

WYKORZYSTANIE JEDNOWYMIAROWYCH FAL W BADANIACH DYNAMICZNYCH WYBRANYCH WIELOMASOWYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH I OBIEKTÓW BUDOWLANYCH

AMALIA PIEŁORZ (WARSZAWA)

Zaproponowano wykorzystanie jednowymiarowych fal do wyznaczania odkształceń, prędkości i przemieszczeń przekrojów elementów sprężystych, wchodzących w skład wielomasowych układów mechanicznych i obiektów budowlanych. Rozwiązano t.ż. przykłady układów wielomasowych: 1) zderzający się układ złożony z $m/2$ (m jest liczbą parzystą) brył sztywnych, połączonych z obu stron prętami; 2) $(m+1)$ -masowy układ napędowy; 3) $(m-1)$ -piętrowy budynek poddany wpływom sejsmicznym.

Otrzymano rozwiązania analityczne w postaci wzorów rekurencyjnych. Wykresy odkształceń, przemieszczeń i prędkości podano dla wybranych parametrów zderzającego się układu przy $m=4$, dwumasowego układu napędowego i jednopiętrowego budynku.

I. WSTĘP

Opracowanie modeli obliczeniowych nawet prostych układów, wchodzących w skład różnych mechanizmów i obiektów budowlanych, zawierających elementy sprężyste opisywane za pomocą równania falowego, jest zagadnieniem o bardzo dużym znaczeniu praktycznym. Należy nadmienić, że wiele współczesnych maszyn i agregatów, realizujących procesy technologiczne i usługowe, przedstawiają wielomasowe układy o złożonej strukturze. W wielu przypadkach układy te pracują z luzami i uderzeniami, powstałymi np. w wyniku zużywania się elementów współpracujących i obciążeń, przede wszystkim nieokresowych.

W pracy zostały rozpatrzone następujące dwa układy mechaniczne i jeden obiekt budowlany: a) zderzający się układ złożony z $m/2$ (m jest liczbą parzystą) brył sztywnych, połączonych z obu stron prętami; b) m -członowy układ napędowy, obciążony momentami zewnętrznymi opisanymi za pomocą funkcji Heaviside'a; c) $(m-1)$ -piętrowy budynek poddany wpływom sejsmicznym.

W wymienionych układach wykorzystywane są jednowymiarowe fale sprężyste bez uwzględnienia oporów wewnętrznych, które w technicznej analizie można pominąć w przypadku jednokrotnych zderzeń i obciążeń krótkotrwałych [4].

Opierając się na rozwiązaniu typu d'Alemberta otrzymano wzory rekurencyjne dla funkcji, za pomocą których można wyznaczyć prędkości, odkształcenia i przemieszczenia przekrojów poprzecznych elementów sprężystych rozważanych układów.

Należy nadmienić, że w dotychczasowych pracach rozwiązanie typu d'Alemberta wykorzystywano jedynie do badania bardzo prostych układów, np. zamocowanego pręta uderzonego wzdłużnie bryłą sztywną [3]. Ponadto wydaje się, że brak opracowania wzorów rekurencyjnych ograniczało badania dynamiczne, nie tylko układów mechanicznych, przy wykorzystaniu jednowymiarowych fal sprężystych.

2. RÓWNANIA RUCHU WIELOMASOWYCH UKŁADÓW

Rozpatrywane w pracy układy są układami jednowymiarowymi, zawierającymi takie elementy sprężyste o jednakowych długościach, że równanie ruchu i -tego elementu, bez uwzględnienia tłumienia, można napisać w postaci

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 U_i(x, t)}{\partial t^2} - c_f \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (i-1)l < x < il, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

przy czym bryły sztywne, występujące w rozważanych układach, przemieszczają się ruchem postępowym lub obrotowym, $U_i(x, t)$ są przemieszczeniami i -tego elementu sprężystego, c_f jest prędkością dźwięku w materiale tego elementu.

Przy rozwiązywaniu przykładów do równań (2.1) należy dołączyć warunki początkowe

$$(2.2) \quad U_i(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial U_i(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_i, \quad (i-1)l < x < il$$

oraz warunki brzegowe, które są warunkami dla prędkości i -tego i $i+1$ -szego elementu sprężystego rozważanego układu

$$(2.3) \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial U_{i+1}}{\partial t}, \quad x = il, \quad i=1, 2, \dots, m$$

lub warunkami dla sił działających bądź w przekrojach kontaktu sąsiednich elementów sprężystych bądź w przekrojach, w których zamocowane są bryły sztywne, które z kolei mogą być obciążane siłami nieokresowymi krótkotrwałymi $S_i(t)$.

Ostatnie warunki przyjmują najczęściej następującą postać:
dla brzegu swobodnego

$$(2.4)_1 \quad \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0;$$

dla przekroju, w którym bryła sztywna połączona jest z kolejnymi elementami sprężystymi

$$(2.4)_2 \quad S_i(t) + A_i \frac{\partial U_i}{\partial x} - A_{i-1} \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x} - B_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = 0;$$

dla przekroju kontaktu kolejnych elementów sprężystych, w którym nie jest zamocowana bryła sztywna

$$(2.4)_3 \quad A_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = A_{i+1} \frac{\partial U_{i+1}}{\partial x};$$

gdym lewym końcu sprężystego elementu tylko zamocowana jest bryła sztywna

$$(2.4)_4 \quad S_i(t) + A_i \frac{\partial U_i}{\partial x} - B_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = 0;$$

gdym prawym końcu sprężystego elementu zamocowana jest bryła sztywna

$$(2.4)_5 \quad S_i(t) + A_i \frac{\partial U_i}{\partial x} + B_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie A_i wyznaczone są przez stałe materiałowe i -tego elementu sprężystego, a B_i może być masą bryły sztywnej lub masowym momentem bezwładności.

Wyznaczenie przemieszczeń, prędkości i odkształceń w dowolnych przekrojach elementów sprężystych rozważanych układów sprowadza się do rozwiązania równań (2.1) z odpowiednimi warunkami (2.2), (2.3) i (2.4).

Poszukujemy rozwiązań równań (2.1), przy uwzględnieniu warunków początkowych (2.2), w postaci

$$(2.5) \quad U_i(x, t) = \mathcal{F}_i(c_f(t - t_{0i}) - x + x_{0i}) + \mathcal{G}_i(c_f(t - t_0) + x - x_{0i}) + v_i t,$$

gdzie funkcje \mathcal{F}_i określają zaburzenia, spowodowane zderzeniem lub obciążeniem krótkotrwałym, biegnące w prawo, a funkcje \mathcal{G}_i — fale biegnące w lewo. Stałe t_{0i} i x_{0i} w argumentach tych funkcji oznaczają czas i jeden ze skrajnych przekrojów i -tego elementu sprężystego, w których zaobserwować można dojście czoła fali pierwszego zaburzenia w tym elemencie, przy czym dla ujemnych argumentów funkcje te są tożsamościowo równe zeru.

Postać funkcji \mathcal{F}_i i \mathcal{G}_i wyznaczają warunki brzegowe danego problemu, wobec tego otrzymujemy je podstawiając (2.5) do warunków (2.3) i odpowiednich warunków (2.4). W efekcie uzyskujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego i drugiego rzędu dla funkcji \mathcal{F}_i i \mathcal{G}_i . Układ tych równań i jego rozwiązanie analityczne w postaci rekurencyjnych wzorów są różne dla rozpatrywanych układów zderzających się lub obciążonych siłami krótkotrwałymi.

