

HYDRODYNAMICZNA TEORIA FILTROWANIA CIECZY Z REOLOGICZNYMI ANOMALIAMI

W. M. JENTOW (MOSKWA)

Referat niniejszy jest przeglądem prac autora i jego współpracowników; prac poświęconych teorii filtrowania cieczy, w których występują reologiczne anomalie. Wyniki prac są wykorzystywane w przemyśle naftowym, gdyż anomalie reologiczne uwidaczniają się w zachowaniu ropy naftowej w obszarze małych prędkości ścinania. Dla opisu filtrowania cieczy z takimi anomaliami wykorzystuje się nieliniowe prawo filtrowania, w szczególności prawo filtrowania z granicznym gradientem. Jako przykłady rozpatrzono przepływ w elemencie prostokątnej siatki szybów (źródła i spływów), a także zagadnienie wypierania ropy naftowej przez wodę z tworzeniem się zjawiska calizn, tj. obszarów nieruchomej, niewypartej cieczy.

1. Teoria filtrowania cieczy, w których występują anomalie, tj. cieczy reologicznie złożonych, intensywnie rozwijała się w Związku Radzieckim w ostatnim dziesięcioleciu, głównie w związku z potrzebami przemysłu naftowego, który stanął wobec konieczności eksploatacji złóż ropy naftowej z anomaliami reologicznymi. Zasługa podjęcia tych badań należy do A. Ch. Mirzadzhanzadego.

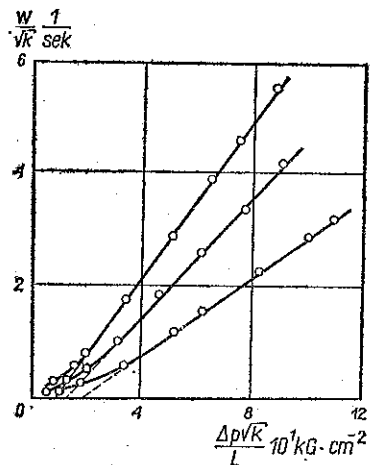
2. Omawiane reologiczne anomalie zwykle uwidaczniają się w pseudoplastycznym zachowaniu się ropy naftowej w obszarze małych prędkości ścinania. Przy ruchu w ośrodku porowatym prowadzi to do obniżenia ruchliwości przy małych prędkościach filtrowania (rys. 1). Dlatego też dalej dla opisu filtrowania cieczy z anomaliami wykorzystuje się nieliniowe prawo filtrowania

$$(2.1) \text{ grad } H = -\Phi(w)w/w, \quad H = (k/\mu)(p + \rho gz),$$

a w szczególności prawo filtrowania z granicznym gradientem

$$(2.2) \quad \Phi(w) = w + \lambda, \quad \lambda = kG/\mu,$$

które modeluje graniczny przypadek pseudo plastycznego zachowania się. Referat nasz jest poświęcony przedstawieniu wyników matematycznej teorii filtrowania z nieliniowym prawem filtrowania (2.1) lub w szczególnym przypadku (2.2). Interesujący się fizyczną naturą nielinio-



Rys. 1

wości mogą skorzystać z prac przeglądowych [1-4], gdzie wskazana jest obszerna literatura. Podstawowe rezultaty odnoszą się do płaskiego zagadnienia nieliniowego filtrowania nieściśliwej cieczy. W tym przypadku napór H i prędkość filtrowania w spełniają równanie (2.1) i równanie ciągłości

$$(2.3) \quad \operatorname{div} w = 0.$$

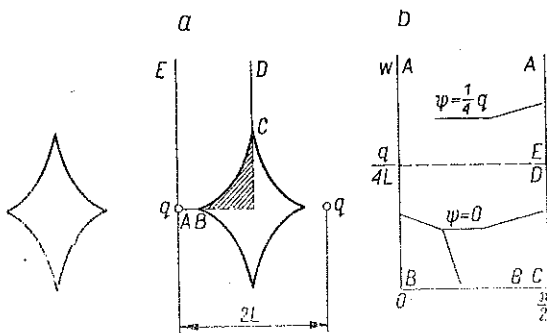
Wprowadzając, jak zwykle, funkcję prądu ψ i przyjmując jako nowe niezależne moduł w prędkości filtrowania i kąt θ między osią x i wektorem prędkości filtrowania, otrzymamy dla $\psi(w, \theta)$ równanie

$$(2.4) \quad \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\Phi^2}{w\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) + \frac{\Phi}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0.$$

W ten sposób na płaszczyźnie hodografu w, θ znalezienie funkcji prądu sprowadza się do rozwiązania zagadnienia brzegowego dla liniowego, eliptycznego równania drugiego rzędu (2.4). Kolejny powrót do wyjściowych zmiennych przeprowadza się przez całkowanie równania

$$(2.5) \quad dz = dx + idy = \left(\frac{\cos \theta}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) dw + \\ + \left(\frac{\cos \theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} - \frac{\sin \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta + i \left(\frac{\cos \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} - \right. \\ \left. - \frac{\sin \theta}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) dw + i \left(\frac{\sin \theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\cos \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta.$$

Konkretna realizacja tego ogólnego podejścia, zapoczątkowanego wskazaną przez S. A. CHRISTIANOWICZA [5] głęboką analogią równań teorii filtrowania i dynamiki gazowej, zależy od początku od postaci filtrowania $\Phi(w)$ i od typu zagadnienia brzegowego w płaszczyźnie hodografu. Przytoczone niżej przykłady odnoszą się wyłącznie do filtrowania z granicznym gradientem ($\Phi = w + \lambda$). W tym przypadku



Rys. 2

zagadnienie dodatkowo komplikuje się tym, że w pewnej nieznannej wcześniej części obszaru przepływu (tzw. strefie stagnacji) gradient ciśnienia nie przewyższa wartości granicznej i ruchu nie ma (rys. 2):

$$(2.6) \quad (|\operatorname{grad} H| < \lambda) \Rightarrow w = 0.$$

Dodatkowa przewaga wykorzystania przekształcenia hodografu w tym przypadku leży w tym, że nieznana granica strefy stagnacji przekształca się w odcinek linii płaszczyzny hodografu $w=0$. Na rys. 2 pokazano odwzorowanie na płaszczyźnie hodografu elementu symetrii przepływu stwarzanego łańcuchem równowydajnych źródeł (szybów); odpowiednie warunki brzegowe są pokazane na rysunku. Równanie (2.4) dla filtrowania z granicznym gradientem przyjmuje postać

$$(2.7) \quad w(w+\lambda) \psi_{,ww} + (w-\lambda) \psi_{,w} + \psi, \theta\theta=0.$$

