

ZGINANIE SFERYCZNEJ POWŁOKI PERFOROWANEJ OBCIĄŻONEJ OBROTOWO-SYMETRYCZNIE

ROMAN NAGÓRSKI (WARSZAWA)

Przedmiotem pracy jest rozwiązanie zagadnienia zginania cienkiej sferycznej powłoki perforowanej o stałej grubości, wykonanej z materiału sprężysto jednorodnego, podlegającego prawu Hooke'a. Rozważono ustrój o gęstej siatce złożonej z dwu rodzin elementów (południkowych i równoleżnikowych).

W pracach [2 i 3] wyprowadzono na podstawie teorii C. Woźniaka opartej na modelu ciągłym ośrodka [1] równania różniczkowe typu H. Reissnera (podobnie jak dla powłok o strukturze ciągłej [4 i 5]).

W pracy tej otrzymano formalnie ściśle rozwiązania tych równań za pomocą szeregów potęgowych oraz przybliżone — przy zastosowaniu metody zaburzeń brzegowych.

Podano przykład powłoki o jednym brzegu obciążonej ciężarem własnym. Rozważono dwa rodzaje podparcia: przegubowe i utwierdzenie. Wyniki otrzymane na podstawie rozwiązania ścisłego i przybliżonego porównano z wynikami dla powłoki o strukturze ciągłej [6].

1. PODSTAWOWE RÓWNIANIA I ZWIĄZKI PROBLEMU ZGINANIA SFERYCZNEJ POWŁOKI PERFOROWANEJ OBCIĄŻONEJ OBROTOWO-SYMETRYCZNIE

Rozważmy powłokę perforowaną ukształtowaną na sferze zbudowaną z przenikających się wzajemnie elementów, których osie pokrywają się z południkami i równoleżnikami (rys. 1).

Podstawowy układ równań różniczkowych omawianego problemu ma postać [2]

$$(1.1) \quad L \left(\frac{1}{\tilde{E}_{(I)}}, -\frac{\nu_{(I)}}{\tilde{E}_{(II)}}, \frac{1+\nu_{(II)}}{\tilde{E}_{(I)}}, \frac{1}{\tilde{E}_{(II)}}, \frac{\delta}{\tilde{R}_{(II)}} - \frac{\nu_{(I)}}{\tilde{E}_{(II)}}; Q \right) - \theta = F^*,$$

$$L (D_{(II)}, D_{(II)} \nu_{(II)}, D_{(II)} - D_{(I)} \nu_{(I)}, D_{(I)}, \tilde{S}_{(I)} + D_{(II)} \nu_{(II)}; \theta) + R^2 Q = -R^2 m,$$

$$\frac{dv}{d\varphi} - \nu \operatorname{ctg} \varphi = \frac{R}{\delta} \left[\frac{1+\nu_{(II)}}{\tilde{E}_{(I)}} \frac{dQ}{d\varphi} - \frac{1+\nu_{(I)}}{\tilde{E}_{(II)}} Q \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1+\nu_{(II)}}{\tilde{E}_{(II)}} Rq - \left(\frac{1+\nu_{(I)}}{\tilde{E}_{(II)}} + \frac{1+\nu_{(II)}}{\tilde{E}_{(I)}} \right) \frac{P^*}{\sin^2 \varphi} \right],$$

gdzie

$$(1.2) \quad L [\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\varepsilon}; (\dots)] = \frac{d}{d\varphi} \left[\bar{\alpha} \frac{d(\dots)}{d\varphi} \right] + \frac{d}{d\varphi} [\bar{\beta} (\dots)] \operatorname{ctg} \varphi +$$

$$+ \bar{\gamma} \frac{d(\dots)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - \bar{\delta} (\dots) \operatorname{ctg}^2 \varphi - \bar{\varepsilon} (\dots)$$

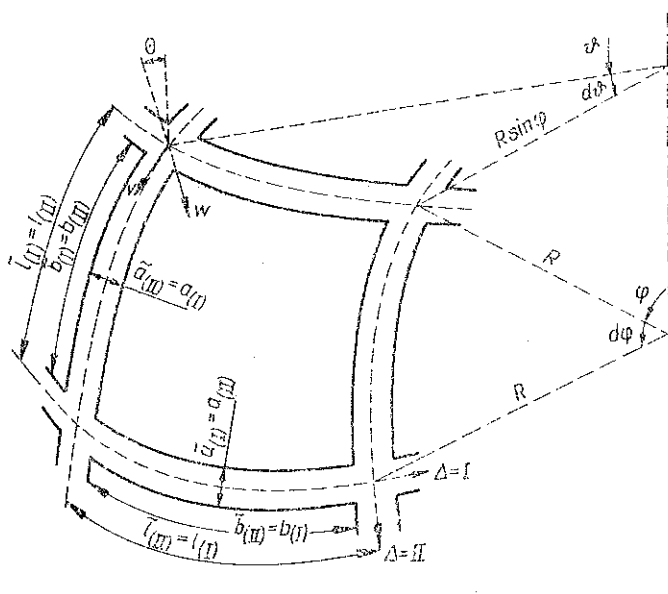
jest operatorem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach oraz

$$P^* = P^0 + R \int_{\varphi}^{\varphi} (q_2 \sin^2 \alpha + q \sin \alpha \cos \alpha) d\alpha,$$

$$(1.3) \quad F^* = \frac{d}{d\varphi} \left[\left(\frac{1}{\tilde{E}_{(I)}} + \frac{\nu_{(I)}}{\tilde{E}_{(II)}} \right) \right] \frac{P^*}{\sin^2 \varphi} + \left(\frac{1 + \nu_{(I)}}{\tilde{E}_{(II)}} + \frac{1 + \nu_{(II)}}{\tilde{E}_{(I)}} \right) \frac{P^*}{\sin^2 \varphi} \operatorname{ctg} \varphi +$$

$$- R \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{q}{\tilde{E}_{(I)}} \right) - \frac{R}{\tilde{E}_{(I)}} (1 + \nu_{(II)}) q \operatorname{ctg} \varphi,$$

gdzie przez θ i v oznaczono odpowiednio kąt obrotu wężła (punkt przecięcia osi elementów powłoki) względem osi stycznej do równoleżnika oraz przemieszczenie południkowe; P^0 , q_2 , q , m są odpowiednio składowymi obciążeniami górnego brzegu powłoki, odniesionego do jednostki długości, obciążenia południkowego, normalnego oraz obciążenia momentowego, równoleżnikowego odniesionych do jednostki pola środkowej powierzchni powłoki.



Rys. 1

Wielkości $\tilde{E}_{(\Delta)}$, $\nu_{(\Delta)}$, $\check{R}_{(II)}$, $\check{S}_{(I)}$, $D_{(\Delta)}$ ($\Delta = I, II$) określone są za pomocą wzorów (rys. 1)

$$(1.4) \quad \tilde{E}_{(\Delta)} = E \frac{\tilde{a}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}}, \quad \nu_{(\Delta)} = \frac{a_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \nu, \quad \check{R}_{(II)} = \frac{\delta^3 \tilde{E}_{(II)}}{b_{(II)}^2},$$

$$D_{(\Delta)} = \frac{\tilde{E}_{(\Delta)} \delta^3}{12(1 - \nu_{(I)} \nu_{(II)})}, \quad \check{S}_{(I)} = \frac{\delta \tilde{a}_{(II)}^2 \tilde{E}_{(I)} l_{(I)}}{12 b_{(I)}},$$

gdzie δ oznacza stałą grubość powłoki, E moduł Younga oraz ν współczynnik Poissona.