3. OPIS PRZYKŁADÓW

Poniżej rozpatrzmy trzy następujące przykłady wielomasowych układów, postępując jak wyżej opisano:

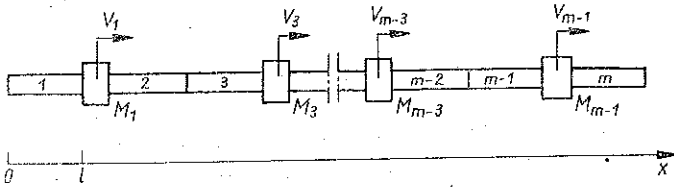
I) zderzający się w chwili $t=0$ układ złożony z $m/2$ (m jest liczbą parzystą) brył sztywnych połączonych z obu stron prętami (rys. 1),

II) m — członowy układ napędowy (rys. 2),

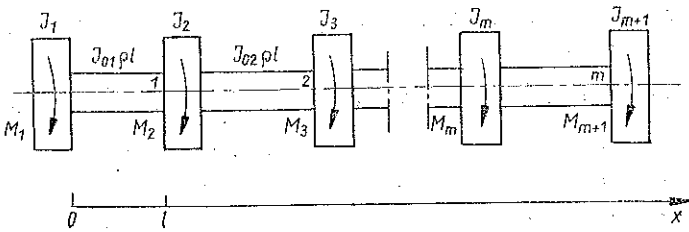
III) $(m-1)$ — piętrowy budynek poddany wpływowi sejsmicznym (rys. 3).

W przykładzie I zakładamy, że pręty odkształcają się tylko sprężysto, ich przekroje pozostają w czasie procesu zderzenia przekrojami płaskimi, a przemieszczenia poprzeczne przekrojów prętów są bardzo małe i mogą być pominięte. Przyjmujemy, że oś x jest równoległa do osi prętów i początek jej pokrywa się ze swobodnym końcem pręta (1) w chwili $t=0$. Pręty scharakteryzowane są gęstością ρ , modułem

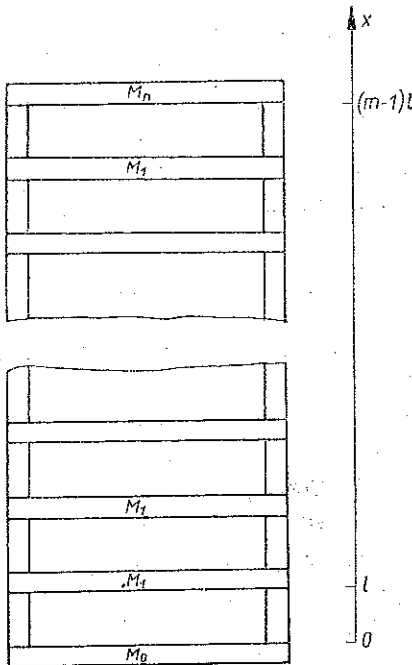
Younga E i polem przekroju poprzecznego F . Za pomocą powyższego układu modelować można m.in. zderzające się wagony pociągu lub zderzające się barki. Funkcja $U_i(x, t)$ występująca we wzorze (2.1) w tym przykładzie jest przemieszczeniem podłużnym $u_i(x, t)$ przekrojów i -tego pręta.



Rys. 1. Model zderzającego się układu prętowego



Rys. 2. Model wielozłonowego układu napędowego

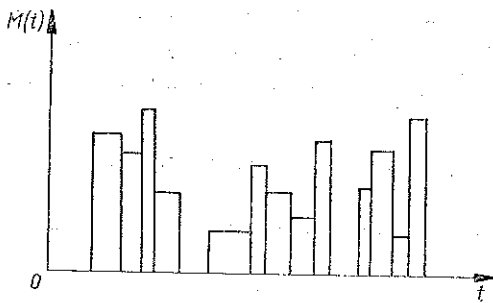


Rys. 3. Model budynku wielopiętrowego

Rozpatrzony w przykładzie II model napędu składa się z m wałów o jednakowych przekrojach i długościach, połączonych z $m+1$ bryłami sztywnymi, które z kolei obciążone są momentami zewnętrznymi (rys. 2). Zakładamy, że wały odkształcają się tylko skrętnie, a centralne osie masowych momentów bezwładności pokrywają się z osiami wałów. Przyjmujemy momenty zewnętrzne jako nieokresowe funkcje czasu, które można aproksymować funkcjami

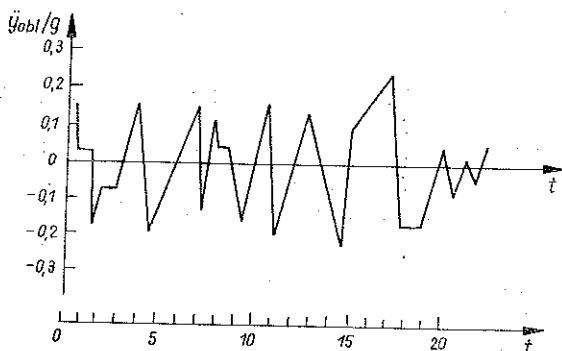
$$(3.1) \quad M_i(t) = \sum_{k=0}^{m_i} M_{i,k} H(t-t_{i,k}), \quad i=1, 2, \dots, m+1,$$

których wykres przykładowo pokazano na rys. 4. Masowy moment bezwładności i -tej bryły wynosi J_i a i -ty wał scharakteryzowany jest modulem sprężystości poprzecznej G , gęstością ρ , biegunowym momentem bezwładności J_{0i} przekroju prostopadłego względem osi x oraz długością l . W tym przykładzie $U_i(x, t)$ we wzorze (2.1) pokrywa się z przemieszczeniem kątowym $\theta_i(x, t)$ przekrojów poprzecznych i -tego wału.



Rys. 4. Obliczeniowy wykres momentów zewnętrznych

W przykładzie III (budynek $(m-1)$ -piętrowy) zakładamy, że fundament i stropy budynku są nieodkształcalne i w czasie trwania obciążeń sejsmicznych przemieszczają się ruchem płaskim. Przez M_0 oznaczamy masę fundamentu, M_i masę i -tego stropu, $i=1, 2, \dots, m-1$ oraz przez M_m masę stropu m -tego. Zakładamy, że wszystkie



Rys. 5. Obliczeniowy wykres przyspieszenia fundamentu budynku

punkty fundamentu mają te samą przyspieszenia jak „otoczenie” fundamentu budynku (ziemia). Krzywe tych wielkości są bardzo nieregularne, wobec tego w naszych rozważaniach aproksymujemy je odpowiednio odcinkami prostych (rys. 5), co zapisujemy następująco:

$$(3.2) \quad \ddot{y}_{0jI} = \sum_{k=0}^{m_1} [a_k + b_k (t - t_k)] H(t - t_k).$$

Ponadto zakładamy, że słupy pionowe między fundamentem a stropem (1) oraz między kolejnymi stropami budynku, poddanego wpływowi sejsmicznemu, mają te same kształty w zakresie odkształceń sprężystych, tzn. że prędkości, odkształcenia i przemieszczenia dla danej wartości x są te same [1]. Przyjmujemy, że wszystkie przekroje słupów w czasie obciążeń sejsmicznych pozostają przekrojami płaskimi i równoległymi do przekrojów w miejscach łączenia słupów ze stropami oraz że sztywność giętna słupów jest bardzo duża. W tym przypadku $U_i(x, t)$ we wzorze (2.1) jest przemieszczeniem poprzecznym $y_i(x, t)$ przekrojów słupów budynku [2]. Zakładamy, że słupy są stalowe i scharakteryzowane są gęstością ρ , wysokością l , polem przekroju poprzecznego A , współczynnikiem ścinania k' i modułem odkształcenia postaciowego G . Oś x przyjmujemy prostopadłą do stropów budynku, a jej początek pokrywa się z położeniem fundamentu w chwili $t=0$.

