

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA UKŁADÓW DYSKRETNÝCH

RYSZARD G R Y B O Ś (GLIWICE)

Znane pojęcie statycznej charakterystyki wyboczeniowej uogólnione zostało na przypadek obciążenia dynamicznego. Na tej koncepcji oparto metodę obliczania dynamicznego obciążenia krytycznego układów dyskretnych. Rozważania i twierdzenia ogólne zilustrowano kilkoma przykładami badania stateczności układów nieliniowych o jednym i dwóch stopniach swobody pod obciążeniem o przebiegu skokowym.

1. UWAGI I OKREŚLENIA WSTĘPNE

Badanie stateczności układu mechanicznego pod obciążeniem statycznym nazywamy dalej krótko *zadaniem statycznym*. Podobne zagadnienie lecz przy obciążeniu szybko zmiennym w czasie określamy jako *zadanie dynamiczne*. Ze względów aplikacyjnych szczególną rolę odgrywają przypadki obciążeń nieokresowych, które powstają przy uderzeniach, wybuchach, nagłych zerwaniach więzów itd. Rzeczywiste przebiegi takich obciążeń zwykle aproksymuje się funkcjami typu skokowego, jak funkcja Heaviside'a, impuls prostokątny, itp. Doświadczalnie stwierdzono, że konstrukcja poddana tego rodzaju obciążeniom traci stateczność przy pewnej *krytycznej* wartości obciążenia bądź impulsu. Dokładniej pojęcie to sprecyzujemy nieco dalej.

Stan kinematyczny układu pod obciążeniem krytycznym nazywamy *stanem krytycznym*. W zadaniu statycznym stan układu pod obciążeniem mniejszym od krytycznego nazywamy *podkrytycznym stanem równowagi*. W zadaniu dynamicznym mówimy w tej sytuacji o *ruchu podkrytycznym*. Gdy obciążenie przekroczy wartość krytyczną mówimy odpowiednio o stanie równowagi lub *ruchu nadkrytycznym*.

W zadaniu statycznym stan nadkrytyczny jest również stanem równowagi, lecz odpowiada mu konfiguracja układu inna niż w stanie podkrytycznym; ta ostatnia zwana jest konfiguracją *naturalną*.

Obciążenie krytyczne, dynamiczne interpretujemy w sensie lapunowskiej koncepcji stateczności, czyli jako największe obciążenie, przy którym wspomniany warunek stateczności jest jeszcze spełniony. W konkretnym przypadku wartość krytyczną otrzymujemy w wyniku analizy ruchu układu przy zmiennych warunkach początkowych, te zaś zależą od intensywności obciążenia.

Trudność zastosowania wspomnianej koncepcji stateczności do konkretnego układu dynamicznego polega na konieczności wyraźnego określenia obszaru (zależnego od warunków początkowych), poza który nie mogą wyjść trajektorie fazowe.

Celem niniejszej pracy jest wskazanie drogi analitycznej, wiodącej do określenia obciążenia krytycznego, dynamicznego. Dla wyznaczenia obszaru rozwiązań statecznych wykorzystuje się koncepcję dynamicznej charakterystyki wyoboczeniowej. Pojęcia i definicje ogólne zostały zilustrowane na kilku przykładach konstrukcji o jednym oraz dwóch stopniach swobody.

Rozwiązanie zadania dynamicznego konkretnego układu wymaga uprzedniego rozwiązania zadania statycznego. W tym drugim przypadku sprawa jest o tyle prosta i jednoznaczna, że wartość krytyczna obciążenia (o danym kierunku) zależy wyłącznie od parametrów geometrycznych i sprężystych układu.

W zadaniu dynamicznym, oprócz wspomnianych czynników, na obciążenie krytyczne ma jeszcze wpływ prędkość, z jaką to obciążenie zostało osiągnięte. Dlatego mówiąc o obciążeniu krytycznym dynamicznym należy dodać, o jaki przebieg w danym przypadku chodzi. Będziemy rozważać wyłącznie przypadek obciążenia skokowego.

Ogólną teorię stateczności dynamicznej konstrukcji pod obciążeniem skokowym podali BUDIANSKY i HUTCHINSON [1, 2 i 3]. Jest to rozwinięcie i uogólnienie statecznej teorii Koitera, która dotyczy tzw. konstrukcji wrażliwych na niedokładności (odchyłki). Ogólne równania Budiansky'ego-Hutchinsona dotyczą w zasadzie układów ciągłych, ale obliczenia szczegółowe wymagają postulowania określonych form wyoboczenia, co *de facto* oznacza dyskretyzację modelu.

Przedstawiona dalej teoria dotyczy wyłącznie układów dyskretnych.

2. MODELE KONSTRUKCJI I ICH CHARAKTERYSTYKI WYBOCZENIOWE

Zespół elementów sztywnych i odkształcalnych sprężyste wraz z układem sił obciążających go nazywamy *układem dynamicznym*. Mając na uwadze układy złożone z elementów konstrukcyjnych używamy niekiedy wymiennie określenia *konstrukcja*.

Spśród znanych układów dynamicznych interesuje nas klasa układów, które w określonych warunkach mogą utracić stateczność w sensie Lapunowa; nazywamy je krótko *układami Lapunowa*. Utrata stateczności wiąże się z przeskokiem do nowej konfiguracji, która jest inna niż naturalna. Układ Lapunowa zachowuje po obciążeniu konfigurację naturalną tylko w stanie podkrytycznym.

Efektywność badań analitycznych określonej konstrukcji zależy w pewnej mierze od tego, jaki obierzemy dla niej *model matematyczny*. Rzeczywiste konstrukcje posiadają zawsze pewne odstępstwa od warunków idealnych. Dotyczy to zarówno kształtu układu (odchyłki kształtu), jak i obciążenia (np. mimośrodowość lub lokalna nierównomierność obciążenia powierzchniowego), wreszcie mogą to być odchyłki spowodowane niejednorodnością materiałową lub konstrukcyjną (użebrowanie). Jeżeli model matematyczny odzwierciedla te fakty (lub uwzględnia przynajmniej jedną z wymienionych odchyłek), to nazywamy go modelem *układu rzeczywistego*. W przeciwnym przypadku mówimy o modelu lub *układzie idealnym*.