Poza tym wykorzystamy wzory [2]

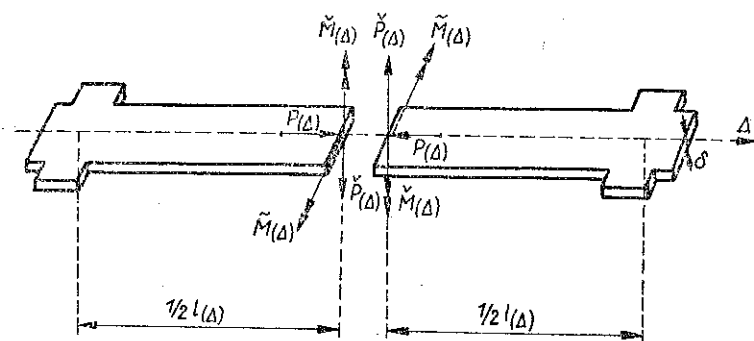
$$(1.5) \quad N_2 = -Q \operatorname{ctg} \varphi - \frac{P^*}{\sin^2 \varphi}, \quad N_1 = -\frac{dQ}{d\varphi} + \frac{P^*}{\sin^2 \varphi} - Rq,$$

$$M_1 = \frac{D_{(I)}}{R} \left(\theta \operatorname{ctg} \varphi + \nu_{(I)} \frac{d\theta}{d\varphi} \right), \quad M_2 = \frac{D_{(II)}}{R} \left(\nu_{(II)} \theta \operatorname{ctg} \varphi + \frac{d\theta}{d\varphi} \right),$$

$$M = \frac{\check{S}_{(I)}}{R} \theta.$$

Między wielkościami N_1 , N_2 , Q , M_1 , M_2 , M i rzeczywistymi składowymi sił i momentów w środkowych przekrojach elementów powłoki zachodzą następujące związki (rys. 2):

$$(1.6) \quad \begin{aligned} P_{(I)} &= N_1 l_{(I)}, & \check{M}_{(I)} &= M_1 l_{(I)}, & \check{M}_{(I)} &= M l_{(I)}, \\ P_{(II)} &= N_2 l_{(II)}, & \check{M}_{(II)} &= M_2 l_{(II)}, & \check{P}_{(II)} &= Q l_{(II)}. \end{aligned}$$



Rys. 2

Przemieszczenie normalne w węzłach wyznaczamy ze wzoru

$$(1.7) \quad w = \nu \operatorname{ctg} \varphi - \frac{R}{\delta} \left(\frac{N_1}{E_{(I)}} - \frac{\nu_{(I)} N_2}{E_{(II)}} \right).$$

Przedstawione powyżej równania (1.1) i wzory (1.5), (1.7) mogą być przy odpowiedniej interpretacji wielkości (1.4) równaniami i wzorami teorii ciągłych powłok ortotropowych.

Wszystkie wprowadzone tu wielkości są zgodnie z założeniami teorii [1 i 2] dostatecznie regularnymi funkcjami współrzędnej φ .

Szczegółowe wyjaśnienia dotyczące przyjętych założeń oraz przedstawionych tu równań i wzorów, wprowadzonych wielkości i symboli można znaleźć w monografii [1] oraz pracach [2 i 3].

2. ROZWIĄZANIE ZA POMOCĄ SZEREGÓW POTĘGOWYCH

Rozważmy przypadek powłoki, dla której

$$(2.1) \quad \begin{aligned} l_{(I)} = \bar{l}_{(I)} = l_{(I)}^c \sin \varphi, \quad l_{(II)}^c = \text{const}, \quad l_{(II)} = \bar{l}_{(I)} = \text{const}, \\ a_{(I)} = \mu_{(I)} l_{(I)} = a_{(I)}^c \sin \varphi, \quad a_{(II)}^c = \mu_{(II)} l_{(II)}^c = \text{const}, \quad a_{(II)} = \mu_{(II)} l_{(II)} = \text{const}, \end{aligned}$$

gdzie $\mu_{(\Delta)}$ ($\Delta = I, II$) są stałymi współczynnikami ($\mu_{(\Delta)} < 1$).

Wtedy na podstawie (1.4), (2.1) mamy

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \bar{E}_{(\Delta)} = E \mu_{(III-\Delta)}, \quad v_{(\Delta)} = \nu \mu_{(\Delta)}, \quad \check{R}_{(II)} = \frac{\delta^3 E \mu_{(I)}}{l_{(I)}^2 (1 - \mu_{(II)})^2}, \\ D_{(\Delta)} = \frac{\delta^3 E_{(III-\Delta)}}{12 (1 - \nu^2) \mu_{(I)} \mu_{(II)}}, \quad \check{S}_{(I)} = \frac{\delta E \mu_{(II)}^3 l_{(II)}^2}{12 (1 - \mu_{(I)})}, \quad (\Delta = I, II). \end{aligned}$$

Wielkości (2.2) są wielkościami stałymi.

Stosując podstawienia

$$(2.3) \quad x = \sin \varphi, \quad \theta(\varphi) = \bar{\theta}(x), \quad Q(\varphi) = \frac{1}{\alpha_0} \bar{Q}(x), \quad \alpha_0 = \frac{R^2}{D_{(II)}}$$

oraz uwzględniając (1.2) i (2.2) sprowadzamy układ równań (1.1)_{1,2} do postaci

$$(2.4) \quad \begin{aligned} x^2 (1 - x^2) \frac{d^2 \bar{Q}}{dx^2} + x (1 - 2x^2) \frac{d\bar{Q}}{dx} - (\beta_1 + \beta_2 x^2) \bar{Q} - \alpha_3 x^2 \bar{\theta} = \alpha_0 x^2 \bar{F}^*, \\ x^2 (1 - x^2) \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} + x (1 - 2x^2) \frac{d\bar{\theta}}{dx} - (\alpha_1 + \alpha_2 x^2) \bar{\theta} + x^2 \bar{Q} = -\alpha_0 m, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \bar{F}^* = (1 + \nu_{(II)}) \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{x^{2*}}{\sin^2 \varphi} \right) + (1 + \alpha_1 + 2\nu \mu_{(II)}) \frac{P^*}{\sin^2 \varphi} \text{ctg } \varphi - \\ - R \frac{dq}{d\varphi} - R (1 + \nu \mu_{(II)}) q \text{ctg } \varphi, \\ \alpha_1 = \beta_1 = \frac{\mu_{(II)}}{\mu_{(I)}}, \quad \beta = \alpha_1 \left[\frac{l_{(II)}^2 (1 - \mu_{(II)})^2}{\delta^2} - \nu \mu_{(II)} - 1 \right], \\ \alpha_3 = \delta \bar{E}_{(I)} \alpha_0, \quad \alpha_2 = \frac{\mu_{(II)}^3 l_{(II)}^2 (1 - \nu^2) \sqrt{\mu_{(I)} \mu_{(II)}}}{\delta^2 \mu_{(I)} (1 - \mu_{(I)})} + \nu_{(II)} - \alpha_1. \end{aligned}$$

Całek ogólnych równań jednorodnych (2.4) poszukujemy w postaci

$$(2.6) \quad \bar{Q} = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n}, \quad \bar{\theta} = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}.$$