4. WZORY REKURENCYJNE

Dalsze rozważania przeprowadzimy dla następujących wielkości bezwymiarowych:

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{c_f t}{l}, \quad \bar{U}_i = \frac{U_i}{U_0}, \quad \bar{v}_i = \frac{v_i}{v_0}, \quad \bar{s}_i(\tau) = \frac{s_i(t)}{s_0}, \quad \bar{f}_i = \frac{\mathcal{F}_i}{U_0}, \quad \bar{g}_i = \frac{\mathcal{G}_i}{U_0},$$

gdzie U_0 jest stałym przemieszczeniem, v_0 stałą prędkością oraz S_0 stałym obciążeniem zewnętrznym.

Tablica 1

Przykład	$U(x, t)$	c_f^2	$\bar{x}_{0, i}$	$\tau_{0, i}$	\bar{v}_i	$S_i(t)$
I	$u(x, t)$	$\frac{E}{\rho} = a^2$	1 dla $i=1$ i dla $i=2, 4, \dots, m-2$ $i=1$ dla $i=3, 5, \dots, m-1$ $m-1$ dla $i=m$	1 dla $i=1, m$ 0 dla $i=2, 3, \dots, m-1$	\bar{v}_i^{-1} dla $i=2, 4, \dots, m$ \bar{v}_i dla $i=1, 3, \dots, m-1$	0
II	$\theta(x, t)$	$\frac{G}{\rho} = C^2$	$i-1$	0	0	$M_i(t)$
III	$y(x, t)$	$\frac{k'G}{\rho} = C^2$	$i-1$	$i-1$	0	0

Wtedy równania (2.1) przyjmują postać

$$(4.1) \quad \frac{\partial^2 \bar{U}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{U}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}^2} = 0, \quad i-1 < \bar{x} < i,$$

a ich rozwiązania są następujące:

$$(4.2) \quad \bar{U}_i(\bar{x}, \tau) = f_i(\tau - \tau_{0,i} - \bar{x} + \bar{x}_{0,i}) + g_i(\tau - \tau_{0,i} + \bar{x} - \bar{x}_{0,i}) + \bar{v}_i \tau,$$

gdzie wielkości charakterystyczne dla kolejnych przykładów zamieszczono w tabelicy 1.

Warunki brzegowe (2.3), (2.4) dla kolejnych przykładów są następujące:

Dla przykładu I:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} &= 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{u}_{i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{dla} \quad \bar{x} = i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ \frac{\partial \bar{u}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial \bar{u}_{i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} \quad \text{dla} \quad \bar{x} = i, \quad i = 2, 4, \dots, m-2, \\ -\frac{\partial \bar{u}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}_{i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{\kappa_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} &= 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = i, \\ & \quad \quad \quad i = 1, 3, \dots, m-3, \\ -\frac{\partial \bar{u}_{m-1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}_m(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{\kappa_{m-1}} \frac{\partial^2 \bar{u}_m(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} &= 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = m-1, \\ \frac{\partial \bar{u}_m(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} &= 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = m, \end{aligned}$$

gdzie

$$\kappa_i = \frac{Fpl}{M_i}, \quad i = 1, 3, \dots, m-1.$$

Dla przykładu II (*m*-członowy napęd):

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \bar{A}_1 \bar{M}(\tau) - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_1(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} + \kappa_1 \frac{\partial \bar{\theta}_1(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} &= 0, \quad \bar{x} = 0, \\ \bar{A}_{i+1} \bar{M}_{i+1}(\tau) + \kappa_{i+1} \frac{\partial \bar{\theta}_{i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} - \kappa_i \frac{J_i}{J_{i+1}} \frac{\partial \bar{\theta}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} - \\ - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_{i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} &= 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ \frac{\partial \bar{\theta}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{\theta}_{i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{dla} \quad \bar{x} = i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ \bar{A}_{m+1} \bar{M}_{m+1}(\tau) + \frac{\partial^2 \bar{\theta}_m(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} + \kappa_m \frac{J_m}{J_{m+1}} \frac{\partial \bar{\theta}_m(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} &= 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = m, \end{aligned}$$

gdzie

$$\kappa_i = \frac{J_{0i} \rho l}{J_i}, \quad \bar{A}_i = \frac{G J_i l}{J_i c^2}.$$

Dla przykładu III ($m-1$)-piętrowy budynek:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{\kappa_0} \sum_{k=0}^{m_i} H(\tau - \tau_k) [a_k + b_k(\tau - \tau_k)] &= 0 \quad \text{dla } \bar{x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{y}_{i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{y}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial^2 \bar{y}_{i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} &= 0 \quad \text{dla } \bar{x} = i, \\ & i = 1, 2, \dots, m-1, \\ \frac{\partial \bar{y}_i(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{y}_{i+1}(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{dla } \bar{x} = i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ \frac{\partial \bar{y}_m(\bar{x}, \tau)}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\kappa_m} \frac{\partial^2 \bar{y}_m(\bar{x}, \tau)}{\partial \tau^2} &= 0 \quad \text{dla } \bar{x} = m. \end{aligned}$$

gdzie $\kappa = \frac{n A p l}{M_i}$, $i = 0, 1, m$, natomiast n jest liczbą słupów między sąsiednimi stropami budynku.

Po podstawieniu (4.2) do odpowiednich warunków brzegowych (4.3), (4.4), (4.5) otrzymujemy następujące układy równań różniczkowych zwyczajnych drugiego i pierwszego rzędu dla funkcji $f_i(z)$, $g_i(z)$ w kolejno rozpatrywanych przykładach:

Dla przykładu I

$$(4.6) \quad \begin{aligned} f'_1(z) &= g'_1(z-2), \quad g'_m(z) = f'_m(z-2), \\ g''_1(z) + 2\kappa_1 g'_1(z) &= -g''_1(z-2) + 2\kappa_1 g'_2(z), \\ g''_i(z) + 2\kappa_i g'_i(z) &= -f''_i(z-2) + 2\kappa_i g'_{i+1}(z-2), \quad i = 3, 5, \dots, m-3, \\ g'_{m-1}(z) &= -f'_{m-1}(z-2) + f'_m(z-2) + f'_m(z-4), \\ g'_i(z) &= -\frac{\bar{v}_{i-1} - \bar{v}_{i+1}}{2} + g'_{i+1}(z), \quad i = 2, 4, \dots, m-2, \\ f'_2(z) &= g'_1(z-2) - g'_2(z-2) + g'_1(z-4), \\ f'_i(z) &= g'_{i-1}(z) + f'_{i-1}(z-2) - g'_i(z-2), \quad i = 4, 6, \dots, m-2, \\ f'_i(z) &= \frac{\bar{v}_{i-2} - \bar{v}_i}{2} + f'_{i-1}(z), \quad i = 3, 5, \dots, m-1, \\ f''_m(z) + 2\kappa_{m-1} f'_m(z) &= -f''_m(z-2) + 2\kappa_{m-1} f'_{m-1}(z). \end{aligned}$$

