**, 3, 1973.
8. T. WIERZBICKI, *Direct variational approach to dynamic plastic mode solutions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci., techn., **23**, 6, 1975.
9. T. WIERZBICKI, *Duże ugięcia dynamiczne obciążonych konstrukcji. Krytyczny przegląd istniejących teorii*, Prace IPPT, 1975.
10. T. WIERZBICKI, *Extremum principles in the dynamics of rigid-plastic bodies: A critical review of existing applications*, ELCALAP Seminar, Berlin Sept. 1975 [to appear in: Nuclear Eng. Design.].
11. N. JONES, *A theoretical study of the dynamic plastic behavior of beams and plastic with finite-deflections*, Int. J. Solids and Structures, **7**, 1971.
12. R. WALTERS, N. JONES, *An approximate theoretical study of the dynamic plastic behaviour of shells*, Int. J. Non-Linear Mechanics, **7**, 1972.
13. A. COX, L. MORLAND, *Dynamic plastic deformations of simply-supported square plates*, J. Mech. Phys. Sd., **7**, 1959.
14. M. I. ERKHOV, *Limit analysis of rotationally symmetric shells* [in Russian], Mech. Konstr. Rasc. Soor, **4**, 1966.
15. G. BĄK, D. NIEPOSTYN, T. WIERZBICKI, *Metody rozwiązań w dynamice powłok plastycznych* Sympozjum „Konstrukcje powłokowe. Teoria i zastosowanie”, Kraków 1974.
16. G. BĄK, *Metoda równowagi płatów w dynamice sztywno-plastycznych płyt wielokątowych* [przyjęto do druku w: Biul. WAT, **2**, 1977].
17. G. BĄK, *Dynamika sztywno-plastycznej płyty prostokątnej w zakresie małych przemieszczeń* [przyjęto do druku w: Biul. WAT, **3**, 1977].

Резюме

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ДИНАМИКЕ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Представлен кинематический метод решения нестационарных задач динамики жестко-пластических конструкций в области малых перемещений. Подбор соответствующего поля скорости перемещений в каждый момент процесса течения, производится на основе минимальной теоремы теории пластичности [1]. Применение метода иллюстрируется примерами определения движения жестко-идеально пластической прямоугольной плиты и сферической оболочки с малым взнесом. Рассмотрена динамическая нагрузка произвольно меняющаяся во времени.

SUMMARY

KINEMATICAL METHOD IN DYNAMIC OF RIGID-PLASTIC STRUCTURES

The kinematical method of solution of the nonstationary dynamic problems for rigid-plastic structures is presented. The corresponding field of the displacement velocities in each moment of time of the flow process is chosen from the minimum theorems of the plasticity theory [1]. The method was illustrated by the examples determining the motion of the rigid-perfectly plastic rectangular plate and shallow spherical shell. The dynamic load changing arbitrarily in time is assumed.

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 września 1976 r.