Dla znalezienia jego rozwiązań w półpaśmie $w \geq 0, 0 \leq \theta \leq \theta_0$ wygodnie jest wykorzystać parę przekształceń całkowych [6 i 3]

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \psi^*(S, \theta) &= \int_0^\infty F(S, -u) (1+u) \psi(u, \theta) du, \quad u=w/\lambda; \\ \psi(u, \theta) &= \frac{1}{2} u^2 \int_0^\infty \frac{s^3 (1+s^2)}{th\pi S} F(S, -u) \psi^*(S, u) ds, \\ F(S, u) &= F(2+is, \quad 2-is, \quad 3, -u). \end{aligned}$$

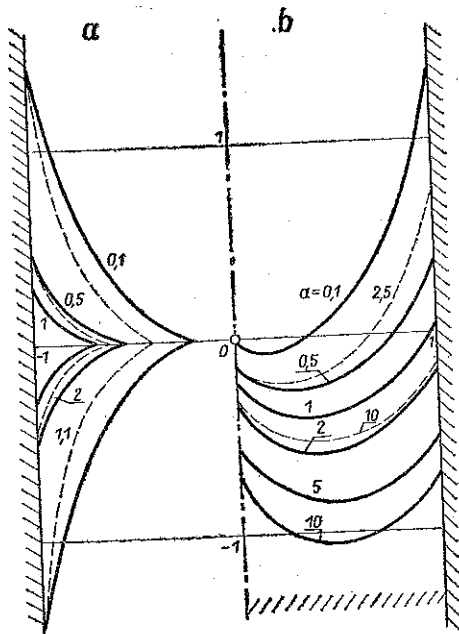
Zastosowanie całkowego przekształcenia (2.8) do równania (2.7) przeprowadza je w zwyczajne równanie różniczkowe

$$(2.9) \quad \frac{d^2 \psi^*(S, \theta)}{d\theta^2} - S^2 \psi^*(S, \theta) = -2\psi(0, \theta)$$

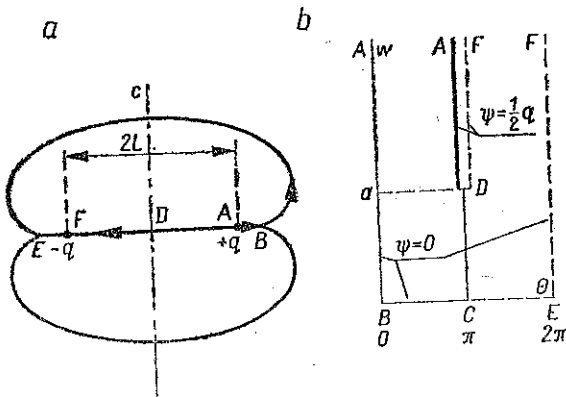
i dalsza technika znalezienia rozwiązania w przypadku zagadnień brzegowych typu pokazanego na rys. 2, jest dostatecznie oczywista.

3. W ten sposób otrzymano rezultaty (rys. 3), gdzie liniami ciągłymi pokazano położenie granic stref stagnacji w elemencie symetrii przepływu dla strumienia stwarzanego łańcuchem szybów w nieograniczonym «złożu» i takim samym łańcuchem w pobliżu nieprzepuszczalnej granicy. Szeroki wachlarz zagadnień nieliniowego filtrowania prowadzi do konieczności budowania rozwiązania pierwszego zagadnienia brzegowego dla równania (2.7) w obszarze, który ma postać półpasma z rozcięciem (rys. 4). Te zagadnienia udaje się sprowadzić do pary równań całkowych, a następnie do równań Fredholma i efektywnie rozwiązać wykorzystując metodę małego parametru. Wachlarz zagadnień rozwiązywanych za pomocą przekształcenia hodografu może być istotnie poszerzony, jeżeli rozpatrywać bardziej złożone zagadnienia w płaszczyźnie hodografu. I tak szereg zagadnień wymaga rozpatrzenia wielopłatowych obszarów w płaszczyźnie hodografu prędkości [7 i 3] lub obszarów z krzywoliniowymi granicami.

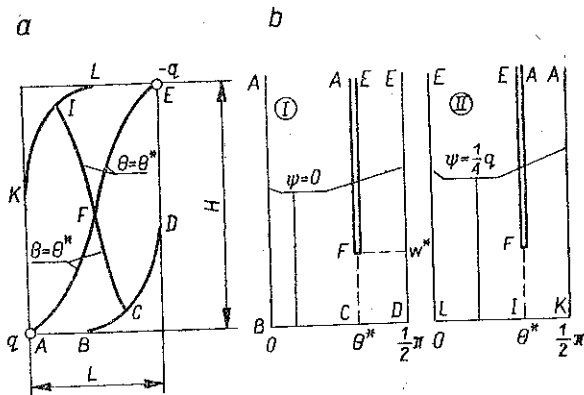
Jako przykład rozpatrzmy przepływ w elemencie prostokątnej siatki szybów (źródeł i splywów; rys. 5). Powstające «dwupłatowe» zagadnienie brzegowe może być sprowadzone do układu równań całkowych, ale układ może być też rozwiązywany bezpośrednio numeryczną metodą z kolejnym (numerycznym) powrotem do wyjściowych fizycznych zmiennych — zgodnie ze wzorami (2.5). Takie kojarzenie linearyzującego przekształcenia hodografu z rozwiązaniem numerycznym powstają-



Rys. 3



Rys. 4



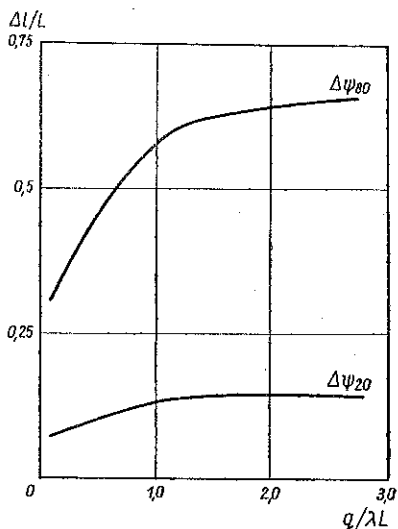
Rys. 5

cego zagadnienia brzegowego okazuje się bardzo efektywne i pozwala prowadzić wielowariantowe obliczenia o dużej ilości informacji. Przy tym okazuje się, że dla przepływów z granicznym gradientem ciśnienia charakterystyczne jest nie tylko tworzenie się stref stagnacji, lecz i w ogóle nagłe wzmocnienie nierównomierności przepływu.