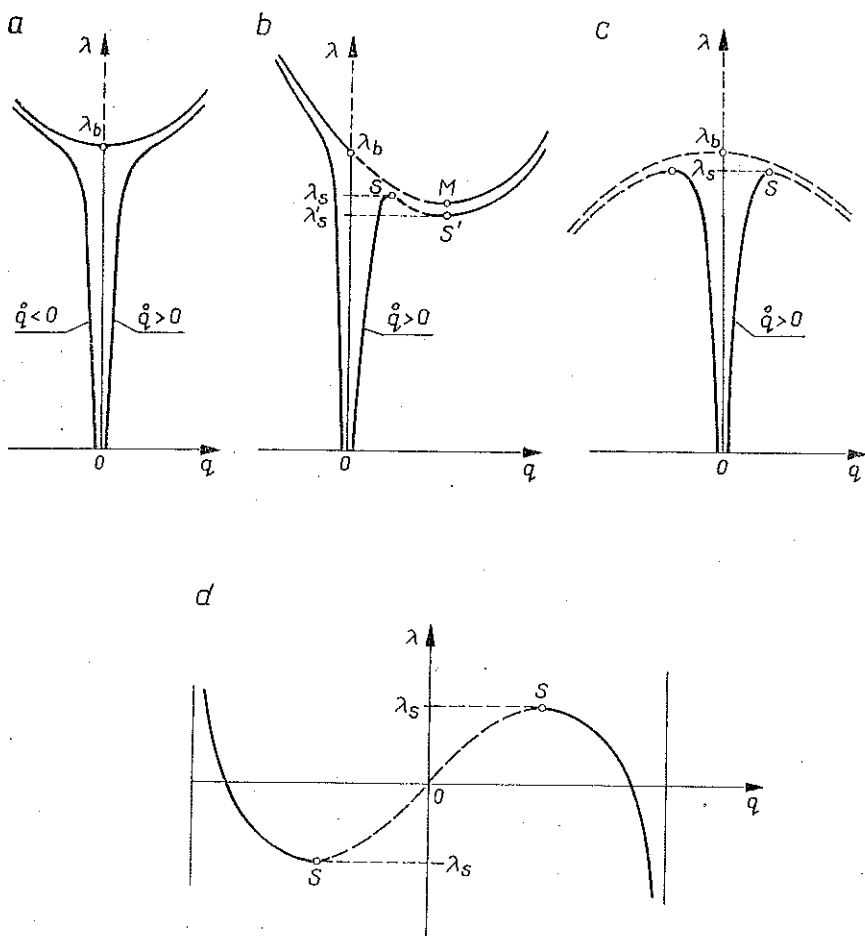
Badania analityczne modelu idealnego mają pewne znaczenie teorio-poznawcze, jednak obciążenie krytyczne takiego modelu jest z reguły dużo większe od obciążenia

krytycznego konstrukcji rzeczywistej. Wartości obliczeniowe zgodne z pomiarowymi można uzyskać tylko na gruncie teorii układu rzeczywistego.

Przedstawiona dalej metoda wyznaczania dynamicznego obciążenia krytycznego opiera się na koncepcji charakterystyki wyboczeniowej. Tak nazywamy ogólnie wykres zależności obciążenia uogólnionego od przemieszczenia uogólnionego. Będziemy rozróżniać *charakterystyki statyczne i dynamiczne*.

Funkcję opisującą obciążenie przedstawiamy ogólnie w postaci $P(t) = \lambda f(t)$, gdzie λ jest stałą, funkcja zaś $f(t)$ opisuje przebieg czasowy obciążenia, przy czym $\sup f(t) = 1$. W przypadku obciążenia statycznego $f(t) = 1$.

Dotychczas zidentyfikowano cztery typy charakterystyk statycznych: a) symetryczną, stateczną, b) niesymetryczną, c) symetryczną, niestateczną, d) antysymetryczną. Przedstawiono je na rys. 1, gdzie linie grube dotyczą konstrukcji idealnych, linie cienkie—rzeczywistych; stała \dot{q} charakteryzuje odchyłki konstrukcji rzeczywistej.



Rys. 1

Rzędna λ_b punktu przecięcia charakterystyki konstrukcji idealnej z osią rzędnych (tzn. dla $q=0$) wyznacza tzw. *obciążenie bifurkacyjne*. Matematycznie jest to wartość własna problemu brzegowego dla równania różniczkowego, które opisuje nadkrytyczne konfiguracje równowagi układu. Problem ten formułuje się jako geometrycznie liniowy, dla obliczenia bowiem obciążenia bifurkacyjnego wystarczy uwzględnić infinitezymalne ugięcia konstrukcji.

Odcinki charakterystyk oznaczone linią przerywaną odpowiadają konfiguracjom równowagi chwiejnej, a więc określają stany niestateczne. Tylko charakterystyka typu a nie posiada takich odcinków ⁽¹⁾. Charakterystyka typu c odróżnia się znów od pozostałych tym, że nie posiada odcinka stanów równowagi trwałej w zakresie nadkrytycznym.

Brak odcinka niestatecznego w przypadku a powoduje, że konstrukcje posiadające taką charakterystykę nie wykazują przeskoku w zakresie nadkrytycznym. Nie są to więc układy Lapunowa i jako takie nie będą przedmiotem naszego zainteresowania.

Konstrukcja z charakterystyką antysymetryczną d jest układem Lapunowa, lecz wykazuje małą wrażliwość na odchyłki kształtu. Jedynie konstrukcje z charakterystykami typu b i c są wrażliwe na niedokładności; ich obciążenia krytyczne (statyczne, a tym bardziej dynamiczne) są znacznie mniejsze od obciążenia bifurkacyjnego λ_b .

Poprzednio stwierdziliśmy, że obciążenie λ_b oblicza się jako wartość własną liniowego problemu brzegowego. Inaczej wygląda ta kwestia w przypadku obciążenia szybko zmiennego. Takie obciążenie wzbudza drgania układu wokół konfiguracji, która odpowiada chwilowemu poziomowi obciążenia. Jeżeli charakterystyka wybocheniowa i w tym przypadku ma ujawnić stan krytyczny układu, to musi obrazować maksymalne przemieszczenia dynamiczne $\max q(t)$, te zaś zależą m.in. od przebiegu obciążenia. Sugeruje to odmiennosć charakterystyk dynamicznych danej konstrukcji dla obciążeń o różnym przebiegu. W celu ujednoczenia wyników trzeba więc przyjąć dla obciążeń o różnym przebiegu. W celu ujednoczenia wyników trzeba więc przyjąć pewien typowy przebieg $f(t)$ jako standardowy. Najkorzystniejszy ze względów rachunkowych jest niewątpliwie przebieg skokowy (*quasi-dynamiczny*), czyli gdy $P(t) = \lambda H(t)$ (H oznacza funkcję Heaviside'a). Odpowiedni wykres funkcji $\lambda(\max q(t, \overset{\circ}{q}))$ będziemy nazywać *standardową, dynamiczną charakterystyką wybocheniową*⁽²⁾.