Podstawiając (2.6) do (2.4) i przyrównując współczynniki przy odpowiednich potęgach x do zera otrzymujemy ciąg związków rekurencyjnych:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} (\lambda^2 - \beta_1) b_0 = 0, \quad (\lambda^2 - \alpha_1) a_0 = 0, \\ [4n^2 + 4\lambda n + \lambda^2 - \beta_1] b_n - \alpha_3 a_{n-1} - [2(n-1)(2n-1) + \\ + 4\lambda(n-1) + \lambda^2 + \lambda + \beta_2] b_{n-1} = 0, \\ [4n^2 + 4\lambda n + \lambda^2 - \alpha_1] a_n + b_{n-1} - \\ - [2(n-1)(2n-1) + 4\lambda(n-1) + \lambda^2 + \lambda + \alpha_2] a_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Jeżeli $\lambda^2 - \beta_1 = 0$ i $\sqrt{\beta_1} \notin N$, to b_0 i a_0 są dowolne, a więc otrzymujemy cztery całki równań jednorodnych (2.4)

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \bar{Q}_i(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} x^{2n}, \quad \bar{Q}_i(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} x^{2n} \quad (i=1, 2), \\ \bar{\theta}_i(x) = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} x^{2n}, \quad \bar{Q}_i(x) = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} x^{2n} \quad (i=3, 4), \end{aligned}$$

przy czym

$$(2.9) \quad \begin{aligned} a_0^{(1)} = a_0^{(3)} = 0, \quad a_0^{(2)} = a_0^{(4)} = 1, \quad b_0^{(1)} = b_0^{(3)} = 1, \quad b_0^{(2)} = b_0^{(4)} = 0, \\ \lambda_1 = \sqrt{\alpha_1}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Współczynniki a_n, b_n ($n=1, 2, 3, \dots, i=1, 2, 3, 4$) występujące w szeregach (2.8) znajdujemy ze wzorów (2.7) uwzględniając przy tym (2.9).

W przypadku gdy $\mu_{(1)} = \mu_{(11)}$ ($\alpha_1 = \beta_1 = 1$), mamy $\lambda_2 = -1$. Na podstawie (2.7) ($n=1$) otrzymujemy $a_0 = b_0 = 0$. Wtedy całek układu równań (2.4) poszukujemy w postaci

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \bar{\theta}(x) = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \right) \ln x + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}, \\ \bar{Q}(x) = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n} \right) \ln x + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{2n}. \end{aligned}$$

Podstawiając (2.10) do równań (2.4) i przyrównując współczynniki przy odpowiednich potęgach x do zera znajdujemy wzory rekurencyjne na współczynniki a_n, b_n, c_n i d_n .

Współczynniki c_0, d_0, c_1 i d_1 mogą być dowolne. Zatem można otrzymać układ czterech niezależnych całek równań (2.4).

Poszukujemy całek szczególnych układu równań (2.4) w przypadku, gdy

$$(2.11) \quad \alpha_0 \bar{F}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n+1} x^{2n-3}, \quad \alpha_0 m = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n x^{2n+1}$$

w postaci

$$(2.12) \quad \bar{Q}_s = \sum_{s=0}^{\infty} d_n^{(s)} x^{2n+1} + d_{-1}^{(s)} \frac{1}{x}, \quad \bar{\theta}_s = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(s)} x^{2n+1}.$$

Na współczynniki $d_{-1}^{(s)}$, $c_n^{(s)}$, $d_n^{(s)}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) otrzymujemy wzory rekurencyjne:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} (1-\beta_1) d_{-1}^{(s)} &= \gamma_1, & (1-\beta_1) d_0^{(s)} &= \beta_2 d_{-1}^{(s)} + \gamma_2, & (1-\alpha_1) c_0^{(s)} &= -d_{-1}^{(s)}, \\ [(2n+1)^2 - \beta_1] d_n^{(s)} - [2n(2n-1) + \beta_2] d_{n-1}^{(s)} - \alpha_3 c_{n-1}^{(s)} &= \gamma_{n+2}, \\ [(2n+1)^2 - \alpha_1] c_n^{(s)} - [2n(2n-1) + \alpha_2] c_{n-1}^{(s)} + d_{n-1}^{(s)} + \delta_n &= 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Jeżeli $\alpha_0 \bar{F}^*$, $\alpha_0 m$ można przedstawić w postaci

$$(2.14) \quad \alpha_0 \bar{F}^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n+1} x^{2n-3} \right) \cos \varphi, \quad \alpha_0 m = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n x^{2n+1} \right) \cos \varphi,$$

to stosując w równaniach (1.1)_{1,2} podstawienia

$$(2.15) \quad x = \sin \varphi, \quad Q(\varphi) = \bar{Q}(x) \frac{1}{\alpha_0} \cos \varphi, \quad \theta(\varphi) = \bar{\theta}(x) \cos \varphi, \quad \alpha_0 = \frac{R^2}{D_{(II)}}$$

sprowadzamy je do postaci analogicznej do (2.4).

Następnie powtarzając postępowanie jak dla całek (2.12), możemy znaleźć rozwiązanie szczególne układu równań (1.1)_{1,2}.

Rozwijając $\cos \varphi$ w szereg potęgowy względem x i tworząc odpowiednie iloczyny Cauchy'ego przedstawiamy szereg (2.14) w postaci (2.11), a więc również i w tym przypadku rozwiązanie szczególne określamy za pomocą (2.12).

Wykorzystując kryterium d'Alemberta można wykazać, że szeregi występujące w funkcjach (2.6), (2.10) i (2.12) są zbieżne dla $x \in (-1; 1)$.

Całkę równania (1.1)₃ piszemy w postaci

$$(2.16) \quad v = \frac{R}{\delta \bar{E}_{(I)}} [(1 + \nu \mu_{(I)}) Q + (1 - \alpha_1) v_Q + v_P],$$

gdzie v_Q i v_P spełniają równania

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \frac{dv_P}{d\varphi} - v_P \operatorname{ctg} \varphi &= -(1 + \alpha_1 + 2\nu_{(II)}) \frac{P^*}{\sin^2 \varphi} + (1 + \nu_{(II)}) Rq, \\ \frac{dv_Q}{d\varphi} - v_Q \operatorname{ctg} \varphi &= Q \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned}$$

Jeżeli $\alpha_0 \bar{Q}$ ma postać (2.6)₁, (2.10)₂, (2.12)₁, to $\alpha_0 v_Q$ ma odpowiednio następującą postać:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \bar{v} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^{2n+\lambda}}{2n+\lambda-1}, \\ \bar{v} &= x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln x}{2n} - \frac{1}{4n^2} \right) b_n x^{2n} + \frac{b_0}{2} x \ln^2 x - \frac{1}{2} \frac{d_0}{x} + \\ &+ d_1 x \ln x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{2n-2} x^{2n-1}, \\ \bar{v}_s &= -\frac{1}{2} \frac{d_{-1}^{(s)}}{x} + d_0^{(s)} x \ln x + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{(s)}}{2n} x^{2n}. \end{aligned}$$

3. POWŁOKA OBCIĄŻONA CIĘŻAREM WŁASNYM. ROZWIĄZANIE ŚCISŁE

Rozważmy powłokę o jednym brzegu ($\bar{\varphi}=0$) obciążoną ciężarem własnym.