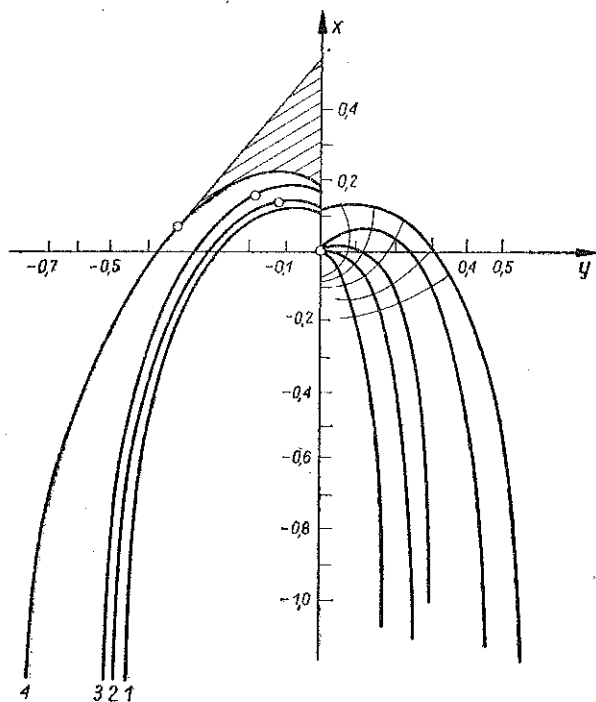
Na rys. 6 pokazano jak zależy od natężenia strumienia $q/\lambda L$ względna szerokość rurki prądu, przez którą przechodzi 20 i 80% całego filtrowanego strumienia przez element kwadratowej siatki źródeł i sływów [8]. To podejście jest także efektywne przy obliczeniach filtrowanych przepływów bez naporu. W tym przypadku powierzchnia swobodna (krzywa depresji) odwzorowuje się w linię

$$(3.1) \quad \Phi(w) + C \sin \theta = 0, \quad C = k\rho g/\mu$$

płaszczyzny w, θ [5] i zagadnienie brzegowe w płaszczyźnie hodografu powinno być rozwiązywane w obszarze z krzywoliniowym odcinkiem granicy.



Rys. 6



Rys. 7

Jako charakterystyczny przykład na rys. 7 pokazano obraz przepływu wytworzonego przez punktowe źródło, położone w płaszczyźnie prostopadłej, przy różnych wartościach względnego granicznego gradientu ciśnienia

$$(3.2) \quad \bar{\lambda} = \lambda/C.$$

Oprócz dostatecznie naturalnego poszerzenia strumienia w miarę wzrostu granicznego gradientu obserwuje się też paradoksalne na pierwszy rzut oka tworzenie się stref stagnacji «nad» powierzchnią swobodną (zakreskowany obszar na rys. 7). Rzecz w tym, że w warunkach filtrowania z granicznym gradientem ruch wzdłuż powierzchni swobodnej zaczyna się tylko wtedy, gdy nachylenie jej przewyższa względny graniczny gradient ciśnienia.

4. Znacznie mniej są rozwinięte inne rozdziały teorii filtrowania anomalnych cieczy, gdzie nie ma możliwości wykorzystania linearyzującego przekształcenia hodo grafu i bezpośrednio powinno być rozpatrywane nieliniowe zagadnienie w zmiennych fizycznych. Pewną pomoc przy rozpatrywaniu stacjonarnych przepływów może okazać wariacyjny sformułowanie zagadnienia nieliniowego filtrowania.

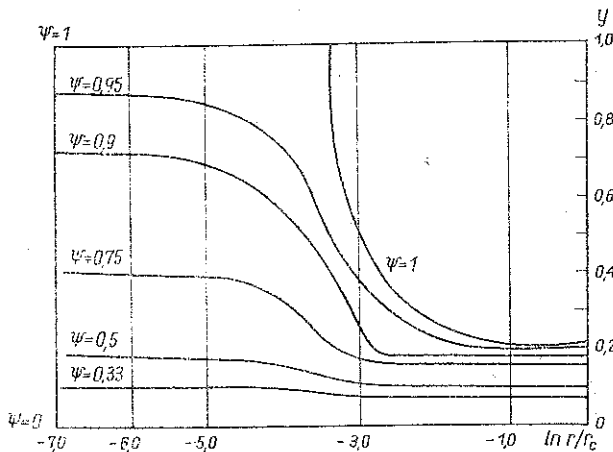
Jeżeli w każdym punkcie M ośrodka porowatego (ogólnie mówiąc niejednorodnego) ruch odbywa się zgodnie z prawem filtrowania typu

$$(4.1) \quad \text{grad } H = -\Phi(w, M) w/w + g,$$

to rzeczywiste pole prędkości w , spełniające dane warunki brzegowe, prowadzi do minimum funkcjonału

$$(4.2) \quad D = \int \int \int_V \left[\int_0^w \Phi(w, \mu) dw - gw \right] dV.$$

Tutaj g oznacza wektor (ogólnie mówiąc — niepotencjalny) bezwymiarowych sił masowych. Można podać też odpowiednią dodatkową zasadę wariacyjną [3]. Możliwość wariacyjnego sformułowania pozwala wykorzystać dla rozwiązania od-



Rys. 8

powiednich zagadnień bezpośrednie wariacyjne metody skończonych elementów i lokalnych wariacji. Na rys. 8 w postaci rodziny linii prądu ψ w płaszczyźnie południkowej pokazano obraz przepływu w pobliżu szybu w warstwowo-niejednorodnym złożu przy ruchu z granicznym gradientem. Tutaj znów wyraźnie uwidacznia się typowy obraz «wzróżnienia» niejednorodności strumienia ze względu na występowanie granicznego gradientu ciśnienia. Charakterystyczne jest skupienie strumienia z daleka od szybu w warstwie z największą przepuszczalnością.