Niech obciążenie skokowe, działając na konstrukcję o znanej charakterystyce statycznej, wzbudza drgania tej konstrukcji o dowolnie dużej amplitudzie $a(\lambda)$. Przypuśćmy, że obciążenie statyczne o wartości λ powoduje przemieszczenie $\overset{\circ}{q}(\lambda)$. Przedziałem zmienności przemieszczeń $q(t, \overset{\circ}{q})$ po obciążeniu dynamicznym będzie przedział

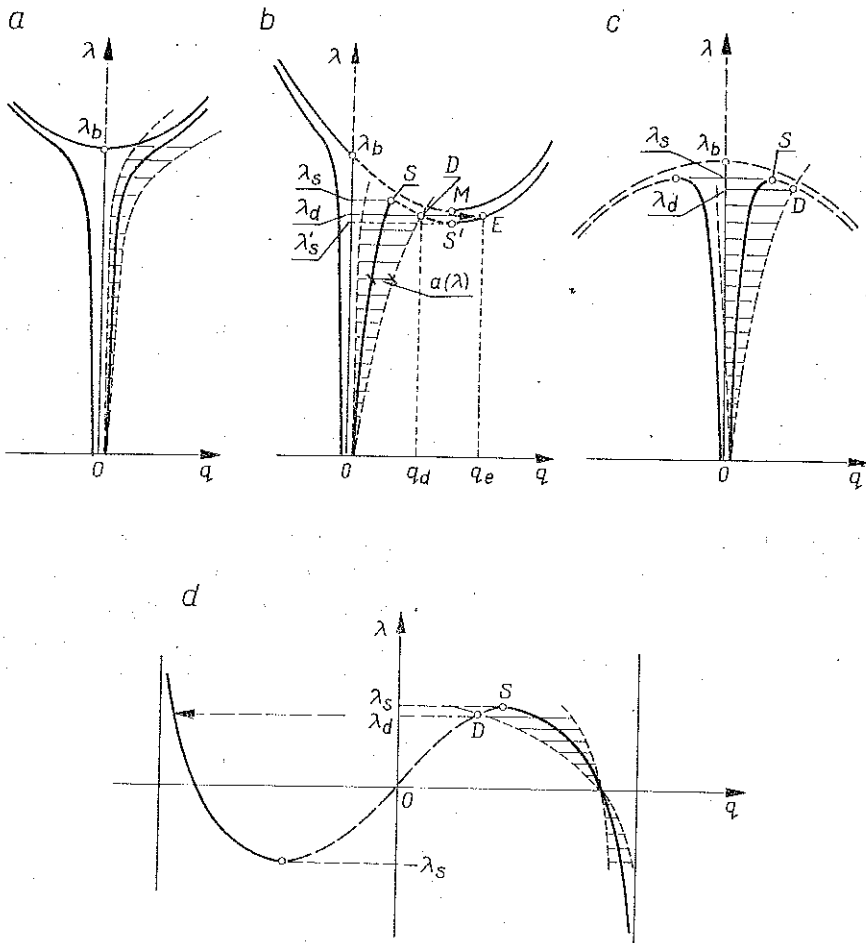
$$[\overset{\circ}{q}(\lambda) - a(\lambda), \quad \overset{\circ}{q}(\lambda) + a(\lambda)].$$

Końce odcinków o długości $a(\lambda)$, wrysowanych poziomo po obu stronach charakterystyki statycznej, wyznaczają dwa punkty. Ich miejscem geometrycznym dla róż-

⁽¹⁾ Z wyjątkiem odcinka osi rzędnych w przedziale $\lambda > \lambda_b$, co jest cechą wspólną wszystkich charakterystyk.

⁽²⁾ O ile nie zachodzi obawa nieporozumień, będziemy pomijać przymiotnik *standardowa*.

nych wartości λ są dwie krzywe, oznaczone na rys. 2 cienkimi liniami przerywanymi. Dla naszych celów interesująca jest tylko jedna z nich, mianowicie ta, która przecina w punkcie D niestateczny odcinek charakterystyki statycznej (o ile taki istnieje).



Rys. 2

Ta krzywa jest właśnie charakterystyką dynamiczną, a rzędna punktu D wyznacza krytyczne obciążenie dynamiczne: $\lambda = \lambda_d$. Po obciążeniu siłą (skokową) o tej wartości, konstrukcja przy amplitudalnym ugięciu ($\bar{q} + a$) osiągnie stan równowagi chwiejnej, a dla $\lambda > \lambda_d$ przeskoczy już do nowej konfiguracji równowagi trwałej, której odpowiada ugięcie (statyczne) q_e . Przy tej konfiguracji występuje drugie lokalne minimum energii potencjalnej układu, więc po przeskoku będzie on drgał wokół tej konfiguracji.

Konstrukcja z charakterystyką symetryczną, stateczną (rys. 2a) nie posiada dynamicznego obciążenia krytycznego. Natomiast w pozostałych przypadkach (rys. 2b,c,d) zawsze będzie $\lambda_d \leq \lambda_s$, przy czym równość $\lambda_d = \lambda_s$ zachodzi tylko dla kon-

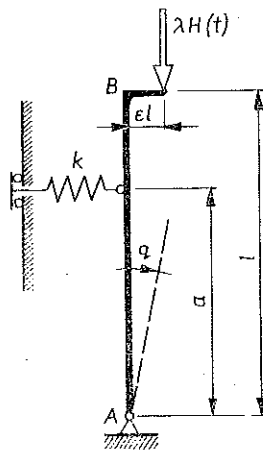
struktury idealnej. Konstrukcja z charakterystyką niesymetryczną posiada górną λ_s i dolną λ'_s wartość krytyczną obciążenia statycznego, więc $\lambda'_s \leq \lambda_d \leq \lambda_s$.

Położenie punktu krytycznego D jest określone kształtem obu charakterystyk wyboczeniowych, przy czym kształt charakterystyki dynamicznej zależy od tych czynników, które wpływają na amplitudę dużych drgań konstrukcji. Chodzi tu o takie czynniki, jak intensywność i przebieg obciążenia, kształt i sprężystość konstrukcji oraz (w modelach dyskretnych) wielkość i lokalizacja mas drgających.

Dla sporządzenia charakterystyki dynamicznej niezbędna jest znajomość amplitudy dużych drgań układu (geometrycznie lub fizycznie) nieliniowego. Obliczenie λ_d wymaga przeto w zasadzie rozwiązania układu nieliniowych, nieautonomicznych równań różniczkowych przy zerowych warunkach początkowych. Sugeruje to również teoria BUDIANSKY'EGO–HUTCHINSONA [1]. Ale w punkcie następnym wykażemy, iż w przypadku układu o jednym stopniu swobody pod obciążeniem skokowym—podejście energetyczne pozwala uniknąć rozwiązywania nieliniowego problemu początkowego, przez co obliczenia stają się nader proste.

3. PRZYKŁADY BADAŃIA STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ NIEKTÓRYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH

Układ o jednym stopniu swobody (rys. 3). Sztwywny słupek AB o wysokości l może obracać się bez tarcia w przegubie A . Sprężyna liniowa o sztywności k , mimo obrotu słupka, zachowuje położenie poziome. W układzie rzeczywistym odchyłkę reprezentuje mimośród el ($e \equiv \dot{q}$) siły obciążającej. Ta ostatnia ma stałe kierunek pionowy, zaś przebieg skokowy: $P(t) = \lambda H(t)$. Trzeba obliczyć krytyczną wartość λ_d obciążenia.