Niech p oznacza intensywność ciężaru własnego odniesionego do jednostki pola środkowej powierzchni oraz ρ gęstość materiału powłoki. Zatem mamy (rys. 1)

$$(3.1) \quad p = \rho \delta \frac{l_{(I)} l_{(II)} - b_{(I)} b_{(II)}}{l_{(I)} l_{(II)}} = \rho \delta (\mu_{(I)} + \mu_{(II)} - \mu_{(I)} \mu_{(II)}), \quad m=0, \\ q_2 = p \sin \varphi, \quad q = p \cos \varphi, \quad P^0 = 0.$$

Na podstawie (3.1) i (1.3) znajdziemy

$$(3.2) \quad P^* = Rp (1 - \cos \varphi), \\ \bar{F}^* = Rp \left[(1 - \alpha_1) \left(\frac{1 - \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} - \frac{1}{\sin \varphi} \right) + (2 + \nu_{(II)}) \sin \varphi \right].$$

Rozwijając $\cos \varphi$ w szereg potęgowy względem x

$$(3.3) \quad \cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^4 - \dots - \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n} - \dots$$

przedstawiamy \bar{F}^* w postaci

$$(3.4) \quad \bar{F}^* = Rp \left[(2 + \nu_{(II)}) x + (1 - \alpha_1) \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x + \dots + \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n-3} \right) \right].$$

Na podstawie (2.3), (2.8) i (2.12) otrzymujemy

$$(3.5) \quad Q = Rp (x Q_s + C_1 x^{\lambda_1} Q_1 + C_2 x^{\lambda_2} Q_2), \\ \theta = \frac{R^3 p}{D_{(II)}} (x \theta_s + C_1 x^{\lambda_1} \theta_1 + x^{\lambda_2} \theta_2),$$

gdzie

$$(3.6) \quad \theta_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} x^{2n}, \quad Q_i = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} x^{2n} \quad (i=1, 2), \\ Q_s = \begin{cases} -(2 + \alpha_2) \kappa, & \mu_{(I)} = \mu_{(II)}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(s)} x^{2n}, & \mu_{(I)} \neq \mu_{(II)}, \end{cases} \quad Q_s = \begin{cases} -\kappa, & \mu_{(I)} = \mu_{(II)}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(s)} x^{2n}, & \mu_{(I)} \neq \mu_{(II)}, \end{cases}$$

przy czym zgodnie z (2.7), (2.9), (2.13) i (3.4) ma postać

$$(3.7) \quad a_n = \frac{\overset{(1)}{2} (n-1) \overset{(2)}{(2n-1)} + 4\lambda_1 (n-1) + \lambda_1^2 + \lambda_1 + \alpha_2}{4n^2 + 4\lambda_1 n} a_{n-1} - \frac{\overset{(1)}{b_{n-1}}}{4n^2 + 4\lambda_1 n},$$

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad b_n &= \frac{(i) \quad 2(n-1)(2n-1) + 4\lambda_1(n-1) + \lambda_1^2 + \lambda_1 + \beta_2}{4n^2 + 4\lambda_1 n} b_{n-1} + \frac{(i) \quad \alpha_3 a_{n-1}}{4n^2 + 4\lambda_1 n} \quad (n=1, 2, 3, \dots), \\
 d_0 &= -\frac{1}{2}, \quad c_0 = 0, \quad c_n = \frac{(s) \quad 2n(2n-1) + \alpha_2}{(2n+1)^2 - \alpha_1} c_{n-1} - \frac{(s) \quad d_{n-1}}{(2n+1)^2 - \alpha_1}, \\
 d_n &= \frac{(s) \quad 2n(2n-1) + \beta_2}{(2n+1)^2 - \beta_1} d_{n-1} + \frac{(s) \quad \alpha_3 c_{n-1}}{(2n+1)^2 - \beta_1} + \frac{(s) \quad \gamma_{n+2}}{(2n+1)^2 - \beta_1} \quad (n=1, 2, \dots), \\
 \gamma_3 &= 2 + v_{(II)} + \frac{1}{8}(1 - \alpha_1), \quad \gamma_4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}(1 - \alpha_1), \quad \gamma_5 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}(1 - \alpha_1), \\
 \gamma_k &= \frac{(s) \quad (2k-5)!!}{(2k-2)!!}(1 - \alpha_1) \quad (k=6, 7, \dots), \quad \kappa = \frac{2 + v_{(II)}}{(2 + \beta_2)(2 + \alpha_2) + \alpha_3}.
 \end{aligned}$$

Symbole C_1, C_2 oznaczają stałe całkowania.

Wykorzystując (3.1) i (3.2) znajdujemy całkę równania (2.17)₁:

$$(3.8) \quad v_p = Rp \left[-\frac{1}{2} (1 + \alpha_1 + 2v_{(II)}) \left(\ln \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} + \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) + (1 + v_{(II)}) \ln \sin \varphi \right] \sin \varphi.$$

Na podstawie (2.16), (2.17)₂, (3.5)₁, (3.6) i (2.18) otrzymujemy

$$(3.9) \quad v = \frac{R^2 p}{\delta E_{(I)}} \{ v_s \sin \varphi + A \sin \varphi + C_1 [(1 + v_{(II)}) Q_1 + (1 - \alpha_1) v_1] x^{\lambda_1} + C_2 [(1 + v_{(II)}) Q_2 + (1 - \alpha_1) v_2] x^{\lambda_1} \},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 v_i &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i) \quad b_n}{(2n + \lambda_1 - 1)} x^{2n} \quad (i=1, 2), \\
 v_s &= \begin{cases} (1 + v_{(II)}) \left[-(2 + \alpha_2) \kappa - \frac{1}{1 + \cos \varphi} + \ln(1 + \cos \varphi) \right], & \mu_{(I)} = \mu_{(II)}, \\ \frac{1}{2} (1 + \alpha_1 + 2v_{(II)}) \left(\ln(1 + \cos \varphi) - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) + \\ + (1 + v_{(II)}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s) \quad d_n}{2n} x^{2n} + (1 - \alpha_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s) \quad d_n}{2n} x^{2n}, & \mu_{(I)} \neq \mu_{(II)}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (3.5), (3.9), (2.1) i (2.3)₁ we wzorach (1.5) i (1.7) oraz wykorzystaniu (1.6) mamy

$$\begin{aligned}
 P_{(II)} &= -Rpl_{(II)}^c \left\{ [xQ_s + C_1 x^{\lambda_1} Q_1 + C_2 x^{\lambda_2} Q_2] \cos \varphi + \frac{x}{1 + \cos \varphi} \right\}, \\
 P_{(I)} &= -Rpl_{(I)}^c \left\{ \left[Q_s + x \frac{dQ_s}{dx} + C_1 \left(\lambda_1 Q_1 + x \frac{dQ_1}{dx} \right) x^{\lambda_1-1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + C_2 \left(\lambda_2 Q_2 + x \frac{dQ_2}{dx} \right) x^{\lambda_2-1} \right] \cos \varphi + \cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right\}, \\
 \check{P}_{(II)} &= Rpl_{(II)}^c [xQ_s + C_1 x^{\lambda_1} Q_1 + C_2 x^{\lambda_2} Q_2] \sin \varphi, \\
 \check{M}_{(I)} &= R^2 pl_{(I)}^c \alpha_1 \left\{ (1 + \nu_{(I)}) \theta_s + x \frac{d\theta_s}{dx} + C_1 \left[(1 + \lambda_1 \nu_{(I)}) \theta_1 + x \frac{d\theta_1}{dx} \right] x^{\lambda_1-1} + \right. \\
 (3.11) \quad &\quad \left. + C_2 \left[(1 + \lambda_2 \nu_{(I)}) \theta_2 + x \frac{d\theta_2}{dx} \right] x^{\lambda_2-1} \right\} \cos \varphi, \\
 \check{M}_{(II)} &= R^2 pl_{(II)}^c \left\{ (1 + \nu_{(II)}) x \theta_s + x^2 \frac{d\theta_s}{dx} + C_1 \left[(\lambda_1 + \nu_{(II)}) \theta_1 + x \frac{d\theta_1}{dx} \right] x^{\lambda_1} + \right. \\
 &\quad \left. + C_2 \left[(\lambda_2 + \nu_{(II)}) \theta_2 + x \frac{d\theta_2}{dx} \right] x^{\lambda_2} \right\} \cos \varphi, \\
 \check{M}_{(I)} &= R^2 pl_{(I)}^c (\alpha_1 + \alpha_2 - \nu_{(II)}) [\theta_s + C_1 x^{\lambda_1-1} \theta_1 + C_2 x^{\lambda_2-1} \theta_2] \sin \varphi, \\
 w &= \frac{R^2 p}{\delta \bar{E}_{(I)}} \left\langle \left\{ A + C_1 x^{\lambda_1-1} \left[(1 + \lambda_1) Q_1 + x \frac{dQ_1}{dx} + (1 - \alpha_1) v_1 \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + C_2 x^{\lambda_2-1} \left[(1 + \lambda_2) Q_2 + x \frac{dQ_2}{dx} + (1 - \alpha_2) v_2 \right] \right\} \cos \varphi + w_s \right\rangle,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.12) \quad w_s = \begin{cases} [-2(2 + \alpha_2) \kappa + (1 + \nu_{(II)}) \ln(1 + \cos \varphi) + 1] \cos \varphi - (1 + \nu_{(II)}), & \mu_{(I)} = \mu_{(II)}, \\ \left[2 \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(s)} x^{2n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1}^{(s)} x^{2n+2} + (1 - \alpha_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n^{(s)}}{2n} x^{2n} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 + \alpha_1 + 2\nu_{(II)}) \ln(1 + \cos \varphi) + \frac{1}{2} (1 - \alpha_1) \frac{1}{1 + \cos \varphi} + 1 \right] \times \\ \times \cos \varphi - (1 + \nu_{(II)}) & \mu_{(I)} \neq \mu_{(II)}. \end{cases}$$