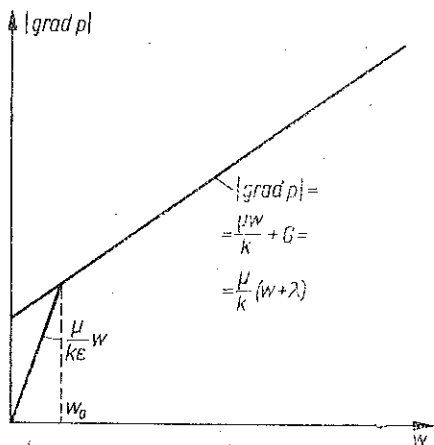
5. Jest rzeczą naturalną, że oddziaływanie niejednorodności strumienia wzdłuż miąższości złoża z niejednorodnością strumienia w płaszczyźnie powinno rodzić przy nieliniowym filtrowaniu złożone trójwymiarowe przepływy. Realne możliwości

analizy takich przepływów otwierają asymptotyczne metody oparte na uśrednieniu równań ruchu po miąższości złoża. Przytem rozkład ciśnienia po miąższości złoża zakłada się jako hydrostatyczny; co jest równoważne założeniu o cienkości złoża. Uważając ruch w każdym z pokładów za zgodny z prawem filtrowania z granicznym gradientem dla uśrednionego ruchu, otrzymujemy płaskie zagadnienie nieliniowego filtrowania odcinkami z liniowym prawem filtrowania $\Phi(w)$. Na rys. 9 pokazano «uśrednione prawo filtrowania» dla dwuwarstwowego złoża w mniej przepuszczalnym pokładzie, którego efekty granicznego gradientu należy uwzględnić. W tym przypadku

$$(5.1) \quad \Phi(w) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} w, & w < w_0; \\ w + \lambda, & w > w_0, \end{cases} \quad \varepsilon = \frac{w^0}{w^0 + \lambda}.$$

Symbol w oznacza średnią po miąższości złoża prędkość filtrowania. Jest sprawą naturalną, że duża różnorodność otrzymywanych przy takim uśrednieniu «efektywnych» praw filtrowania zmusza do szukania prostych przybliżonych sposobów obliczania możliwych wyników takiej nieliniowości. Określone rezultaty udaje się osiągnąć metodą kojarzonych asymptotycznych rozkładów. Idea metody polega na tym, że «zewnątrzne» zagadnienie, całkowicie uwzględniające złożoną geometrię przepływu, jest rozwiązywane dla uproszczonego prawa filtrowania, a «pełne» nieliniowe prawo filtrowania jest rozpatrywane tylko w pobliżu punktów osobliwych, gdzie geometria strumienia jest stosunkowo prosta.

Dla «uśrednionego» prawa filtrowania typu (5.1) przy przepływie w elemencie kwadratowej siatki szybów, strefy stagnacji, które się tworzą w mniej przepuszczal-



Rys. 9

nym pokładzie, mają w płaszczyźnie kołową formę a dla ich promienia mamy przybliżony wzór

$$(5.2) \quad R' = Al, \quad A = \frac{3}{2} \frac{(\lambda + w_0) F\left(1, 2, 5, \frac{\lambda}{w_0 + \lambda}\right) + w_0 F\left(1, 3, 5, \frac{\lambda}{w_0 + \lambda}\right)}{F\left(1, 2, 5, \frac{\lambda}{w_0 + \lambda}\right) + F\left(1, 3, 5, \frac{\lambda}{w_0 + \lambda}\right)},$$

gdzie l oznacza połówkę rozległości strefy stagnacji, obliczonej według teorii filtrowania z granicznym gradientem. Obliczenia według tego wzoru dobrze zgadzają się z rezultatami bezpośredniego numerycznego rachunku.

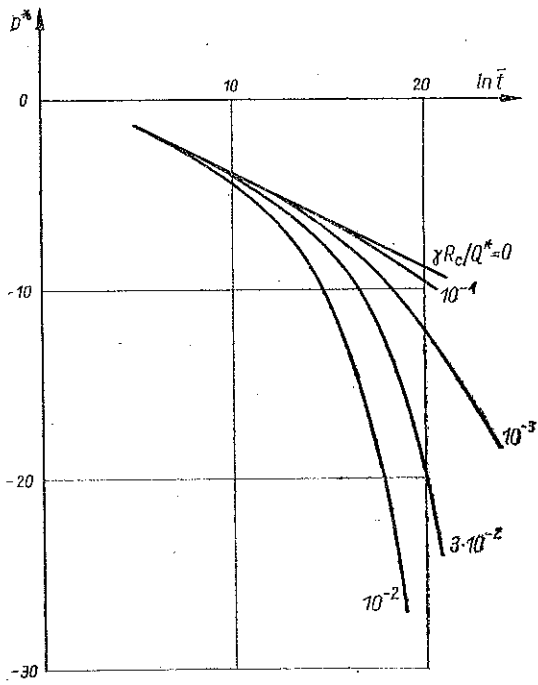
6. Z kolei zatrzymamy się na krótko przy teorii nieustalonych ruchów przy filtrowaniu z granicznym gradientem. Przy założeniu, że ciecz i złoża są sprężyste odkształcalne-«sprężysty reżim», rozkład ciśnienia w złożu opisuje się nieliniowym parabolicznym równaniem

$$(6.1) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} \left[\psi (|\operatorname{grad} p|) \frac{\operatorname{grad} p}{|\operatorname{grad} p|} \right],$$

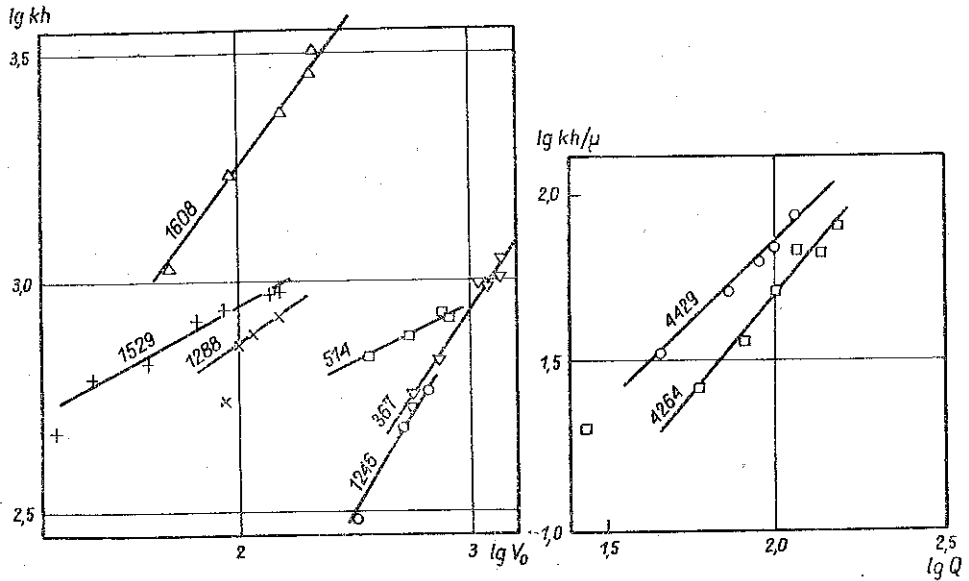
gdzie ψ oznacza funkcję odwrotną do $\Phi(w)$, wyrażającą zależność prędkości filtrowania od gradientu ciśnienia. Obserwacja przebiegu niestacjonarnych procesów jest podstawowym źródłem informacji o własnościach układu złóż. Zaburzenia przy tym zwykle są wytwarzane przez szyb, którego reżim pracy zmienia się. Najczęściej jest on włączony do pracy lub wyłączony po pracy — ze stacjonarną wydajnością. Wpływ granicznego gradientu na zmianę ciśnienia w szybie przy włączeniu go do pracy widać na rys. 9, gdzie $\bar{p} = \frac{2\pi kh p_c}{\mu Q}$, $t = \frac{4\kappa t}{r_c^2}$, $\gamma R_c / Q = \frac{2\pi kh Gr_c}{\mu Q}$, r_c — promień