Rys. 3

Najpierw obliczymy obciążenie krytyczne, statyczne λ_s i bifurkacyjne λ_b stosując metodę energetyczną. Wielkości te można obliczyć także metodą kinetyczną (czyli przez różniczkowe równanie ruchu) lub wprost za pomocą warunków równowagi.

Gdy słup obróci się w prawo o kąt q , punkt przyłożenia obciążenia obniży się o

$$l(1 - \cos q) + \varepsilon l \sin q,$$

sprężyna zaś wydłuży się o $a \sin q$, pod działaniem siły $ka \sin q$, ($a \leq 1$). Całkowita energia potencjalna układu wynosi przeto

$$(3.1) \quad U = \frac{1}{2} ka^2 \sin^2 q - \lambda l(1 - \cos q + \varepsilon \sin q).$$

Dla uproszczenia rachunków pominięliśmy ciężar własny słupa.

W położeniu równowagi energia ta osiąga ekstremum, wobec czego

$$(3.2) \quad \frac{\partial U}{\partial q} = ka^2 \sin q \cos q - \lambda l(\sin q + \varepsilon \cos q) = 0.$$

Stąd

$$(3.3) \quad \lambda(q, \varepsilon) = \frac{ka^2}{l} \frac{\sin q}{\operatorname{tg} q + \varepsilon}.$$

Dodajmy, że jeśli mimośród jest zwrócony w lewo ($\varepsilon < 0$), to słup obraca się też w lewo ($q < 0$), ale wzór (3.3) pozostaje bez zmiany, bowiem $\lambda(-q, -\varepsilon) = \lambda(q, \varepsilon)$. Dla konstrukcji idealnej ($\varepsilon = 0$) wzór (3.3) przyjmuje postać

$$(3.4) \quad \lambda(q, 0) = \frac{ka^2}{l} \cos q.$$

Aby zbadać charakter równowagi opisanej za pomocą tej zależności, obliczamy drugą pochodną energii

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = ka^2 \cos 2q - \lambda l(\cos q - \varepsilon \sin q)$$

lub po wyrugowaniu λ z pomocą (3.3) i po wykorzystaniu pewnych tożsamości trygonometrycznych

$$(3.5) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = ka^2 \frac{\cos^2 q}{\operatorname{tg} q + \varepsilon} (-\operatorname{tg}^3 q + \varepsilon).$$

Ograniczając przedział zmienności kąta q do przedziału $[0, \pi/2]$ widzimy stąd, że $\partial^2 U / \partial q^2 = 0$ dla $\operatorname{tg}^3 q < \varepsilon$, co odpowiada równowadze trwałej. W przypadku $\operatorname{tg}^3 q = \varepsilon$ występuje równowaga chwiejna, czyli niestateczność. Dla konstrukcji idealnej warunek stateczności $\operatorname{tg}^3 q < 0$ nie może być spełniony dla $q \in [0, \pi/2]$, skąd wynika, że stany równowagi określone wzorem (3.4) są chwiejne. Z obliczeń tych wyciągamy na razie dwa wnioski: 1) rozważana konstrukcja ma charakterystykę symetryczną, niestateczną (jak na rys. 1c); jej równaniem jest równanie (3.4); 2) stan krytyczny konstrukcji rzeczywistej ($\varepsilon \neq 0$) występuje przy wychyleniu słupa o kąt $q = q_s$, spełniający równanie $\operatorname{tg}^3 q_s - \varepsilon = 0$ lub

$$|q_s| = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} |\varepsilon|^{1/3}.$$

Podstawienie tej wartości do wzoru (3.3) daje obciążenie krytyczne, statyczne konstrukcji rzeczywistej:

$$(3.6) \quad \lambda_s(\varepsilon) = \frac{ka^2}{l} (1 + \varepsilon^{2/3})^{-3/2}.$$

Obciążenie bifurkacyjne dotyczy konstrukcji idealnej, więc

$$(3.7) \quad \lambda_b \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_s(0) = \frac{ka^2}{l}.$$

Przechodząc do zadania dynamicznego korzystamy z równania Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0,$$

gdzie $T = \frac{1}{2} J_A \dot{q}^2$ oznacza energię kinetyczną słupa, który w myśl założenia jest jedynym «bezwładnym» elementem układu (J_A jest momentem bezwładności słupa względem osi obrotu). Uwzględniając (3.2) otrzymamy różniczkowe równanie ruchu:

$$(3.8) \quad J_A \ddot{q} + \frac{1}{2} ka^2 \sin 2q - P(t) (\sin q + \varepsilon \cos q) l = 0.$$

Jeśli obciążenie $P(t)$ ma przebieg dowolny, to rozwiązanie tego równania jest nader kłopotliwe. W przypadku obciążenia skokowego trudności znikają, ponieważ konstrukcja jest wtedy układem zachowawczym, więc do tego przypadku odnosi się zasada zachowania energii mechanicznej:

$$(3.9) \quad T_o + U_o = T_d + U_d,$$

gdzie indeks o oznacza chwilę początkową, indeks d chwilę, w której słup wychyłony jest maksymalnie, tzn. $q = \max q(t, \lambda) \equiv q_d$ oraz $\dot{q} = 0$. Układ nie był wstępnie odkształcony ($U_o = 0$) i nie posiadał na początku energii kinetycznej ($T_o = 0$). Ponadto przy maksymalnym wychyleniu $T(\dot{q}) \equiv T_d = 0$. Z równania (3.9) wynika więc, że

$$(3.10) \quad U_d \equiv U(q_d) = 0$$

lub po uwzględnieniu (3.1) dla $\lambda = \lambda_d$

$$(3.11) \quad \frac{1}{2} ka^2 \sin^2 q_d - \lambda_d l (1 - \cos q_d + \varepsilon \sin q_d) = 0.$$

Oprócz tego na mocy wzoru (3.3) mamy

$$(3.12) \quad \lambda(q_d, \varepsilon) = \frac{ka^2}{l} \frac{\sin q_d}{\operatorname{tg} q_d + \varepsilon} \equiv \lambda_d,$$

co po uwzględnieniu w (3.11) daje (dla $\sin q_d \neq 0$)

$$(3.13) \quad \frac{1}{2} \sin q_d - \frac{1}{\operatorname{tg} q_d + \varepsilon} (1 - \cos q_d + \varepsilon \sin q_d) = 0.$$

a po uporządkowaniu

$$(1 + \varepsilon^2) \sin^3 q_d + 4\varepsilon \sin^2 q_d - \varepsilon^2 \sin q_d - 4\varepsilon = 0.$$