Dla przykładu II (m -członowy napęd)

$$(4.7) \quad \begin{aligned} g'_i(z) &= -f'_i(z-2) + f'_{i+1}(z-1) + g'_{i+1}(z-1), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ g''_m(z) + \kappa_m \frac{J_m}{J_{m+1}} g'_m(z) &= -\bar{A}_{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \bar{M}_{m+1, k} H(z-1-\tau_{m+1, k}) - \\ & - f''_m(z-2) + \kappa_m \frac{J_m}{J_{m+1}} f'_m(z-2), \end{aligned}$$

$$(4.7) \quad f_1''(z) + \kappa_1 f_1'(z) = \bar{A}_1 \sum_{k=0}^{m_1} \bar{M}_{1,k} H(z - \tau_{1,k}) - g_1''(z) + \kappa_1 g_1'(z),$$

[cd.]

$$f_i''(z) + \left(\kappa_i + \kappa_{i-1} \frac{J_{i-1}}{J_i} \right) f_i'(z) = \bar{A}_i \sum_{k=0}^{m_i} \bar{M}_{i,k} H(z - \tau_{i,k}) -$$

$$- g_i''(z) + \left(\kappa_i - \kappa_{i-1} \frac{J_{i-1}}{J_i} \right) g_i'(z) + 2\kappa_{i-1} \frac{J_{i-1}}{J_i} f_{i-1}'(z-1), \quad i=2, 3, \dots, m,$$

Dla przykładu III ($m-1$)-piętrowy budynek

$$g_1'(z) = f_2'(z-2) + g_2'(z-2) - f_1'(z-2),$$

(4.8)

$$f_1'(z) = f_2'(z-2) + g_2'(z-2) - f_1'(z-2) - \frac{1}{\kappa_0} \sum_{k=0}^{m_1} H(z - \tau_k) [\bar{a}_k + \bar{b}_k(z - \tau_k)],$$

$$g_i'(z) = f_{i+1}'(z-2) + g_{i+1}'(z-2) - f_i'(z-2), \quad i=2, 3, \dots, m-1,$$

$$g_m''(z) + \kappa_m g_m'(z) = -f_m''(z-2) + \kappa_m f_m'(z-2),$$

$$f_i''(z) + 2\kappa_i f_i'(z) = -g_i''(z) + 2\kappa_i f_{i-1}'(z), \quad i=2, 3, \dots, m.$$

Układy równań (4.6)–(4.8), mają rozwiązania analityczne w postaci wzorów rekurencyjnych ze względu na przedziały zmienności argumentu z . Nadmienić trzeba, że sposób otrzymywania rozwiązań równań podobnego typu przedstawiony jest w pracy [3], na przykładzie prostego układu zderzającego się bez podania wzorów rekurencyjnych.

Rozwiązania równań (4.6)–(4.8), ze względu na dowolną liczbę członów rozważanych układów, wyrażają się przez stosunkowo długie wzory. W pracy tej podana jest skrócona postać tych wzorów przy wykorzystaniu tablic 2–4. Pełna postać rozwiązań równań (4.6)–(4.8) zamieszczona jest w pracy [5].

Tablica 2

F_i	$2n \leq z < 2n+2, n=0, 1, \dots$							
	K_1	$j_{0,1}$	j_1	$K_{j,1}$	$j_{0,2}$	j_2	$K_{j,2}$	K_{m-1}
g_1	n	1	$\frac{m-4}{2}$	$n-j$	—	—	—	$n - \frac{m}{2} + 1$
g_i $i=3, 5, \dots,$ $m-3$	$n - \frac{i+1}{2}$	1	$\frac{i-1}{2}$	$n - \frac{i+1}{2} + j$	$\frac{i+1}{2}$	$\frac{m-4}{2}$	$n + \frac{i-3}{2} - j$	$n - \frac{m-i+1}{2}$
g_{m-2}	$n - \frac{m}{2}$	1	$\frac{m-4}{2}$	$n - \frac{m}{2} + j$	—	—	—	$n-1$
f_i $i=3, 5, \dots,$ $m-1$	$n - \frac{i-1}{2}$	1	$\frac{i-3}{2}$	$n - \frac{i-1}{2} + j$	$\frac{i-1}{2}$	$\frac{m-4}{2}$	$n + \frac{i-5}{2} - j$	$n - \frac{m-i+3}{2}$
f_m	$n - \frac{m}{2} + 1$	1	$\frac{m-4}{2}$	$n - \frac{m}{2} + 1 + j$	—	—	—	n

Tablica 3

		$2n \leq z < 2n+1, n=0, 1, \dots$		$2n+1 \leq z < 2n+2, n=0, 1, \dots$	
d		$2n+1$		$2n+2$	
w		$z-2n-\tau_{s,k}$		$z-2n-1-\tau_{s,k}$	
F		$f_i, i=1, 2, \dots, m$	$g_i, i=1, 2, \dots, m$	$f_i, i=1, 2, \dots, m$	$g_i, i=1, 2, \dots, m$
$\alpha=1$	s_α	$\frac{r_0}{i-1+r_0}$	$\frac{r_0}{i-1+r_0}$	$\frac{r_1}{i-2+r_1}$	$\frac{r_1}{i+r_1}$
	R_α	$\frac{2}{2r+1-r_0}$	$\frac{2}{2r+1-r_0}$	$\frac{2}{2r+1-r_1}$	$\frac{2}{2r+1-r_1}$
	s	$2r+1-r_0$	$2r+1-r_0$	$2r+1-r_1$	$2r+1-r_1$
	L_1	$2r-r_0$	$2r-r_0$	$2r-r_1$	$2r-r_1$
	L_2	i	$i+1$	i	$i+1$
	L_3	$m+1$	$m+1$	$m+1$	$m+1$
	K_1	$n-r+l-\frac{i+1-r_0}{2}$	$n-r+l-\frac{i-1-r_0}{2}$	$n-r+l-\frac{i-r_1}{2}$	$n-r+l-\frac{i+2-r_1}{2}$
	K_2	$n+r-\frac{i-1+r_0}{2}$	$n+r-\frac{i+1+r_0}{2}$	$n+r-\frac{i-2+r_1}{2}$	$n+r-\frac{i+r_1}{2}$
K_3	$n+r-l+\frac{i+1-r_0}{2}$	$n+r-l+\frac{i+1-r_0}{2}$	$n+r-l+\frac{i+2-r_1}{2}$	$n+r-l+\frac{i+2-r_1}{2}$	
$\alpha=2$	s_α	$\frac{i+1+r_0}{2}$	$\frac{i+1+r_0}{2}$	$\frac{i+r_1}{2}$	$\frac{i+2+r_1}{2}$
	R_α	$E\left(\frac{m+1}{2}\right)$	$E\left(\frac{m+1}{2}\right)$	$E\left(\frac{m+1}{2}\right)$	$E\left(\frac{m+1}{2}\right)$
	s	$2r+1-r_0$	$2r+1-r_0$	$2r+1-r_1$	$2r+1-r_1$
	L_1	$i-1$	i	$i-1$	i
	L_2	$2r+1-r_0$	$2r+1-r_0$	$2r+1-r_1$	$2r+1-r_1$
	L_3	$m+1$	$m+1$	$m+1$	$m+1$
	K_1	$n-r+l-\frac{i+1-r_0}{2}$	$n-r+l-\frac{i-1-r_0}{2}$	$n-r+l-\frac{i-r_1}{2}$	$n-r+l-\frac{i+2-r_1}{2}$
	K_2	$n-r+\frac{i-1+r_0}{2}$	$n-r+\frac{i-1+r_0}{2}$	$n-r+\frac{i+r_1}{2}$	$n-r+\frac{i+r_1}{2}$
K_3	$n+r-l+\frac{i+1-r_0}{2}$	$n+r-l+\frac{i+1-r_0}{2}$	$n+r-l+\frac{i+2-r_1}{2}$	$n+r-l+\frac{i+2-r_1}{2}$	