Występujące we wzorach (3.5), (3.8) i (3.11) wielkości A , C_1 , C_2 są stałymi całkowania, które wyznaczamy z warunków na brzegu powłoki ($\varphi = \varphi_0$).

Mając na uwadze związek $\lambda^2 = \alpha_1$, można łatwo wykazać, że $w|_{\varphi=0} < \infty$.

Otrzymane powyżej wzory (3.5), (3.9) i (3.11) są poprawne dla dowolnych wartości stosunku $\mu_{(II)}/\mu_{(I)}$, jednakże dla $\lambda_1 < 1$ $P_{(I)}$ i $\check{M}_{(I)}$ jak również N_1 , N_2 , M_1 i M_2 dążą do nieskończoności dla φ dążącego do zera.

4. ZASTOSOWANIE METODY ZABURZEŃ BRZEGOWYCH

Rozważmy możliwość wykorzystania koncepcji Geckelera w przybliżonym rozwiązaniu problemu zginania sferycznej powłoki perforowanej za pomocą metody zaburzeń brzegowych.

Układ równań jednorodnych (1.1)_{1,2} przy założeniach (2.1) napiszemy w postaci

$$(4.1) \quad \begin{aligned} L^*(Q) - \kappa_1 Q - \delta \tilde{E}_{(I)} &= 0, \\ L^*(\theta) - \kappa_2 \theta + \frac{R^2}{D_{(II)}} Q &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.2) \quad \begin{aligned} L^*(...) &= \frac{d^2(...)}{d\varphi^2} + \frac{d(...)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - \alpha_1(...) \operatorname{ctg}^2 \varphi, \\ \kappa_1 &= \frac{\delta \tilde{E}_{(I)}}{\tilde{K}_{(II)}} - \nu_{(II)}, \quad \kappa_2 = \frac{\tilde{S}_{(I)}}{D_{(II)}} + \nu_{(II)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że w przypadku ortotropii ($\mu_{(I)} \neq \sigma_{(II)}$) nie jest możliwe pominięcie w operatorze (4.2)₁ składnika $\alpha_1(...) \operatorname{ctg}^2 \varphi$, ponieważ przy $\alpha_1 \neq 1$ ma on istotne znaczenie (por. s. 537). Natomiast pominięcie tylko składnika $d(...)/d\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ nie prowadzi do zasadniczych uproszczeń w rozwiązaniu.

Z wymienionych wyżej względów dalsze rozważania ograniczymy do powłok izotropowych ($\mu_{(I)} = \mu_{(II)}$, $\alpha_1 = 1$). W takim przypadku postać również (4.1) nie ulega zmianie, a operator

$$(4.3) \quad L^*(...) = \frac{d^2(...)}{d\varphi^2} + \frac{d(...)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - (...) \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Zauważmy, że powyższy operator jest identyczny z analogicznymi operatorami występującymi w równaniach różniczkowych dla powłok sferycznych o strukturze ciągłej [4-6].

Wprowadzamy oznaczenia

$$(4.4) \quad \tilde{E}_{(I)} = \tilde{E}_{(II)} = \tilde{E}, \quad \nu_{(I)} = \nu_{(II)} = \tilde{\nu}, \quad D_{(I)} = D_{(II)} = \tilde{D}.$$

Dokonując uproszczenia operatora (4.3) zaproponowanego przez GECKELERA [5]

$$(4.5) \quad L^*(...) \approx \frac{d^2(...)}{d\varphi^2},$$

sprowadzamy równanie (4.1) do prostej postaci

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} - \kappa_1 Q - \delta \tilde{E} \theta &= 0, \\ \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} - \kappa_2 \theta + \frac{R^2}{\tilde{D}} Q &= 0. \end{aligned}$$

Otrzymane dalej wyniki wykazały, że uproszczenie (4.5) nie powoduje istotnych błędów dla powłok perforowanych o odpowiednio dużej wyniosłości.

Rozdzielając niewiadome w równaniach (4.6) otrzymujemy

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{d^4 \theta}{d\varphi^4} - 4\varepsilon^2 \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} + 4\kappa^4 \theta &= 0, \\ \frac{d^4 Q}{d\varphi^4} - 4\varepsilon^2 \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + 4\kappa^4 Q &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.8) \quad 4\varepsilon^2 = \frac{\delta \bar{E}}{\bar{R}_{(1)}} + \frac{\bar{S}_{(1)}}{\bar{D}}, \quad 4\kappa^4 = \frac{R^2 \delta \bar{E}}{\bar{D}} + \kappa_1 \kappa_2.$$

Poszukując rozwiązania równania (4.7)₁ w postaci

$$(4.9) \quad \theta = e^{\alpha \varphi},$$

znajdujemy

$$(4.10) \quad \alpha^4 - 4\varepsilon^2 \alpha^2 + 4\kappa^4 = 0.$$

Jeżeli

$$\kappa^4 - \varepsilon^4 > 0,$$

to pierwiastki równania (4.10) mają postać

$$(4.11) \quad \alpha_{1-4} = \pm \xi \pm j\eta = \pm \sigma (\cos \tau \pm j \sin \tau),$$

gdzie

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \xi &= \sqrt{\varepsilon^2 + \kappa^2}, \quad \eta = \sqrt{\kappa^2 - \varepsilon^2}, \quad j = \sqrt{-1}, \\ \sigma &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{2\kappa}, \quad \tau = \arcsin \frac{\eta}{\sigma} = \arccos \frac{\xi}{\sigma}. \end{aligned}$$

Na podstawie (4.8), (4.2)_{2,3} oraz (2.2) otrzymujemy następujące oszacowanie

$$\kappa^4 - \varepsilon^4 > 0 \iff n > 0,4 \sqrt{\frac{R}{\delta}},$$

gdzie n oznacza liczbę równoleżników siatki ustroju (a więc gęstość perforacji). Na przykład, jeżeli $\delta = 0,06$ m, $R = 24$ m, to $n > 8$.