Stąd

$$(3.14) \quad \sin q_d = (4\varepsilon)^{1/3} + 0 (\varepsilon^{5/3}) \quad (|\varepsilon| \ll 1)$$

i ze wzoru (3.12) otrzymamy krytyczne obciążenie dynamiczne

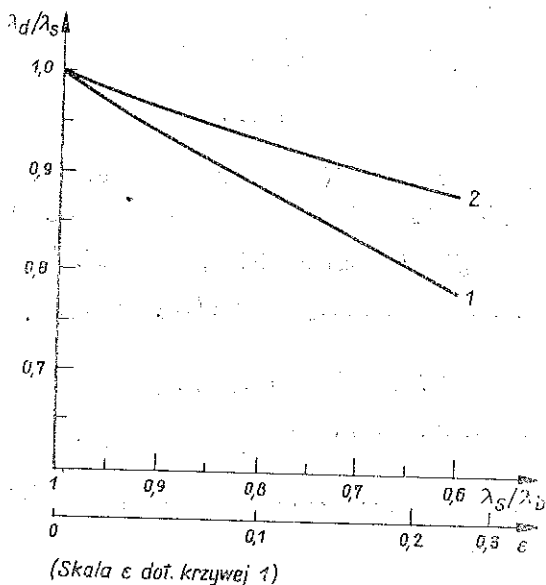
$$(3.15) \quad \lambda_d(\varepsilon) = \frac{ka^2}{l} \left(1 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} \varepsilon^{2/3} \right)^{-1}.$$

Wynik ostateczny staramy się przedstawić w postaci $\lambda_d/\lambda_s = f(\lambda_s/\lambda_b)$.

W tym celu eliminujemy z równań (3.6) i (3.15) parametr ε i otrzymujemy

$$(3.16) \quad \frac{\lambda_d}{\lambda_s} = \left\{ \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_b} \right)^{2/3} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} \left[1 - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_b} \right)^{2/3} \right] \right\}^{-1}$$

Wykresem tej funkcji jest krzywa 1 na rys. 4.



Rys. 4

Na marginesie obliczeń dotyczących przykładu szczegółowego interesujące jest zestawienie ogólnych warunków, które wykorzystaliśmy do obliczenia krytycznych obciążeń. O ile w zadaniu statycznym było

$$(3.17) \quad \frac{\partial U(q, \lambda_s)}{\partial q} \Big|_{q=q_s} = 0, \quad \frac{\partial^2 U(q, \lambda_s)}{\partial q^2} \Big|_{q=q_s} = 0,$$

o tyle w zadaniu dynamicznym skorzystaliśmy z warunków

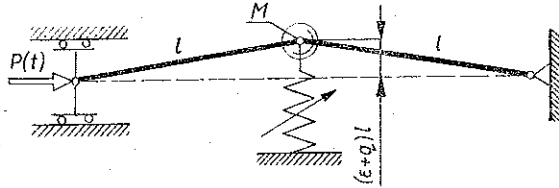
$$(3.18) \quad U(q_d, \lambda_d) = 0, \quad \left. \frac{\partial U(q, \lambda_d)}{\partial q} \right|_{q=q_d} = 0,$$

przy czym

$$U(0, \lambda_d) = 0.$$

Te ostatnie jednak są poprawne tylko w odniesieniu do układu o jednym stopniu swobody, obciążonego siłą o przebiegu skokowym. Wówczas q_d jest najmniejszym co do bezwzględnej wartości rozwiązaniem układu równań (3.18). Gdy układ ma dwa lub więcej stopni swobody, to na ogół nie ma takiej chwili $t > 0$, w której energia kinetyczna układu byłaby równa zero, wobec czego pierwszy spośród warunków (3.18) nie obowiązuje i efektywność przedstawionej metody maleje.

Inny układ o jednym stopniu swobody. Weźmy pod uwagę model przedstawiony na rys. 5 z miękką charakterystyką sprężystą, czyli dla $F = kl(q + bq^3)$, $b < 0$. Obliczymy obciążenie krytyczne λ_d przy pomocy warunków energetycznych (3.18).



Rys. 5

Układ ma wychylenie wstępne εl ($\dot{q} = \varepsilon$), przy którym sprężyna jest nieodkształcona. Odchylenie to powoduje przemieszczenie lewego przegubu o

$$2[l - \sqrt{l^2 - (\varepsilon l)^2}] = 2l(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}) \approx l\varepsilon^2.$$

Gdy po obciążeniu masa przemieści się o lq , na lewym przegubie nastąpi przemieszczenie

$$l(\varepsilon + q)^2 - l\varepsilon^2 = l(2\varepsilon q + q^2).$$

Energia potencjalna układu wynosi wówczas

$$(3.19) \quad U = \int_0^q kl^2(q + bq^3) dq - \lambda l(2\varepsilon q + q^2) = \frac{1}{2} kl^2 \left(q^2 + \frac{1}{2} bq^4 \right) - \lambda l(2\varepsilon q + q^2).$$

Z warunku

$$(3.20) \quad \frac{\partial U}{\partial q} = kl^2(q + bq^3) - 2\lambda l(\varepsilon + q) = 0$$

otrzymamy związek między obciążeniem i przemieszczeniem statycznym masy:

$$\lambda(q, \varepsilon) = \frac{kl}{2} \frac{q + bq^3}{q + \varepsilon}.$$

Jest to zarazem równanie statycznej charakterystyki wybočeníowej, która jak widać, jest również symetryczna, niestacyczna.

W przypadku konstrukcji idealnej ($\varepsilon=0$) mamy

$$\lambda(q, 0) = \frac{kl}{2}(1 + bq^2), \quad \lambda_b = \lambda(0, 0) = \frac{kl}{2}.$$

Obliczenia podobne do wykonanych poprzednio, z wykorzystaniem warunku (3.17)₂, prowadzą do uwikłanej zależności między λ_s/λ_b oraz ε :

$$(3.21) \quad \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_b}\right)^3 = -\frac{27}{4} b\varepsilon^2 \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_b}\right)^2.$$

Przechodząc do zadania dynamicznego wykorzystujemy warunki (3.18). Po uwzględnieniu wzorów (3.19), (3.20) otrzymamy

$$\lambda_b \left(q_d + \frac{1}{2} bq_d^3 \right) - \lambda_d (2\varepsilon > q_d) = 0, \quad \lambda_b (q_d + bq_d^3) - \lambda_d (\varepsilon + q_d) = 0.$$

Rugowanie niewiadomej q_d daje zależność między λ_d/λ_b oraz ε :

$$(3.22) \quad \left(1 - \frac{\lambda_d}{\lambda_b}\right)^3 = -\frac{27}{2} b\varepsilon^2 \left(\frac{\lambda_d}{\lambda_b}\right)^2.$$

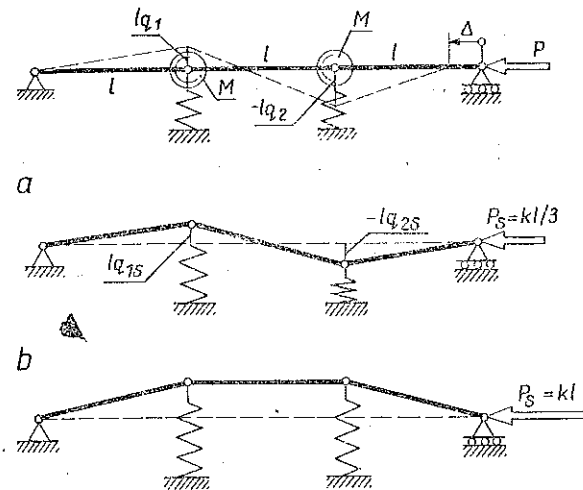
Można jeszcze z równań (3.21) i (3.22) wyrugować parametr odchyłek i wówczas otrzymamy

$$(3.23) \quad \left(\frac{1 - \frac{\lambda_d}{\lambda_s} \frac{\lambda_s}{\lambda_b}}{1 - \lambda_s/\lambda_b} \right)^3 = 2 \left(\frac{\lambda_d}{\lambda_s} \right)^2.$$

Wykresem tej funkcji jest krzywa 2 na rys. 4. Wzór powyższy otrzymali wcześniej BUDIANSKY i HUTCHINSON [1] na innej drodze.