otworu. «Odejszcie» krzywych od ogólnego początkowego liniowego odcinka, odpowiadającego liniowej teorii sprężystego reżimu, zaczyna się tym wcześniej i wyraża się tym silniej, czym jest większy względny graniczny gradient ciśnienia. Podobne efekty, lecz z mniej ostrymi przejściami między oddzielnymi odcinkami, obserwuje się w złożach warstwowych. Jeżeli interpretować wyniki badań szybów z pozycji zwykłej teorii sprężystego reżimu, to «efektywne hydroprzewodnictwo złoża» zależy, jak się okazuje, od wydajności, przy której prowadzono badanie. Do chwili obecnej nagromadzono dostateczną ilość doświadczalnych danych zgodnych z tym teoretycznym wnioskiem (rys. 10), gdzie pokazano zależność efektywnej hydroprzewodności $\left(\frac{kh}{\mu}\right)_{ef}$ od wydajności Q dla szeregu szybów.

Jakościową osobliwością filtrowania z granicznym gradientem ciśnienia jest to, że bez ruchu ciśnienie może być rozłożone w sposób niejednorodny; potrzeba tylko, aby była spełniona nierówność $|\operatorname{grad} p| \leq G$. Odpowiedź na pytanie, jaki mianowicie rozkład ciśnienia realizuje się, daje historia zmiany ciśnienia. Na tym opiera się metoda oceny granicznego gradientu ciśnienia zgodnie z przemysłowymi danymi [9]. W tej metodzie początkowo wstrzymuje się odbiór z szybu, śledzi zmiany ciśnienia i utrwała ustaloną wartość ciśnienia p' . Następnie do szybu pompuje się pewną



Rys. 10



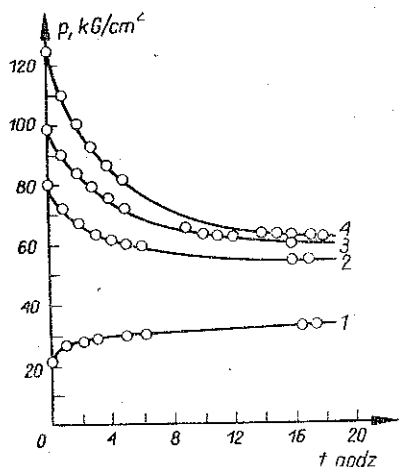
Rys. 11

ilość cieczy V i śledzi się zmiany ciśnienia w szybie do ustalenia p (rys. 11). Jeżeli ustalona wartość ciśnienia p'' jest zgodna z p' , to graniczny gradient znika; jeżeli $p'' > p'$, to można starać się ocenić G , przeprowadzając kolejno pompowania i wykorzystując wzór

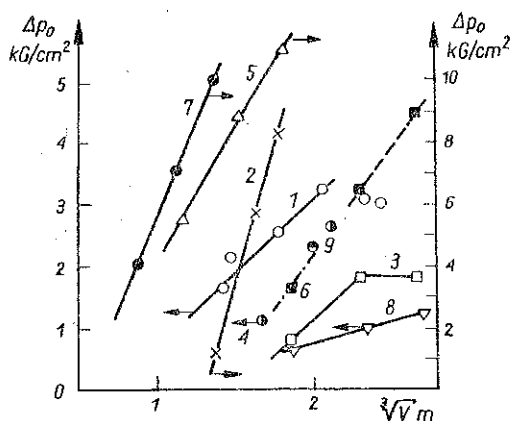
$$(6.2) \quad p'' - p' = \left(\frac{12V\kappa\mu}{\pi kh} G^2 \right)^{1/3},$$

(rezultaty podano na rys. 13, $\Delta p_0 = \frac{1}{2}(p'' - p')$).

Wszystkie wspomniane wyżej wyniki otrzymano dla jednowymiarowych przepływów lub dla prawie jednowymiarowych przepływów w warstwowych złożach. Interesujących efektów można oczekiwać analizując rozprzestrzenianie się niestacjonarnych zaburzeń na tle pewnego zewnętrznego strumienia. Najprościej można



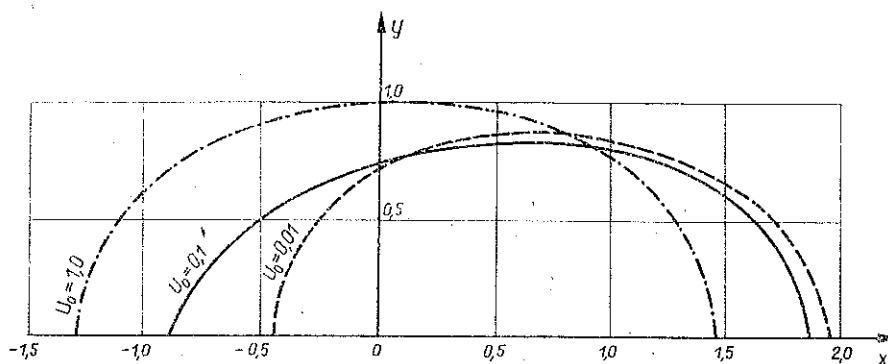
Rys. 12



Rys. 13

przekonać się o tym uważając zaburzenia za małe i otrzymując dla nich równania przez linearyzację równania (6.1) w pobliżu rozwiązania odpowiadającego niezaburzonemu strumieniowi.