Z uwagi na fakt, że jednym z założeń rozważanej teorii powłok siatkowych jest dostateczna gęstość siatki perforacji, przyjmujemy rozwiązanie ogólne równania (4.7)₁ w postaci

$$(4.13) \quad \theta = e^{\xi \varphi} (\bar{C}_1 \sin \eta \varphi + \bar{C}_2 \cos \eta \varphi) + e^{-\xi \varphi} (\bar{C}_3 \sin \eta \varphi + \bar{C}_4 \cos \eta \varphi),$$

(gdzie \bar{C}_i ($i=1, 2, 3, 4$) są stałymi całkowania.

Wprowadzając nowe zmienne

$$(4.14) \quad \omega = \varphi_0 - \varphi, \quad \lambda = \varphi - \bar{\varphi},$$

(gdzie $\bar{\varphi}$, φ_0 są szerokościami geograficznymi odpowiednio górnego i dolnego brzegu powłoki) przekształcamy wyrażenie (4.13):

$$(4.15) \quad \theta = e^{-\xi\omega} (A_1 \sin \eta\omega + A_2 \cos \eta\omega) + e^{-\xi\lambda} (A_3 \sin \eta\lambda + A_4 \cos \eta\lambda),$$

gdzie A_i ($i=1, 2, 3, 4$) są nowymi stałymi całkowania.

Jeżeli brzegi powłoki są dostatecznie oddalone od siebie, to można przyjąć, że zaburzenia na obydwu brzegach są niezależne od siebie. Zatem otrzymujemy odpowiednio dla zaburzenia na górnym i dolnym brzegu

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \theta &= e^{-\xi\lambda} (A_3 \sin \eta\lambda + A_4 \cos \eta\lambda), \\ \theta &= e^{-\xi\omega} (A_1 \sin \eta\omega + A_2 \cos \eta\omega). \end{aligned}$$

Następnie wyprowadzimy wzory na wielkości geometryczne i statyczne przy zaburzeniu na dolnym brzegu powłoki. Odpowiednie wzory przy zaburzeniu na górnym brzegu można znaleźć w analogiczny sposób.

Znajdziemy z kolei (potrzebne w dalszych rozważaniach) pochodne funkcji (4.16)₂ względem φ do trzeciego rzędu włącznie. Pochodne te po wykorzystaniu (4.12) mają następującą zwartą postać:

$$(4.17) \quad \frac{d^{(i)} \theta}{d\varphi^{(i)}} = \sigma^i e^{-\xi\omega} [A_1 \sin(\eta\omega - i\tau) + A_2 \cos(\eta\omega - i\tau)] \quad (i=1, 2, 3).$$

Na podstawie (4.16)₂, (4.17), (4.6)₂, (1.5), (1.7), (2.20) i (4.4) otrzymujemy wzory na wielkości Q , N_1 , N_2 , M_1 , M_2 , M , v i w .

5. POWŁOKA OBCIĄŻONA CIĘŻAREM WŁASNYM. ROZWIĄZANIE PRZYBLIŻONE

Rozważmy wyniosłą powłokę o jednym brzegu ($\bar{\varphi}=0$) obciążoną ciężarem własnym o intensywności p określonej za pomocą (3.1)₁.

Znajdziemy (podobnie jak dla powłok o strukturze ciągłej) rozwiązanie dla stanu bezmomentowego ($M_1=M_2=M=Q=0$).

Na podstawie (3.2)₁, (1.5)_{1,2}, (2.20), (3.8) i (1.7) mamy

$$(5.1) \quad \begin{aligned} N_1 &= Rp \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right), & N_2 &= -\frac{Rp}{1 + \cos \varphi}, \\ v &= \frac{R^2 p (1 + \bar{\nu})}{\delta \bar{E}} \left[A + \ln(1 + \cos \varphi) - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right] \sin \varphi, \\ w &= \frac{R^2 p}{\delta \bar{E}} \{ [(1 + \bar{\nu}) \ln(1 + \cos \varphi) + 1 + (1 + \bar{\nu}) A] \cos \varphi - (1 + \bar{\nu}) \}, \\ \theta &= \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\varphi} + v \right) = -(2 + \bar{\nu}) \frac{Rp}{\delta \bar{E}} \sin \varphi, \end{aligned}$$

gdzie A jest stałą całkowania.

Rozwiązanie ogólne za pomocą metody zaburzeń brzegowych znajdujemy superponując rozwiązanie dla stanu bezmomentowego (5.1) z rozwiązaniem genero-

wanym przez równanie różniczkowe (4.7)₁ (lub (4.7)₂). Po wykorzystaniu (1.4) i wprowadzeniu nowych stałych całkowania C_1, C_2, C_3 otrzymujemy wzory

$$\begin{aligned}
 Q &= Rpe^{-\xi\omega} \{C_1 [\kappa_2 \sin \eta\omega - \sigma^2 \sin (\eta\omega - 2\tau)] + \\
 &\quad + C_2 [\kappa_2 \cos \eta\omega - \sigma^2 \cos (\eta\omega - 2\tau)]\}, \\
 N_1 &= -Rp \left\langle \cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} + \sigma e^{-\xi\omega} \{C_1 [\kappa_2 \sin (\eta\omega - \tau) + \right. \\
 &\quad \left. - \sigma^2 \sin (\eta\omega - 3\tau)] + C_2 [\kappa_2 \cos (\eta\omega - \tau) - \sigma^2 \cos (\eta\omega - 3\tau)]\} \right\rangle, \\
 N_2 &= -Rp \left\langle \frac{1}{1 + \cos \varphi} + e^{-\xi\omega} \operatorname{ctg} \varphi \{C_1 [\kappa_2 \sin \eta\omega + \right. \\
 &\quad \left. - \sigma^2 \sin (\eta\omega - 2\tau)] + C_2 [\kappa_2 \cos \eta\omega - \sigma^2 \cos (\eta\omega - 2\tau)]\} \right\rangle, \\
 M &= (\kappa_2 - \bar{\nu}) R^2 p e^{-\xi\omega} (C_1 \sin \eta\omega + C_2 \cos \eta\omega), \\
 M_1 &= R^2 p e^{-\xi\omega} \{C_1 [\operatorname{ctg} \varphi \sin \eta\omega + \bar{\nu} \sigma \sin (\eta\omega - \tau)] + \\
 &\quad + C_2 [\operatorname{ctg} \varphi \cos \eta\omega + \bar{\nu} \sigma \cos (\eta\omega - \tau)]\}, \\
 M_2 &= R^2 p e^{-\xi\omega} \{C_1 [\bar{\nu} \operatorname{ctg} \varphi \sin \eta\omega + \sigma \sin (\eta\omega - \tau)] + \\
 &\quad + C_2 [\bar{\nu} \operatorname{ctg} \varphi \cos \eta\omega + \sigma \cos (\eta\omega - \tau)]\}, \\
 (5.2) \quad v &= \frac{R^2 p (1 + \bar{\nu})}{\delta \bar{E}} \left\langle \left[C_3 + \ln (1 + \cos \varphi) - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right] \sin \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-\xi\omega} \{C_1 [\kappa_2 \sin \eta\omega - \sigma^2 \sin (\eta\omega - 2\tau)] + \right. \\
 &\quad \left. + C_2 [\kappa_2 \cos \eta\omega - \sigma^2 \cos (\eta\omega - 2\tau)]\} \right\rangle, \\
 w &= \frac{R^2 p}{\delta \bar{E}} \left\langle [(1 + \bar{\nu}) \ln (1 + \cos \varphi) + 1 + (1 + \bar{\nu}) C_3] \cos \varphi + \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \bar{\nu}) + e^{-\xi\omega} \{C_1 [\sigma \kappa_2 \sin (\eta\omega - \tau) - \sigma^3 \sin (\eta\omega - 3\tau) + \right. \\
 &\quad \left. + \kappa_2 \operatorname{ctg} \varphi \sin \eta\omega - \sigma^2 \operatorname{ctg} \varphi \sin (\eta\omega - 2\tau)] + \right. \\
 &\quad \left. + C_2 [\sigma \kappa_2 \cos (\eta\omega - \tau) - \sigma^3 \cos (\eta\omega - 3\tau) + \right. \\
 &\quad \left. + \kappa_2 \operatorname{ctg} \varphi \cos \eta\omega - \sigma^2 \operatorname{ctg} \varphi \cos (\eta\omega - 2\tau)]\} \right\rangle, \\
 \theta &= \frac{R^3 p}{\bar{D}} \left\{ e^{-\xi\omega} [C_1 \sin \eta\omega + C_2 \cos \eta\omega] - \frac{(2 + \bar{\nu}) \delta^2}{12 (1 - \bar{\nu}^2) R^2} \sin \varphi \right\}.
 \end{aligned}$$