Tablica 4

$2n \leq z < 2n+2, n=0, 1, \dots$					
$m \geq 3$			$m=2$		
F	K_1	K_m	F	K_1	K_2
f_1	$2(n-1)$	$n-m$	f_1	$n-1$	$n-2$
$f_i, i=2, 3, \dots, m$	$2n+i-2$	$n-m+i-1$	f_2	n	$n-1$
$g_i, i=2, 3, \dots, m-1$	$2n+i-3$	$n-m+i-1$	g_2	$n-1$	$n-1$
g_m	$2n+m-4$	$n-1$			

W przykładzie pierwszym i trzecim postać wzorów rekurencyjnych jest niezmienna w przedziałach argumentu z , których końce są kolejnymi liczbami parzystymi. Natomiast w przykładzie drugim, dotyczącym m -członowego układu napędowego, postać odpowiednich wzorów jest niezmienna w przedziałach argumentu z , których końce są kolejnymi liczbami całkowitymi.

I tak dla przykładu I ogólna postać funkcji $f'_i(z)$, $g'_i(z)$ dla $z \in \langle 2n, 2n+2 \rangle$, $n=0, 1, \dots$, jest następująca:

$$(4.9) \quad F'_{i, n+1}(z) = F'_{i, n}(z) + F^{i, n+1} + e^{-2\kappa_1(z-2n)} \times \sum_{k=0}^{\kappa_1} F_{1, k}^{i, n+1} (z-2n)^k + \\ + \sum_{s=1}^2 \sum_{j=J_{0, s}}^{J_s} e^{-2\kappa_{2j+1}(z-2n)} \sum_{k=0}^{E(K_{j, s}/2)} F_{2j+1, k}^{i, n+1} (z-2n)^k + \\ + e^{-2\kappa_{m-1}(z-2n)} \sum_{k=0}^{K_{m-1}} F_{m-1, k}^{i, n+1} (z-2n)^k, \quad F'_{i, 0}(z) = 0,$$

gdzie $E(n)$ jest funkcją *entier*, natomiast funkcje F_i i odpowiadające im stałe K_1 , K_{j_s} i K_{m-1} wyszczególnione są w tablicy 2.

Wzór (4.9) łącznie z tablicą 2 wyznaczają pochodne m funkcji f'_i i g'_i . Pochodne pozostałych m funkcji wyznaczamy z odpowiednich równań (4.6) przez funkcje wyznaczone wyżej. We wzorze (4.9) współczynnik $F_{i, k}^{i, n+1}$ oznacza, że należy do funkcji oznaczonej numerem i o argumentie z należącym do przedziału o początku $2n$ oraz że stoi przy składniku zależnym od κ_i i jest mnożony przez k -tą potęgę wyrażenia $z-2n$.

Ogólna postać pochodnych funkcji $f'_i(z)$, $g'_i(z)$ w przypadku wielocłonowego układu napędowego, rozpatrzonego jako przykład II, jest następująca:

$$(4.10) \quad F'_{i, a}(z) = F'_{i, a-1}(z) + \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \sum_{r=s_\alpha}^{R_\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m_s} \bar{M}_{s, k} \left\{ F^{i, s, a} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sum_{\beta=1}^3 \left[\sum_{l=L_{\beta-1}+1}^{L_\beta} e^{-\gamma_l w} \left(\sum_{j=0}^{K_\beta} F_{L, j}^{i, s, a} w^j \right) \right] \right] \right\} \right\}, \quad F'_{i, 0}(z) = 0,$$

gdzie

$$(4.11) \quad \gamma_1 = \kappa_1, \quad \gamma_i = \kappa_1 + \kappa_{i-1} \frac{J_{i-1}}{J_i}, \quad i=2, 3, \dots, m, \\ \gamma_{m+1} = \kappa_m \frac{J_m}{J_{m+1}},$$

a stałe s_α , R_α , L_β i K_β dla odpowiednich funkcji, w przedziałach argumentu z , rozpoczynających się od parzystych i nieparzystych liczb całkowitych, zamieszczone są w tablicy 3, przy czym $L_0=0$,

$$r_0 = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \text{ parzystych,} \\ 0 & \text{dla } i \text{ nieparzystych;} \end{cases} \\ r_1 = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \text{ parzystych,} \\ 1 & \text{dla } i \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

We wzorze (4.10) współczynnik $F_{i,j}^{i,s,d}$ wskazuje, że związany jest z i -tą funkcją, momentem zewnętrznym $\bar{M}_s(\tau)$, współczynnikiem γ_i , j -tą potęgą wyrażenia $z-d+1-\tau_{s,k}$ oraz argumentem z przedziału $\langle d-1, d \rangle$. Ze wzoru (4.10) i tablicy 3 wynika, że w przedziale $(2n, 2n+1)$ funkcje $f'_i(z)$, $g'_i(z)$ dla i nieparzystych zależą od wszystkich nieparzystych momentów $\bar{M}_j(\tau)$, a funkcje o parzystych numerach i zależą od parzystych momentów $\bar{M}_j(\tau)$. W przedziale $\langle 2n+1, 2n+2 \rangle$ na odwrót, funkcje o wskaźnikach i nieparzystych zależne są od parzystych momentów $\bar{M}_j(\tau)$, a funkcje oznaczone parzystymi numerami zależne są od wszystkich nieparzystych momentów.