W pewnym (niezlinearyzowanym) sformułowaniu zagadnienie powinno być rozwiązywane numerycznie. Otrzymane w ten sposób pewne wyniki przedstawiono niżej. Na rys. 14 pokazano linie różnych odchyłeń ciśnienia od pierwotnej wartości dla zaburzenia spowodowanego uruchomieniem szybu w obecności jednorodnego, «zewnętrznego» strumienia o prędkości U skierowanego wzdłuż osi O_x . Charakterystyczna ostra anizotropia rozprzestrzeniania się zaburzeń (przypomnijmy że samo złożo jest jednorodne i izotropowe) rośnie w miarę zmniejszania się natężenia pierwotnego strumienia $u_0 = U/\lambda$. Natomiast oddziaływanie zaburzeń z zewnętrznym strumieniem zmienia też charakter ciśnienia w zaburzającym szybie. Rys. 15, na którym porównano krzywe zmian ciśnienia bez nieliniowych efektów ($\lambda=0$), bez strumienia zewnętrznego ($U_0=0$) i przy strumieniach o różnym natężeniu, daje jasną informację o stopniu uwidocznienia i możliwym ich wpływie na interpretację danych badania szybów.



Rys. 14

7. Najbardziej złożonymi w sensie teoretycznym (i najbardziej ważnymi w sensie zastosowań) są badania wspólnego ruchu i wypierania dwóch nie mieszających się cieczy (np. wody i ropy), z których przynajmniej jedna ma anomalie reologiczne. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy w dalszych rozważaniach, że we własnościach ropy występują anomalie, przy czym może być ona rozpatrywana jako lepkoplastyczna ciecz, charakteryzująca się granicznym gradientem ścinania τ_0 . Do liczby parametrów charakteryzujących dwufazową równowagę w porowatym ośrodku zalicza się parametr

$$(7.1) \quad T = d\tau_0/\alpha$$

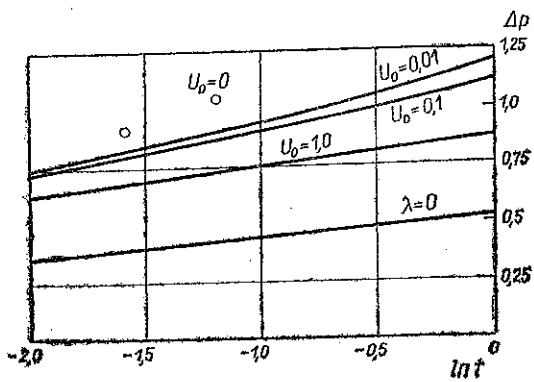
równy co do rzędu wielkości stosunkowi τ_0 do charakterystycznego ciśnienia kapilarnego w ośrodku porowatym (α oznacza międzyfazowe napięcie oraz d wewnętrzną skalę porowatej przestrzeni). Elementarna ocena wykazuje, że $T \ll 1$. To pozwala postulować niezależność położenia faz w porowatej przestrzeni od parametru T i przejść do następującego układu równań dwufazowego filtrowania lepkoplastycznych cieczy [10 i 3]:

$$\mathbf{u}_i = -\frac{k}{\mu_i} f_i(S) \left[1 - \frac{G_i(S)}{|\text{grad } p_i|} \right] \text{grad } p_i, \quad i=1, 2, \\ (|\text{grad } p_i| > G_i),$$

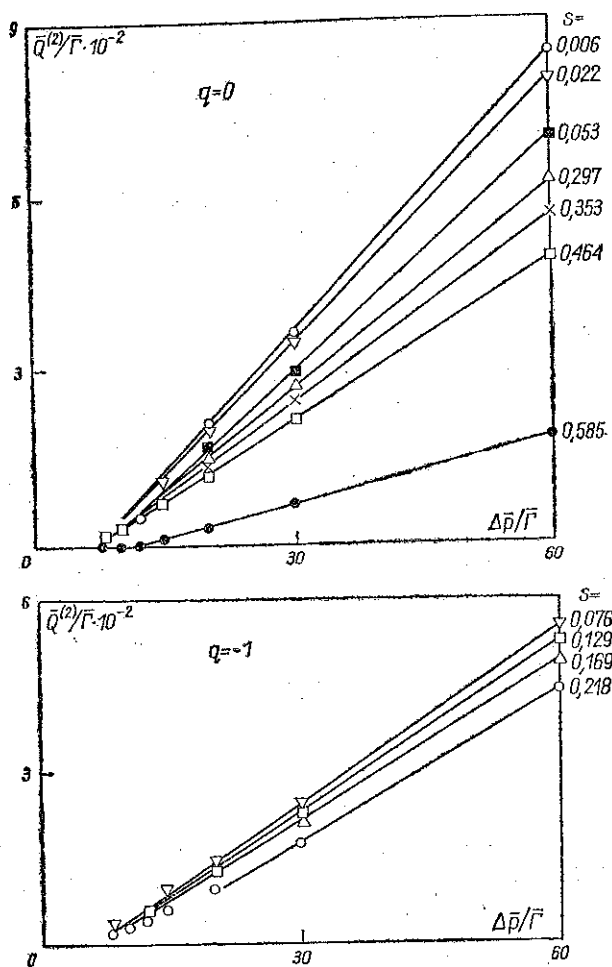
$$(7.2) \quad \mathbf{u}_i = 0, \quad (|\text{grad } p_i| < G_i); \quad p_2 - p_1 = J(S), \\ \text{div}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div } \mathbf{u}_1 = 0,$$

gdzie S oznacza nasycenie porowatej przestrzeni wodą, μ_i lepkości faz, p_i ciśnienia faz, G_i graniczny gradient ciśnienia dla danej fazy. Jeżeli jedna z faz jest cieczą Newtona, to odpowiedni graniczny gradient jest równy zeru.

Dany układ różni się od odpowiedniego układu równań dla cieczy Newtona tylko obecnością czynników $[1 - G_i/|\text{grad } p_i|]$ w równaniach dla strumieni; właśnie ta okoliczność wymaga eksperymentalnego sprawdzenia. Jedną z możliwości takiego



Rys. 15



Rys. 16

sprawdzenia polega na modelowaniu ruchu dwufazowego układu za pomocą siatki kapilar na maszynie cyfrowej [11 i 12]. Na rys. 15 pokazano otrzymane w ten sposób zależności {spadek ciśnienia — wydatek} dla wspólnego ruchu wody i lepkoplastycznej ropy. Te zależności w dostatecznym stopniu są zgodne z postulowaną postacią równań (7.2).