Wzory (5.2) wykazują pełną analogię z odpowiednimi wzorami otrzymanymi za pomocą metody zaburzeń brzegowych dla izotropowych powłok sferycznych o strukturze ciągłej.

Na podstawie (5.2), (2.1) oraz (1.6) można łatwo otrzymać wzory na rzeczywiste składowe siły wewnętrznych w środkowych przekrojach elementów ustroju. Wzorów tych nie zamieszczamy, ponieważ różnią się one od wzorów (5.2)₁₋₆ tylko czynnikiem $l_{(\Delta)}$ ($\Delta = I$ lub $\Delta = II$).

Stałe C_1, C_2, C_3 wyznaczamy z warunków podparcia powłoki.

6. PRZYKŁADY LICZBOWE

Na podstawie wyprowadzonych w punktach 3 i 5 wzorów na siły i przemieszczenia, występujące w powłoce oraz wzorów na stałe całkowania opracowano programy w języku Fortran i przykłady, przyjmując następujące dane liczbowe:

$$E=3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \nu=0,16667, \quad \delta=0,08 \text{ m}, \\ \rho=50000 \text{ N/m}^3, \quad R_0=15 \text{ m}, \quad \zeta=0,3,$$

gdzie R_0 oznacza połowę rozpiętości powłoki, ζ wyniosłość, tzn. stosunek wysokości powłoki do $2R_0$.

Obliczenia wykonano na maszynie cyfrowej Odra 1304.

Rozważono dwa rodzaje podparcia powłoki: przegubowe (1) i pełne utwierdzenie (2); każdy dla dwu gęstości południków i równoleżników: $N_r=20$, $N_p=95$; $N_r=40$, $N_p=200$ (N_r oznacza liczbę równoleżników, N_p liczbę południków siatki ustroju) oraz dla wartości parametrów: $\mu_{(I)}=\mu_{(II)}=0,2$, $\mu_{(I)}=\mu_{(II)}=0,09$.

W celu porównania rozwiązania przybliżonego przedstawionego w punkcie 5 pracy z rozwiązaniem formalnie ścisłym (za pomocą rzeczywistych szeregów potęgowych) przeprowadzono w obu przypadkach obliczenia przy wyżej wymienionych parametrach ustroju. Otrzymane liczby porównano również z wynikami rozwiązania dla powłok sferycznych o strukturze ciągłej [5], przy czym przyjęto w tamtym przypadku zastępczy moduł sprężystości Younga i współczynnik Poissona w postaci $\mu_{(I)} E$ i $\mu_{(I)} \nu$. Odniesione do jednostki długości przekroju środkowej powierzchni powłoki siły N_2 , M_2 i Q pomnożono przez $l_{(I)}$, a siły N_1 i M_1 przez $l_{(II)}$ (znaczenie $l_{(A)}$, $A=I, II$ wyjaśniono na rys. 1).

Ze względu na fakt dużego podobieństwa teorii powłok perforowanych i ciągłych, jak również na możliwość iterowanego przejścia granicznego ($l_{(A)}=0$, $\mu_{(A)}=1$) od teorii sferycznych powłok perforowanych do teorii powłok o strukturze ciągłej porównanie powyższe wydaje się być interesujące.

Podano dwa przykłady dla powłoki ortotropowej (podparcie przegubowe i utwierdzenie) przy następujących parametrach:

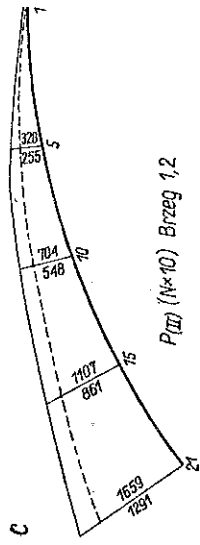
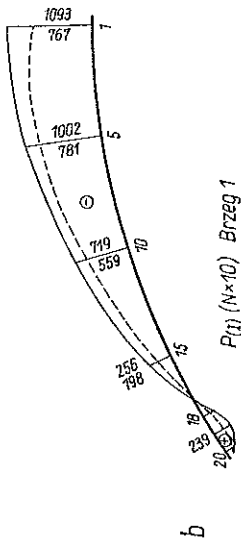
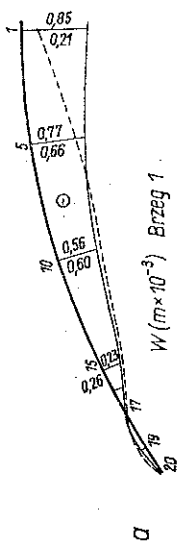
$$\mu_{(I)}=0,2, \quad \mu_{(II)}=0,1, \quad N_r=20, \quad N_p=95.$$

W obliczeniach przyjęto, że brzeg powłoki przechodzi przez środkowe przekroje elementów południkowych.

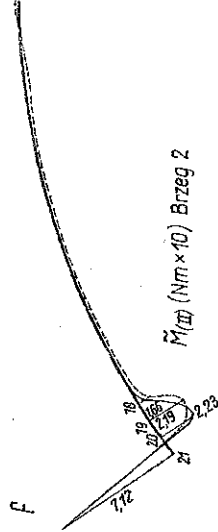
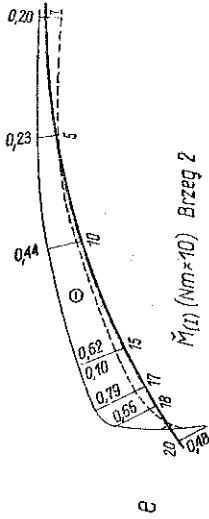
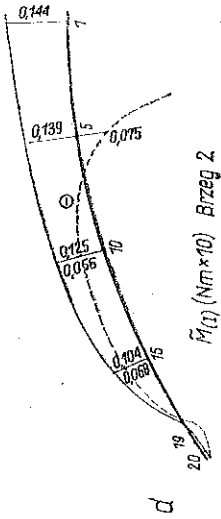
Na podstawie przykładów wykazano, że przyjęcie brzegu w węzłach ustroju ma niewielki wpływ na naprężenia. Mały wpływ na naprężenia ma również niewielka zmiana liczby N_p południków siatki ustroju.

W funkcjach wyrażonych za pomocą szeregów potęgowych uwzględniono taką skończoną liczbę wyrazów, aby wartość bezwzględna ostatniego wyrazu była mniejsza od danego ε (10^{-6} ; 10^{-8}).