Z kolei w przykładzie III, dotyczącym wielopiętrowego budynku poddanego wpływom sejsmicznym, otrzymujemy następującą ogólną postać pochodnych funkcji $f'_i(z)$ i $g'_i(z)$ dla argumentu $z \in (2n, 2n+2)$:

$$(4.12) \quad F'_{i,n+1}(z) = F'_{i,n}(z) + \sum_{k=0}^{m_1} H(z-2n-\tau_k) [F^{k, \cdot, n+1} + F_0^{k, i, n+1}(z-2n-\tau_k) + \\ + e^{-2\kappa_1(z-2n-\tau_k)} \times \sum_{j=0}^{K_1} F_{1,j}^{k, i, n+1}(z-2n-\tau_k)^j + e^{-2\kappa_m(z-2n-\tau_k)} \times \\ \times \sum_{j=0}^{K_m} F_{m,j}^{k, i, n+1}(z-2n-\tau_k)^j], \quad F'_{i,0}(z) = 0,$$

gdzie funkcje $f'_i(z)$ i $g'_i(z)$ i odpowiadające im stałe K_1 i K_m zamieszczone są w tablicy 4 dla budynku jedno- ($m=2$) i więcej-piętrowego, przy czym funkcję $g'_{i,j}(z)$ wyznaczamy wykorzystując pierwsze równanie układu (4.8). Ponadto $g'_{i,j}(z) = 0$ dla $i=2, 3, \dots, n$. Współczynnik $F_{i,j}^{k, i, n+1}$ we wzorze (4.12) wskazuje, że należy on do funkcji o numerze i o argumentie z przedziału, którego początek jest równy liczbie $2n$ oraz że stoi przy składniku zależnym od κ_1 i mnożonym przez j -tą potęgę wyrażenia $z-2n-\tau_k$. Ponadto górny wskaźnik k informuje o zależności od k -tej części łamanej (3.2), którą aproksymujemy funkcję przyspieszenia fundamentu w czasie obciążeń sejsmicznych budynku.

Ze wzorów (4.9), (4.10) i (4.12) wynika, że rozwiązania we wszystkich rozważanych układach wielomasowych eksponencjalnie zależą od mas brył sztywnych, tzn. odpowiednio od współczynników κ_i lub γ_i . Zmienne współczynniki przy funkcjach eksponencjalnych są szeregami potęgowymi względem $z-2n$, $z-2n-\tau_k$ lub $z-d+1-\tau_{s,k}$. Najwyższe potęgi w tych szeregach związane są z liczbą odbitych fal od odpowiednich brył sztywnych, które dotarły do rozważanego sprężystego elementu układu. Ponadto zauważyć można, że rozwiązania w odpowiednim przedziale zależne są od postaci badanych funkcji we wszystkich poprzednich przedziałach przy zachowaniu chwilowej wartości argumentu z .

Ze wzoru (4.9) i tablicy 2 wynika, że najwyższe potęgi w szeregu stojącym przy składnikach zależnych od κ_1 i κ_{m-1} zmieniają się co wartość 2, a w pozostałych składnikach rozwiązania co wartość 4. W przypadku wielopiętrowego budynku zmiany te zachodzą co 2. Ze wzoru (4.10) i tablicy 3 wynika, że w przypadku wielocłonowego napędu każde rozwiązanie ze względu na zależność od momentów

$\bar{M}_s(\tau)$ składa się z dwóch części, przy czym każda z tych części ze względu na zależność od γ , złożona jest z 3 składników. I tak przykładowo dla funkcji $f'_i(z)$ z przedziału rozpoczynającego się od liczby parzystej inne stałe L_β i K_β obowiązują przy uwzględnieniu wpływu $\bar{M}_s(\tau)$, $s=2r+1-r_0$, dla $r=r_0, r_0+1, \dots, \frac{i-1+r_0}{2}$, a inne dla pozostałych wartości r . Ponadto dla pierwszej grupy stałych s wykładniki najwyższych potęg przy funkcji $e^{-\gamma_i \omega}$ rosną dla $l=1, 2, \dots, 2r-r_0$ zgodnie ze wzorem $K_1 = n-r+l - \frac{i+1-r_0}{2}$ są jednakowe dla $l=2r-r_0+1, \dots, i$ wynosząc $K_2 = n+r - \frac{i-1+r_0}{2}$ oraz maleją dla pozostałych l według zależności $K_3 = n+r-l + \frac{i+1-r_0}{2}$. Podobnie dla drugiej grupy wskaźników s ($\alpha=2$) przy momentach zewnętrznych występuje część wykładników rosnąca jednakowa i malejąca, w zależności od γ_i , zgodnie z odpowiadającymi im liczbami K_1, K_2 i K_3 .

Rozwiązania analityczne rozważanych trzech przykładów układów wielomasowych, przedstawione wzorami (4.9), (4.10) i (4.12), zawierają odpowiednie współczynniki stałe $F^{i,n+1}, F_{j,k}^{i,n+1}, F^{k,i,n+1}, F_0^{k,i,n+1}, F_{l,j}^{k,i,n+1}, F^{k,s,d}$ i $F_{l,j}^{k,s,d}$. Te stałe współczynniki wyznaczamy w trakcie rozwiązywania odpowiednich układów równań różniczkowych zwyczajnych (4.6), (4.7), (4.8). Przykładowo dla przypadku III, tzn. dla $m-1$ -piętrowego budynku poddanego wpływom sejsmicznym, przy $m \geq 3$ są one następujące:

$$\begin{aligned}
 f^{k,1,1} &= -\frac{1}{\kappa_0} \bar{a}_k, & f_0^{k,1,1} &= -\frac{1}{\kappa_0} \bar{b}_k, \\
 f^{k,1,n+1} &= f^{k,2,n} + H(n-2) g^{k,2,n} - f^{k,1,n} & \text{dla } n \geq 1, \\
 f_0^{k,1,n+1} &= f_0^{k,2,n} + H(n-2) g_0^{k,2,n} - f_0^{k,1,n} & \text{dla } n \geq 1, \\
 g^{k,j,n+1} &= H(n-1) (f^{k,j+1,n} - f^{k,j,n}) + H(n-2) g^{k,j+1,n}, & j=2, 3, \dots, m-1, \\
 g^{k,m,n+1} &= H(n-1) (f^{k,m,n} - \frac{2}{\kappa_m} f^{k,m,n}), \\
 f^{k,j,n+1} &= f^{k,j-1,n+1} - \frac{1}{2\kappa_1} [H(n-1) f_0^{k,j,n+1} + f_0^{k,j-1,n+1}], & j=2, 3, \dots, m, \\
 g_0^{k,j,n+1} &= H(n-1) (f_0^{k,j+1,n} - f_0^{k,j,n}) + H(n-2) g_0^{k,j+1,n}, & j=2, 3, \dots, m-1, \\
 g_0^{k,m,n+1} &= H(n-1) f_0^{k,m,n} \\
 f_0^{k,j,n+1} &= f_0^{k,j-1,n+1}, & j=2, 3, \dots, m, \\
 f_{1,i}^{k,1,n+1} &= f_{1,i}^{k,2,n} + H(2n-3-i) g_{1,i}^{k,2,n} - H(2n-4-i) f_{1,i}^{k,1,n}, \\
 & & i=2n-2, 2n-3, \dots, 0, \\
 f_{m,i}^{k,1,n+1} &= f_{m,i}^{k,2,n} + g_{m,i}^{k,2,n} - H(n-m-1-i) f_{m,i}^{k,1,n}, & i=n-m, n-m-1, \dots, 0,
 \end{aligned}$$