Na podstawie równań (7.2) łatwo zbadać, postępując analogicznie do teorii Buckleya-Leveretta, jednowymiarowe czołowe wypieranie lepkoplastycznej ropy za pomocą wody. Typowe wyniki takiego badania pokazano na rys. 17.

Najważniejszą różnicą od zagadnień wypierania «zwykłych» lepkich cieczy jest to, że wszystkie współczynniki wypierania, w szczególności współczynniki bezwodny η_0 i skończony η_∞ wydajności ropy, okazują się być zależne od prędkości wypierania, gwałtownie zmniejszając się, kiedy bezwymiarowa prędkość wypierania $\bar{u} = \frac{\mu_b U_H}{k_b G_H}$ (gdzie k_b, μ_b oznaczają przenikliwość i lepkość dla wody w przesuniętej strefie U — prędkość wypierania, G_H — graniczny gradient dla ropy), staje się mniejsza od jedności. Zmniejszenie prędkości sprzyja też destabilizacji frontu wypierania.

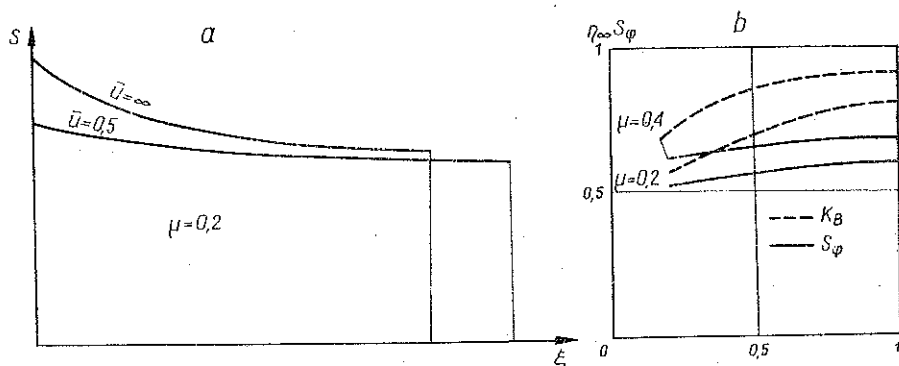
8. Niejednowymiarowe zagadnienia wypierania mogą być rozwiązane tylko numerycznie; rezultaty, które osiągnięto w tym kierunku są zgodne z ogólnymi tendencjami pokazanymi wyżej, jednakże chyba nie są dostateczne dla wyprowadzenia dalszych jakościowych wniosków. Jednakże w pełni udaje się zbadać końcową fazę wypierania lepkoplastycznej ropy przez wodę. Rzeczywiście, jeżeli przypuścić, że wypieranie trwało dostatecznie długo, to ropa okaże się wypartą całkowicie z tej części złoża, gdzie była ona w ruchu. Natomiast tam, gdzie nie był przekroczony graniczny gradient ciśnienia dla ropy i ropa nie poruszała się, pozostają «calizny»: obszary nieruchomej, niewypartej ropy. Można sformułować zagadnienie o maksymalnie możliwych wymiarach calizn. Dla takich graniczno-równowagowych calizn na granicy, tj. w strefie kontaktu nieruchomej ropy ze strumieniem wody, gradient ciśnienia powinien osiągnąć graniczną wartość (dla ropy!) W rezultacie dla obliczenia i określenia granic calizn otrzymujemy następujące zagadnienia brzegowe: ciśnienie w «wodnej» strefie spełnia równanie Laplace'a:

$$(8.1) \quad \Delta p = 0,$$

a na granicy z calizną spełnia dwa warunki brzegowe

$$(8.2) \quad \partial p / \partial n = 0, \quad |\partial p / \partial s| = G.$$

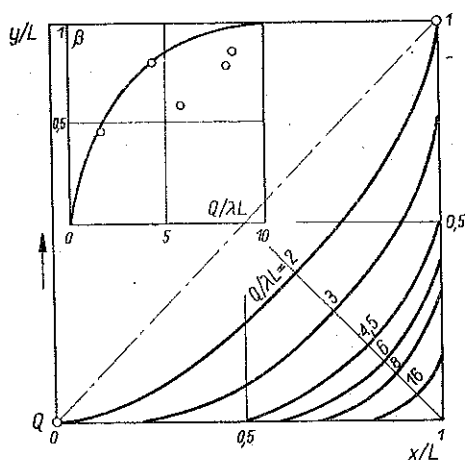
Inne warunki brzegowe są bez zmian. Zagadnienie brzegowe (8.1)–(8.2) zostało sformułowane po raz pierwszy przez M. G. ALISZAJEWA i in. [13] jako jeden z modeli filtrowania jednorodnej lepkoplastycznej cieczy i od tej pory intensywnie jest badane. Przytoczymy tylko jeden wynik [3] (rys. 18), gdzie jest pokazany kształt calizn w elemencie kwadratowej siatki szybów przy różnym natężeniu strumienia; tutaj natomiast pokazano zależność względnej płaszczyzny przemytej strefy β od natężenia strumienia. Punktami zaznaczono wyniki modelowania procesu wypierania z tworzeniem się calizn na szczelinowej rynnice Hele'a-Showa.



Rys. 17

9. Prosta analiza pokazuje, że przy wypieraniu lepkoplastycznej ropy przez wodę współczynniki wypierania jeszcze w większym stopniu niż w przypadku cieczy Newtona zależą od warstwowo-niejednorodnej budowy złoż. Dlatego też oceniając

zupełność wypierania ropy przez wodę z warstwowo-niejednorodnego złoża należy na ogół rozpatrzyć trójwymiarowe zagadnienie. Pewne możliwości obliczenia graniczo-równowagowych calizn w warstwowo-niejednorodnym złożu otwierają się przy stosowaniu wspomnianego wcześniej asymptotycznego podejścia, związanego z uśrednieniem przepływu po miąższości złoża. Przykładowy obraz rozmieszczenia calizn (zakreskowane obszary) pokazano na rys. 18; w ten sposób ruch wody ma miejsce w warstwie o schodkowo zmieniającej się grubości. Dlatego też dla uśrednionego «płaskiego» ruchu



Rys. 18

obszar przepływu okazuje się rozbity na strefy D_i , w każdej z których ciśnienie spełnia równanie Laplace'a:

$$(9.1) \quad \Delta p = 0,$$

a na granicach stref (rzutach granic calizn) są wypełnione nie tylko zwykłe warunki ciągłości ciśnienia i strumienia:

$$(9.2) \quad p^+ = p^-, \quad k^+ \frac{\partial p^+}{\partial n} = k^- \frac{\partial p^-}{\partial n},$$

lecz i dodatkowe warunki następujące:

$$(9.3) \quad \begin{aligned} |\text{grad } p^+| &= G_i & (i > 1), \\ |\text{grad } p^-| &= G_i & (i = 1); \end{aligned}$$

służące do znalezienia granic calizn. Znakiem (+) oznaczono tutaj graniczne wartości przy przybliżeniu do granicy z wnętrza obszaru, znakiem (-) przy przybliżeniu z zewnątrz. Pokłady uważa się za ponumerowane w porządku rosnących wartości granicznego gradientu.