Układ o dwóch stopniach swobody (rys. 6) ma dwie jednakowe sprężyny o charakterystyce

$$F(q_i) = kl(q_i + bq_i^3) \quad (k > 0),$$



Rys. 6

która może być sztywna ($b > 0$), miękka ($b < 0$) lub liniowa ($b = 0$). W przegubach wewnętrznych skupione są jednakowe masy M , które pod działaniem siły osiowej o przebiegu skokowym $P(t) = \lambda k l H(t)$ ulegają małym przemieszczeniom $l q_i$ ($i = 1, 2$). Trzy jednakowe pręty (o długości l) są sztywne i nieważkie. W stanie nieobciążonym konstrukcja posiada małe odchyłki $l \dot{q}_i$ od prostoliniowości.

Obliczymy najpierw parametr λ_s obciążenia krytycznego, statycznego. Stosujemy metodę energetyczną. Sprężyna wydłużona o $l q_i$ ma energię sprężystą

$$U_{si} = \int_0^{q_i} k l^2 (q_i + b q_i^3) dq_i = \frac{1}{2} k l^2 \left(q_i^2 + \frac{1}{2} b q_i^4 \right) \quad (i = 1, 2).$$

Odpowiednio dla dwóch sprężyn mamy

$$U_s = U_{s1} + U_{s2} = \frac{1}{2} k l^2 \left[q_1^2 + q_2^2 + \frac{1}{2} b q (q_1^4 + q_2^4) \right].$$

Obliczamy przemieszczenie poziome przegubu skrajnego. Odchyłki powodują, iż odległość między przegubami skrajnymi jest mniejsza od $3l$ o

$$\begin{aligned} \Delta_q^\circ &= 3l - l\sqrt{1 - \dot{q}_1^2} - l\sqrt{1 - (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2} - l\sqrt{1 - \dot{q}_2^2} \\ &= l(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2) + 0(\dot{q}_i^4). \end{aligned}$$

Po obciążeniu odległość $3l$ zmniejszy się o

$$\begin{aligned} \Delta_{q+a}^\circ &= l \left[(\dot{q}_1 + q_1)^2 + (\dot{q}_2 + q_2)^2 - (\dot{q}_1 + q_1)(\dot{q}_2 + q_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} (\dot{q}_1 + q_1)^4 + \frac{1}{8} (\dot{q}_2 + q_2 - \dot{q}_1 - q_1)^4 + \frac{1}{8} (\dot{q}_2 + q_2)^4 \right] + 0(q_i^6). \end{aligned}$$

Przemieszczenie przegubu skrajnego spowodowane wyłącznie obciążeniem wynosi więc

$$\Delta = \Delta_{q+a}^\circ - \Delta_q^\circ,$$

a całkowita energia potencjalna układu po obciążeniu siłą P

$$\begin{aligned} (3.24) \quad U = U_s - P\Delta &= \frac{1}{2} k l^2 \left[q_1^2 + q_2^2 + \frac{1}{2} b (q_1^4 + q_2^4) \right] + \\ &\quad - P l \left[q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2 + \dot{q}_1 (2q_1 - q_2) - \dot{q}_2 (q_1 - 2q_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} (\dot{q}_1 + q_1)^4 + \frac{1}{8} (\dot{q}_2 + q_2 - \dot{q}_1 - q_1)^4 + \frac{1}{8} (\dot{q}_2 + q_2)^4 \right] + 0(q_i^6). \end{aligned}$$

W położeniu równowagi energia ma wartość stacjonarną, to znaczy

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0$$

lub

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad & (q_1 + bq_1^3) - \lambda \left[2q_1 - q_2 + 2\dot{q}_1 - \dot{q}_2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + q_1)^3 - \frac{1}{2}(\dot{q}_2 + q_2 - \dot{q}_1 - q_1)^3 \right] + \\
 & + 0(q_1^5) = 0, \\
 & (q_2 + bq_2^3) - \lambda \left[2q_2 - q_1 - \dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_2 + q_2)^3 + \frac{1}{2}(\dot{q}_2 + q_2 - \dot{q}_1 - q_1)^3 \right] + \\
 & + 0(q_2^5) = 0.
 \end{aligned}$$

W stanie krytycznym ponadto musi być spełniony warunek

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)^2 = 0,$$

czyli

$$\begin{aligned}
 (3.26) \quad & \left\{ (1 + 3bq_1^2) - \lambda \left[2 + \frac{3}{2}(\dot{q}_1 + q_1)^2 + \frac{3}{2}(\dot{q}_2 + q_2 - \dot{q}_1 - q_1)^2 \right] \right\} \times \\
 & \times \left\{ (1 + 3bq_2^2) - \lambda \left[2 + \frac{3}{2}(\dot{q}_2 + q_2)^2 + \frac{3}{2}(\dot{q}_2 + q_2 - \dot{q}_1 - q_1)^2 \right] \right\} - \\
 & - \lambda^2 \left[1 + \frac{3}{2}(\dot{q}_2 + q_2 - \dot{q}_1 - q_1)^2 \right]^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Równania (3.25) służą do wyznaczenia współrzędnych $q_i = q_{is}$ w stanie krytycznym, następnie z (3.26) można obliczyć parametr krytyczny $\lambda = \lambda_b$. Obciążenie bifurkacyjne λ_b wynika wprost z równania (3.26), w którym trzeba odrzucić wyrazy nieliniowe oraz podstawić $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$. Wtedy otrzymamy

$$(1 - 2\lambda)^2 - \lambda^2 = (1 - 3\lambda)(1 - \lambda) = 0,$$

stąd wynika wprost $\lambda_b = 1/3$ ($P_b = kl/3$).

Uwzględnienie tej wartości w (3.25) prowadzi do wniosku, że $q_{1s} = -q_{2s}$, czyli że nadkrytyczna konfiguracja układu idealnego jest antysymetryczna (rys. 6a). Ten wynik sugeruje, że i układ rzeczywisty nieliniowy po wyboczeniu przyjmuje tę konfigurację.