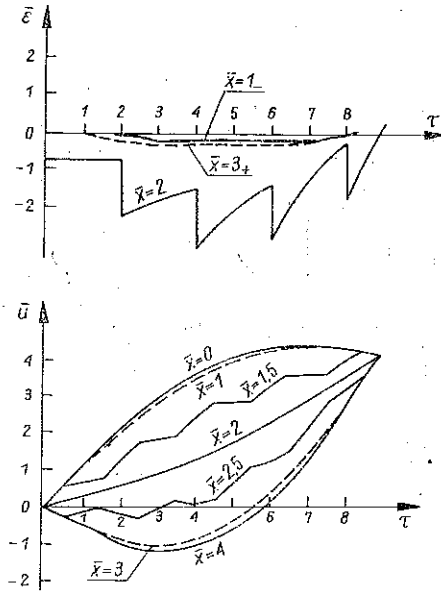
$$\begin{aligned}
 g_{1,i}^{k,j,n+1} &= f_{1,i}^{k,j+1,n} + H(2n+j-4-i)(g_{1,i}^{k,j+1,n} - f_{1,i}^{k,j+1,n}), \quad j=2, 3, \dots, m-2, \\
 & \quad i=2n+j-3, 2n+j-4, \dots, 0, \\
 g_{1,i}^{k,m-1,n+1} &= f_{1,i}^{k,m,n} + H(2n+m-6-i)g_{1,i}^{k,m,n} - H(2n+m-5-i)f_{1,i}^{k,m-1,n}, \\
 & \quad i=2n+m-4, 2n+m-5, \dots, 0, \\
 g_{1,i}^{k,m,n+1} &= \frac{1}{2\kappa_1 - \kappa_m} [(i+1)(g_{1,i+n}^{k,m,n+1} + f_{1,i+1}^{k,m,n})H(2n+m-5-i) + \\
 & \quad - (2\kappa_1 + \kappa_m)f_{1,i}^{k,m,n}], \quad i=2n+m-4, 2n+m-5, \dots, 0, \\
 g_{m,i}^{k,j,n+1} &= f_{m,i}^{k,j+1,n} + g_{m,i}^{k,j+1,n} - H(n-2-m+j-i)f_{m,i}^{k,j,n}, \quad j=2, 3, \dots, m-1, \\
 & \quad i=n-m+j-1, n-m+j-2, \dots, 0, \\
 g_{m,i}^{k,m,n+1} &= -H(n-2-i)f_{m,i}^{k,m,n} + \frac{2\kappa_m}{i}f_{m,i-1}^{k,m,n}, \quad i=n-1, n-2, \dots, 1, \\
 g_{m,0}^{k,m,n+1} &= -g_{m,0}^{k,m,n+1} - g_{1,0}^{k,m,n+1}H(n-1), \\
 f_{1,i}^{k,2,n+1} &= -H(2n-1-i)g_{1,i}^{k,2,n+1} + \frac{2\kappa_1}{i}[g_{1,i-1}^{k,2,n+1} + H(2n-1-i)f_{1,i-1}^{k,1,n+1}], \\
 & \quad i=2n, 2n-1, \dots, 1, \\
 f_{1,i}^{k,j,n+1} &= -H(2n+j-3-i)H(n-1)g_{1,i}^{k,j,n+1} + \frac{2\kappa_1}{i}[H(n-1)g_{1,i-1}^{k,j,n+1} + \\
 & \quad + f_{1,i-1}^{k,j-1,n+1}], \quad j=3, 4, \dots, m-1, \quad i=2n+j-2, 2n+j-3, \dots, 1, \\
 f_{1,i}^{k,m,n+1} &= -H(2n+m-4-i)H(n-1)g_{1,i}^{k,m,n+1} + \\
 & \quad + \frac{2\kappa_1}{i}[H(2n+m-3-i)H(n-1)g_{1,i-1}^{k,m,n+1} + f_{1,i-1}^{k,m-1,n+1}], \\
 & \quad i=2n+m-2, 2n+m-3, \dots, 1, \\
 f_{m,i}^{k,j,n+1} &= \frac{1}{2\kappa_1 - \kappa_m} [-(i+1)H(n-m+j-2-i)(f_{m,i+1}^{k,j,n+1} + g_{m,i+1}^{k,j,n+1}) + \\
 & \quad + \kappa_m g_{m,i}^{k,j,n+1} + 2\kappa_1 H(n-m+j-2-i)f_{m,i}^{k,j-1,n+1}], \\
 & \quad j=2, 3, \dots, m, \quad i=n-m+j-1, n-m+j-2, \dots, 0, \\
 f_{1,0}^{k,j,n+1} &= -f_{1,0}^{k,j,n+1} - H(n-m+j)f_{m,0}^{k,j,n+1}, \quad j=2, 3, \dots, m.
 \end{aligned}$$

W przykładach I i II otrzymuje się współczynniki rozwiązań (4.9) i (4.10) podobnej do przedstawionych wyżej postaci. Zamieszczone są one w pracy [5].

Wzory (4.9), (4.10) i (4.12) przedstawiają pochodne funkcji f_i i g_i i pozwalają przy wykorzystaniu (4.2) i tablicy 1 wyznaczyć prędkości i odkształcenia dowolnych przekrojów elementów sprężystych rozpatrywanych układów wielomasowych. Celem wyznaczenia przemieszczeń tych przekrojów należy scałkować funkcje (4.9), (4.10) i (4.12).

5. WYNIKI NUMERYCZNE

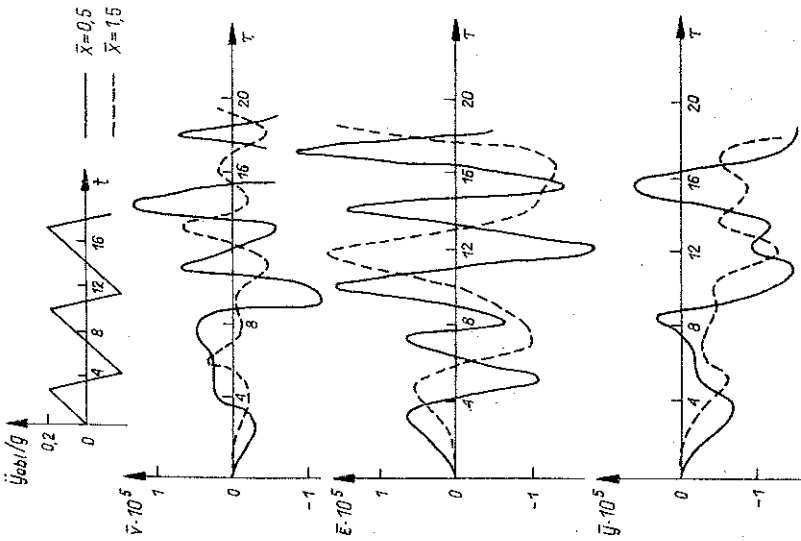
Przykładowo naniesiono na rysunkach 6, 7 i 8 wykresy odkształceń, przemieszczeń i prędkości zderzającego się układu przy $m=4$, jednoczłonowego napędu i jednopiętrowego budynku.