W ten sposób przyszedłmy do nowego typu nieliniowych zagadnień z nieznanym brzegiem, których wcześniej najprawdopodobniej nie spotykano. Mimo że ogólne metody rozwiązania takich zagadnień nie są znane, udaje się wskazać pewne ich prostsze rozwiązania. I tak dla dwuwarstwowego złoża z $G_1=0$, $G_2=G$ mamy proste rozwiązanie postaci:

$$(9.4) \quad p = Ar^s \cos s\theta, \quad r < R, \quad p = (Br^s + Cr^{-s}) \cos s\theta, \quad r > R,$$

odpowiadające kołowej caliznie w płaszczyźnie o promieniu

$$(9.5) \quad R = (G/A_0)^{1/s-1}$$

w mniej przepuszczalnym pokładzie. Wykorzystując to elementarne rozwiązanie i technikę odpowiednio dobranych asymptotycznych rozkładów udaje się ocenić wymiary graniczno-równowagowych calizn, powstających w dwuwarstwowym złożu eksploatowanym przez kwadratową siatkę szybów. Dla ich promienia mamy przybliżony wzór

$$(9.6) \quad R'/L \approx 0,914 \left(1 + \frac{k^+ h^+}{k^- h^-} \right) \frac{\lambda L}{q},$$

przydatny dla dostatecznie małych $\lambda L/q$. Dalsze uściślenie może być osiągnięte przez sprowadzenie zagadnienia (9.1) i (9.3) do nieliniowych równań całkowych.

10. Na zakończenie pragnę podkreślić, że w tym, z konieczności pobieżnym, przeglądzie chciałem pokazać, że hydrodynamiczna teoria filtrowania anomalnych cieczy przedstawia szybko rozwijającą się dziedzinę, w której uzyskano już określone wyniki, ale w której występują również nie rozwiązane zagadnienia. Przytoczone przykłady są wzięte z prac wykonanych przez autora we współpracy z M. G. Bernadinerem, T. A. Małachową, M. G. Odiszarią i F. D. Turecką. Przykłady te jednakże nie wyczerpują tematu. W szczególności w tej pracy nie znalazły odbicia oryginalne wyniki prac M. G. Aliszajewa, S. W. Pańko, a także pracowników naukowych Uniwersytetu Kazańskiego: N. B. Iljińskiego, Ju. M. Mołokowicza, E. W. Skworcowa, Ju. A. Kornilcewa i innych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР, под ред. П. Я. Кочино, Наука, Москва 1939.
2. J. G. SAVINS, *Non-Newtonian flow through porous media*, Ind Eng. Chem., 61, 10, 18-47, 1969.
3. М. Г. Бернадинер, В. М. Енгов, *Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей*, Наука, Москва 1975.
4. В. М. Енгов, А. М. Полищук, *Движение аномальных жидкостей в пористой среде-II*, Сб. Реология (полимеры и нефть), Тр. Всесоюзной школы по реологии, 144-132, Новосибирск 1977.

5. С. А. Христианович, *Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси*, ПММ, 1, 4, 66-52, 1940.
6. В. М. Ентов, *Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение*, ПММ, 6, 62, 487-492, 1938.
7. В. М. Ентов, *Решение задач фильтрации с предельным градиентом в случае неоднородности отображения*, Изв. АН СССР, МЖГ, 1, 45-59, 1972.
8. В. М. Ентов, Ф. Д. Турецкая, *Численно-аналитическое решение задач фильтрации с предельным градиентом, отображающимся на двулистую поверхность плоскости годографа*, Изв. АН СССР, МЖГ, 1, 19-28, 1975.
9. В. М. Ентов, В. Н. Ильев, С. Д. Мустафасев, Н. Р. Рахимов, *Определение начального градиента давления при движении нефти в пластовых условиях*, Нефтяное хозяйство, 6, 56-55, 1971.
10. М. Г. Бернадинер, В. М. Ентов, *О взаимном вытеснении несмешивающихся жидкостей при нелинейной фильтрации*, МТФ, 2, 110-114, 1938.
11. I. FATI, *The network model of porous media*, Trans. AIME, I-III, 207, 144-181, 1956.
12. В. М. Ентов, А. Я. Фельдман, Э. Чен-Син, *Моделирование процесса капиллярного вытеснения в пористой среде*, Изв. АН СССР, Программирование, 6, 1975.
16. М. Г. Алишасев, Г. Вахитов, М. М. Гехтман, И. Ф. Глумов, *О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах*, Изв. АН СССР, МЖГ, 6, 133-139, 1933.

Резюме

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФИЛЬТРАЦИИ АНОМАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Настоящий доклад является обзором работ автора и его сотрудников, посвященных теории фильтрации аномальных жидкостей. Результат работы используется в нефтяной промышленности т.к. реологические аномалии проявляются в поведении нефти в области малых скоростей сдвига. Для описания фильтрации аномальных жидкостей используется нелинейный закон фильтрации, в частности закон фильтрации с предельным градиентом. Как примеры рассмотрены течение в элементе прямоугольной сетки скважин (источников и стоков), а также задача вытеснения нефти водой с образованием явлений цепиков, т.е. областей неподвижной невытесненной нефти.

SUMMARY

HYDRODYNAMIC THEORY OF FILTRATION OF ANOMALOUS LIQUIDS

This is a review of papers written by the author and his co-workers dealing with the theory of filtration of anomalous liquids. The results are applied in the petroleum industry since the rheological anomalies are manifested in the behaviour of oil in the region of low shear velocities. Filtration of anomalous liquids is described by means of non-linear filtration law, the limiting gradient law in particular. Two examples are examined in detail: the flow through an element of a rectangular network of shafts (sources and sinks), and the process of oil being displaced by water which leads to the formation of immobile, undisplaced oil regions.

INSTYTUT PROBLEMÓW MECHANIKI
AN ZSSR

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 września 1977 r.