Przechodząc do obliczenia parametru λ_s zakładamy, że układ ma jednakowe odchyłki w sensie równości $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2 = \varepsilon$. Konsekwencją tego, jak również symetrii układu, jest postulat

$$(3.27) \quad q_{1s} \approx -q_{2s} \stackrel{df}{=} q_s.$$

Dzięki temu zamiast dwóch równań (3.25) otrzymamy jedno

$$(3.28) \quad q_s + bq_s^3 - 3\lambda_s(q_s + \varepsilon) \left[1 + \frac{3}{2}(q_s + \varepsilon)^2 \right] + 0(q_s^5) = 0,$$

równanie zaś (3.26) przyjmuje postać

$$\left\{ 1 + 3bq_s^2 - 3\lambda \left[1 + \frac{9}{2}(q_s + \varepsilon)^2 \right] \right\} \left\{ 1 + 3bq_s^2 - \lambda \left[1 + \frac{3}{2}(q_s + \varepsilon)^2 \right] \right\} = a.$$

Stąd dla $\lambda = \lambda_s$ wynika

$$(3.29) \quad 1 + 3bq_s^2 - 3\lambda_s \left[1 + \frac{9}{2}(q_s + \varepsilon)^2 \right] = 0,$$

Wyrażenie bowiem w drugim nawiasie {...} odpowiada drugiej wartości krytycznej $\lambda'_s \approx 1 > \lambda_s$.

Równania (3.28), (3.29) zawierają tylko dwie niewiadome: λ_s , q_s lecz ich obliczenie nie jest łatwe ze względu na wysoki stopień równań. W dążeniu do uzyskania wzoru $\lambda_s = \lambda_s(b, \varepsilon)$ wygodnie będzie równania te rozwiązać względem λ_s i b , a wynik traktować jako parametryczne równania poszukiwanego wzoru:

$$\lambda_s = \lambda_s(q_s, \varepsilon), \quad b = b(q_s, \varepsilon).$$

Parametrem jest q_s . Obliczenia są nader proste, równania bowiem (3.28), (3.29) są liniowe względem λ_s i b . Z dokładnością do wyrazów $O(\varepsilon^2)$, $O(q_s^5)$ otrzymujemy

$$\lambda_s = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{3\varepsilon}{2q_s} \left(1 + \frac{3}{2}q_s^2 \right) \right]^{-1}, \quad b = \frac{3q_s^3 - \varepsilon \left(1 - \frac{9}{2}q_s^2 \right)}{2q_s^3 + 3\varepsilon q_s^2 \left(1 + \frac{3}{2}q_s^2 \right)}.$$

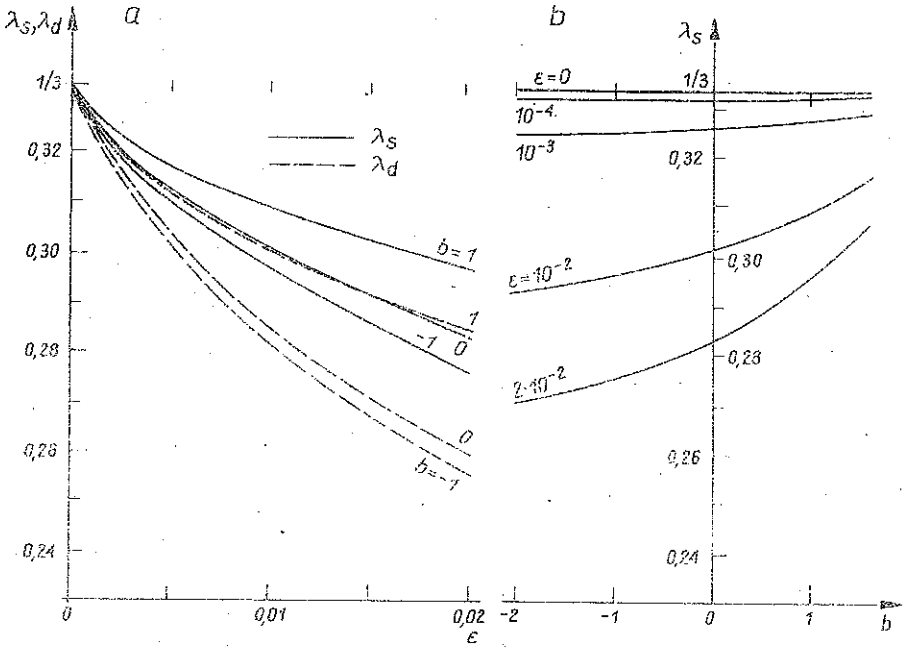
Wyniki obliczeń obrazują krzywe na rys. 7. Widoczny jest silnie redukujący wpływ odchyłek na obciążenie krytyczne, zwłaszcza gdy sprężyny mają miękką charakterystykę ($b < 0$).

Badanie stateczności dynamicznej wymaga obliczenia amplitudy drgań wzbudzonych nagłym obciążeniem. Charakterystyki wybożeniowe trzeba w ogólnym przypadku wykreślać w przestrzeni trójwymiarowej $\lambda' q_1 q_2$ (rys. 8). Jednak dzięki symetrii dyskutowanego układu charakterystyka statyczna jest krzywą płaską, mianowicie leży w płaszczyźnie pionowej o równaniu $q_1 = -q_2$. Dotyczy to zarówno charakterystyki układu idealnego, jak i rzeczywistego ($\varepsilon \neq 0$).

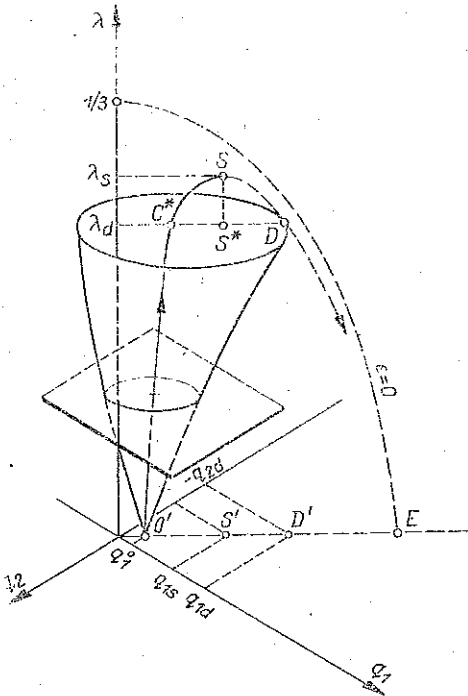
Charakterystyka dynamiczna jest poboczną stożką eliptycznego, którego osią jest stateczny odcinek QC^*S charakterystyki statycznej. Przekrój stożka płaszczyzną poziomą nazywamy *elipsą drgań* (rys. 9). Jej osie na ogół nie są równoległe do osi układu współrzędnych $Oq_1 q_2$, ponieważ $q_1(t)$, $q_2(t)$ nie są współrzędnymi głównymi. Półosie elipsy reprezentują amplitudy drgań głównych.

W chwili obciążenia ($t=0$) siłą skokową o wartości $\lambda \leq \lambda_d$ punkt reprezentatywny przeskakuje wzdłuż pobocznic stożka na elipsę właściwą danej wartości λ , po czym (dla $t \leq 0$) obiega po niej dopóty, dopóki działa obciążenie.