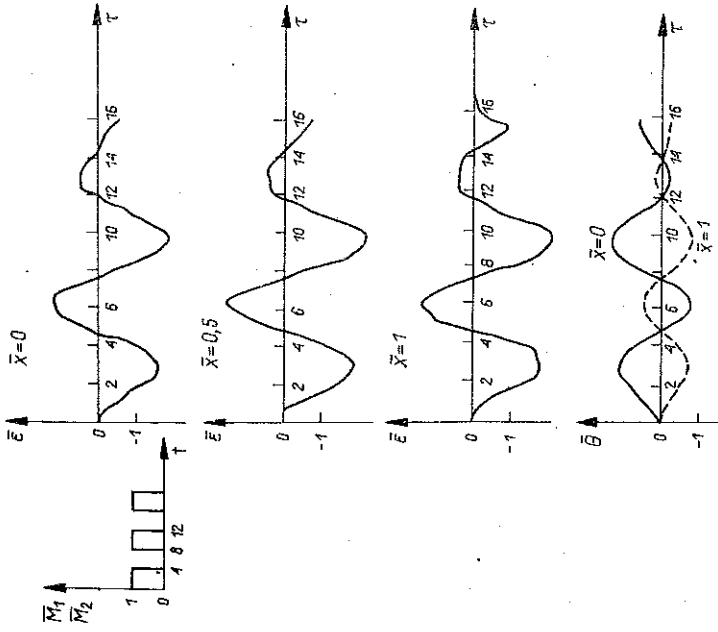
Rys. 6. Wykresy odkształceń i przemieszczeń układu zderzającego się dla $m=4$, $\kappa_1=0,1$, $\kappa_3=0,2$, $\bar{v}_1=1$, $\bar{v}_3=-0,5$

Na rysunku 6 naniesiono wykresy odkształceń i przemieszczeń zderzającego się układu (rys. 1) dla $\kappa_1=0,1$; $\kappa_3=0,2$; $\bar{v}_1=1$; $\bar{v}_3=-0,5$. Z porównania wykresów odkształceń wynika, że odkształcenia dla $\bar{x}=2$ znacznie różnią się od odkształceń dla $\bar{x}=1_-$, tj. prawego końca pierwszego elementu rozważanego układu, i od odkształceń w przekroju $\bar{x}=3_+$, tj. lewego końca czwartego pręta układu. Wykresy przemieszczeń naniesiono dla $\bar{x}=0$; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4. Z porównania tych wykresów wynika, że przemieszczenia przekrojów $\bar{x}=0$ i $\bar{x}=1$ różnią się nieznacznie. Podobna uwaga dotyczy przekrojów $\bar{x}=3$ i $\bar{x}=4$. Należy nadmienić, że przemieszczenia przekrojów $\bar{x}=0$; 1 początkowo rosną, a następnie maleją. Odwrotny przebieg mają przemieszczenia przekrojów $\bar{x}=3$; 4. Krzywe przemieszczeń przekrojów $\bar{x}=1,5$; 2; 2,5 zawarte są między krzywymi przemieszczeń dla $\bar{x}=1$; 3, przy czym wartości przemieszczeń w końcu procesu zderzenia, tj. dla $\tau \approx 8,85$, różnią się nieznacznie.

Na rysunku 7 naniesiono wykresy odkształceń i przemieszczeń jednoczłonowego układu napędowego ($m=1$) dla jednakowych obciążeń $M_1(\tau)$, $M_2(\tau)$, przedstawionych na tymże rysunku, oraz dla $\gamma_1=1$, $\gamma_2=0,5$. Odkształcenia w rozpatrywanych przekrojach wału $\bar{x}=0$; 0,5; 1 nieznacznie różnią się, a przemieszczenia przekroju $\bar{x}=0$ wyraźnie różnią się od przemieszczeń przekroju $\bar{x}=1$.



Rys. 7. Wykresy odkształceń i przemieszczeń dwumasyowego układu napędowego dla $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0,5$



Rys. 8. Wykresy prędkości, odkształceń i przemieszczeń jednopiętrowego budynku dla $\kappa_0 = 0,25$, $\kappa_1 = 0,6$, $\kappa_2 = 0,2$

Na rysunku 8 naniesiono wykresy prędkości, odkształceń i przemieszczeń jednopiętrowego budynku ($m=2$) w przekrojach $\bar{x}=0,5$ i $\bar{x}=1,5$ dla współczynników $\kappa_0=0,25$; $\kappa_1=0,6$; $\kappa_2=0,2$ i funkcji przyspieszenia fundamentu pokazanej na tymże rysunku. Z porównania wykresów prędkości przekrojów słupów budynku wynika, że większe wartości prędkości występują w przekroju $\bar{x}=0,5$. Podobnie większe odkształcenia występują dla $\bar{x}=0,5$. Z rysunku 8 wynika, że zarówno prędkości jak i odkształcenia mają charakter oscylacji nieregularnych. Uwaga ta dotyczy również wykresów przemieszczeń.

6. ZAKOŃCZENIE

W pracy zaproponowano wykorzystanie jednowymiarowych fał do wyznaczania odkształceń, prędkości i przemieszczeń przekrojów elementów sprężystych wchodzących w skład wielomasowych układów mechanicznych i obiektów budowlanych. Rozwiązano trzy przykłady wielomasowych układów, dla których otrzymano rozwiązania analityczne w postaci wzorów rekurencyjnych. Podobne wzory rekurencyjne można uzyskać w wielu innych przypadkach układów wielomasowych. Proponowana w pracy metoda postępowania jest szczególnie przydatna w układach zderzających się i w układach obciążonych siłami krótkotrwałymi nieokresowymi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. A. BLUMI i in., *Design of multistory reinforced concrete building for earthquake motions*, Chicago 1961.
2. R. W. CLOUGH, J. PENZIEN, *Dynamics of structures*, Tokyo 1975.
3. W. GOLDSMITH, *Impact*, London 1960.
4. R. GRYBÓŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, Warszawa 1969.
5. A. PIELORZ, *Fale sprężyste w wybranych wieloczłonowych układach mechanicznych*, Prace IPPT 64, 1978.

Резюме

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН В ДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ИЗБРАННЫХ МНОГОМАССОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И СТРОИТЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Предложен волновой метод для определения деформаций, скоростей и перемещений сечений упругих элементов, входящих в состав многомассовых механических систем и строительных объектов. Решены три примера многомассовых систем: 1) соударяющаяся система, состоящая из $m/2$ (m обозначает четное число) жестких тел, соединенных с обеих сторон стержнями, 2) $(m+1)$ -массовая приводная система, 3) $(m-1)$ -этажное здание, подвергнутое сейсмическим влияниям.

Получены аналитические решения в виде рекуррентных формул. Графики деформаций, перемещений и скоростей приведены для избранных параметров соударяющейся системы при $m=4$, двухмассовой приводной системы и одноэтажного здания.

SUMMARY

APPLICATION OF ONE-DIMENSIONAL WAVES IN DYNAMIC ANALYSIS OF CERTAIN MULTI-MASS MECHANICAL SYSTEMS AND BUILDING OBJECTS

A wave approach is proposed to the determination of deformations, velocities and displacements of elastic elements of multi-mass mechanical systems and building objects. Three examples of multi-mass systems are solved: 1) collision of a system consisting of $m/2$ (m =even number) rigid masses interconnected by rods; 2) $(m+1)$ -mass power transmission system; 3) $(m-1)$ -storey building under seismic loads. Analytic solutions have the form of recurrent formulae. Diagrams of strains, displacements and velocities are given for the cases of a colliding $m=4$ -mass system, a two-mass power transmission system and a one-storey building.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 marca 1979 r.