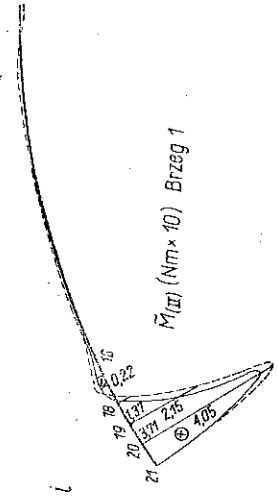
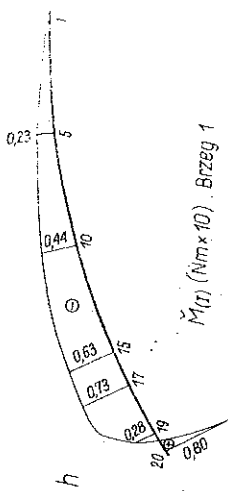
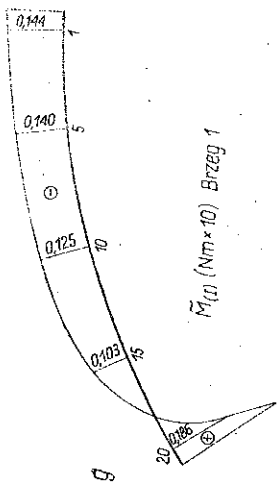
Przebieg zmienności sił wewnętrznych i przemieszczeń w i v pokazano na wykresach (rys. 3, 4, 5 i 6), przy czym podano je dla rozwiązania formalnie ścisłego. Linia ciągła dotyczy przypadku $\mu_{(I)}=\mu_{(II)}=0,2$, $N_r=20$, $N_p=95$, natomiast linia



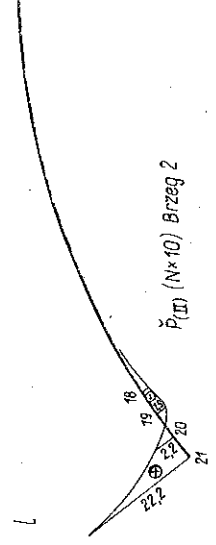
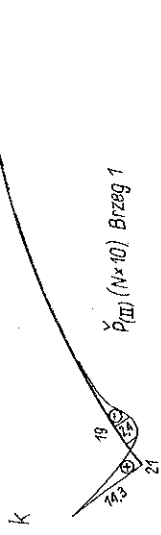
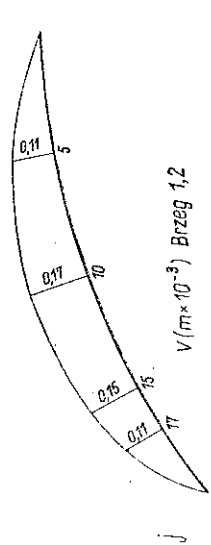
Rys. 3. Wykresy sił wewnętrznych i przemieszczeń



Rys. 4. Wykresy sił wewnętrznych i przemieszczeń



Rys. 5. Wykres sił wewnętrznych i przemieszczeń



Rys. 6. Wykresy sił wewnętrznych i przemieszczeń

przerywana przypadku $\mu_I = 0,2$, $\mu_{II} = 0,1$, $N_r = 20$, $N_p = 95$; «brzeg 1» oznacza podparcie przegubowe, «brzeg 2» — utwierdzenie.

Różnice między wartościami uzyskanymi z rozwiązania ścisłego (punkt 3), przybliżonego (punkt 5) i dla zastępczej powłoki ciągłej nie przekraczają 0,1% dla sił $P_{(II)}$ i 0,5% dla sił $P_{(I)}$, oraz przemieszczeń w (dotyczy ekstremalnych wartości tych wielkości). Nieco większe rozbieżności występują w przypadku momentów zginających: od 10% dla mniejszej gęstości siatki perforacji do 2% dla większej gęstości siatki, przy czym wartości momentu $\tilde{M}_{(II)}$ uzyskane na podstawie metody zaburzeń brzegowych są dokładniejsze od wartości przy aproksymacji ustroju powłoką ciągłą. Momenty $\tilde{M}_{(I)}$ i $\tilde{M}_{(II)}$ mają mniejszy wpływ na stan naprężenia się powłoki.

7. WNIOSKI

Z przedstawionych w punkcie 6 przykładów można wnioskować, że praca statyczna sferycznej powłoki perforowanej jest podobna do pracy statycznej powłoki sferycznej o strukturze ciągłej.

Stwierdzono występowanie efektu brzegowego, którego zasięg jest większy niż w powłoce ciągłej.

Wraz ze wzrostem gęstości siatki perforacji maleje do zera moment polarny $\tilde{M}_{(I)}$, a wartości pozostałych wielkości uzyskane z rozwiązania dla powłoki zastępczej zbliżają się do wartości otrzymanych z rozwiązania ścisłego. Zatem w przypadku odpowiednio dużej gęstości siatki elementów ustroju możliwa jest aproksymacja powłoki perforowanej powłoką o strukturze ciągłej.

Zastosowanie metody zaburzeń brzegowych i uproszczeń typu Geckelera równań Reissnera do powłoki perforowanej jest możliwe i prowadzi do wyników praktycznie zgodnych ze ścisłymi. Zgodność ta wzrasta wraz ze wzrostem gęstości siatki perforacji.

Przedstawione w pracy algorytmy rozwiązania zezwalają na wyznaczenie wielkości statycznych i geometrycznych w sferycznej powłoce perforowanej o jednym lub dwu brzegach przy różnych rodzajach ich podparcia i dla różnych obrotowo-symetrycznych obciążeń.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. CZ. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
2. Z. MAZURKIEWICZ, R. NAGÓRSKI, *On equations of net shells of revolution subjected to rotationally-symmetric loads*, Arch. Mech. Stos., **30**, 3, 1978.
3. Z. MAZURKIEWICZ, R. NAGÓRSKI, *On field equations for lattice shells subject to axially-symmetric load*, Bull. Acad. Pol. Sci., Série Sci. tech., **26**, 1, 1978.
4. Z. MAZURKIEWICZ, R. NAGÓRSKI, *O równaniach powłok obrotowych obciążonych obrotowo-symetrycznie*, Arch. Inż. Łąd., **24**, 1, 1978.
5. W. FLÜGGE, *Powłoki. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1972.
6. R. NAGÓRSKI, *Zginanie powłoki sferycznej obciążonej ciężarem własnym*, Rozpr. Inżyn., **25**, 3, 1977

Резюме

ИЗГИБ СФЕРИЧЕСКОЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБОЛОЧКИ НАГРУЖЕННОЙ
ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИМ ОБЗОМОМ

В работе рассмотрена задача изгиба сферической, упругой перфорированной оболочки с плотной сеткой, состоящей из двух семейств элементов (меридиональных и широтных).

При помощи степенных рядов получено формальное точное решение уравнений типа Рейсснера, выведенное в работе [2] на основе теории Ч. Возняка [1]. Получено также решение соответственно упрощенных уравнений, опираясь на метод граничных возмущений.

Приведен пример оболочки с одним краем, нагруженной собственным весом. Результаты точного и приближенного решений сравнены с результатами для оболочки со сплошной структурой.

SUMMARY

BENDING OF A SPHERICAL PERFORATED SHELL UNDER A ROTATIONAL
SYMMETRIC LOAD

The paper deals with the problem of bending of a spherical, elastic, perforated shell of a dense net composed of two families of elements (meridional and latitudinal).

By means of power series, a formally rigorous solution was achieved to Reissner type equations that were derived in [2] basing on the theory of C. WOŹNIAK [1]. A solution of suitably simplified equations was obtained as well basing on the method of boundary perturbations.

An example was given of a one-edged shell loaded by its own weight. Results yielded by the exact solutions and the approximate one were compared with the corresponding results for a shell of continuous structure.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1978 r.