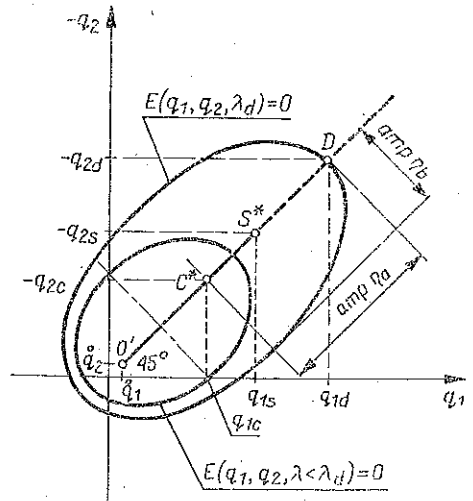
Jeśli $\lambda = \lambda_d$, to elipsa drgań styka się (w punkcie D) z niestatecznym odcinkiem SD charakterystyki statycznej. A zatem dla $\lambda \geq \lambda_d$ nastąpi przeskok na tę gałąź charakterystyki, co oznacza utratę stateczności. Rzędna punktu D wyznacza przeto krytyczne obciążenie dynamiczne.



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Wyznaczenie amplitud drgań wymaga rozwiązania różniczkowych równań ruchu:

$$Ml\ddot{q}_1 + kl(q_1 + bq_1^3) - \lambda kl \left[2(q_1 + \varepsilon) - (q_2 - \varepsilon) + \frac{1}{2}(q_1 + \varepsilon)^3 - \frac{1}{2}(q_1 - q_2 - 2\varepsilon)^3 \right] = 0,$$

$$Ml\ddot{q}_2 + kl(q_2 + bq_2^3) - \lambda kl \left[-(q_1 + \varepsilon) + 2(q_2 - \varepsilon) + \frac{1}{2}(q_2 - \varepsilon)^3 + \frac{1}{2}(q_2 - q_1 - 2\varepsilon)^3 \right] = 0$$

przy zerowych warunkach początkowych

$$q_1(0) = q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0.$$

W równaniach powyższych można pominąć wyrazy małe $O(\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + (1 - 2\lambda)q_1 + \lambda q_2 + \left(b - \frac{1}{2}\lambda\right)q_1^3 + \frac{1}{2}\lambda(q_2 - q_1)^3 = \\ = 3\varepsilon\lambda \left[1 + \frac{1}{2}q_1^2 + 2(q_2 - q_1)^2 \right], \end{aligned}$$

(3.31)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 + (1 - 2\lambda)q_2 + \lambda q_1 + \left(b - \frac{1}{2}\lambda\right)q_2^3 - \frac{1}{2}\lambda(q_2 - q_1)^3 = \\ = -3\varepsilon\lambda \left[1 + \frac{1}{2}q_2^2 + 2(q_2 - q_1)^2 \right], \end{aligned}$$

gdzie kropka u góry oznacza różniczkowanie względem $\tau = t\sqrt{k/M}$. Tym niemniej poszukiwanie rozwiązań nastęrcza duże kłopoty. Z powodu nieliniowości równań (3.31) nie można ich np. rozdzielić przez wprowadzenie współrzędnych głównych, jak to się czyni w układach liniowych. Jeżeli bowiem równania (3.31) kolejno odejmiemy i dodamy stronami, to otrzymamy

$$\begin{aligned} (q_1 - q_2)'' + (1 - 3\lambda)(q_1 - q_2) + \left(b - \frac{1}{2}\lambda\right)(q_1^3 - q_2^3) - \lambda(q_1 - q_2)^3 = \\ = 6\varepsilon\lambda \left[1 + \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2) + 2(q_1 - q_2)^2 \right], \end{aligned}$$

(3.32)

$$(q_1 + q_2)'' + (1 - \lambda)(q_1 + q_2) + \left(b - \frac{1}{2}\lambda\right)(q_1^3 + q_2^3) = \frac{3}{2}\varepsilon\lambda(q_1^2 - q_2^2).$$

Jak z tego widać podobny układ dynamiczny, lecz liniowy, ma współrzędne główne

$$(3.33) \quad q_1 - q_2 \stackrel{\text{df}}{=} \eta_a, \quad q_1 + q_2 \stackrel{\text{df}}{=} \eta_b$$

oraz częstotści własne

$$(3.34) \quad \omega_a = \sqrt{1 - 3\lambda}, \quad \omega_b = \sqrt{1 - \lambda}.$$

Ścisłej mówiąc są to częstotści bezwymiarowe, ale odpowiednie wielkości mianowane otrzymamy po pomnożeniu przez $\sqrt{k/M}$.

Jeżeli teraz przetransformujemy układ (3.32) na współrzędne (3.33) (zwane dalej *quasi-głównymi*), to otrzymamy

$$(3.35) \quad \ddot{\eta}_a + \omega_a^2 \eta_a - \lambda \eta_a^3 + \frac{1}{4} \left(b - \frac{1}{2} \lambda \right) (\eta_a^2 + 3\eta_b^2) \eta_a = 6\epsilon \lambda \left(1 + \frac{17}{8} \eta_a^2 + \frac{1}{8} \eta_b^2 \right),$$

$$\ddot{\eta}_b + \omega_b^2 \eta_b + \frac{1}{4} \left(b - \frac{1}{2} \lambda \right) (3\eta_a^2 + \eta_b^2) \eta_b = \frac{3}{2} \epsilon \lambda \eta_a \eta_b.$$

Części liniowe uległy wprawdzie rozdzieleniu, ale układ równań jako całość jest nadal sprzężony przez wyrazy nieliniowe. Głębsza analiza wykazuje jednak, iż sprzężenie to nie jest jednakowo silne dla obu współrzędnych. Mianowicie przepisując (3.35) w postaci

$$(3.36) \quad \ddot{\eta}_a + \omega_a^2 [1 - \Phi(\eta_a, \eta_b)] \eta_a = 6\epsilon \lambda \left(1 + \frac{1}{8} \eta_b^2 \right),$$

$$(3.37) \quad \ddot{\eta}_b + \omega_b^2 [1 - \Psi(\eta_a, \eta_b)] \eta_b = 0,$$

gdzie

$$(3.38) \quad \omega_a^2 \Phi(\eta_a, \eta_b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{9\lambda - 2b}{8} \eta_a^2 + \frac{3\lambda - 6b}{8} \eta_b^2 + \frac{51}{4} \epsilon \lambda \eta_a,$$

$$\omega_b^2 \Psi(\eta_a, \eta_b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda - 2b}{8} (3\eta_a^2 + \eta_b^2) + \frac{3}{2} \epsilon \lambda \eta_a$$

widzimy, że podstawienie $\eta_b = 0$ w (3.36) daje równanie

$$(3.39) \quad \ddot{\eta}_a + \omega_a^2 [1 - \Phi(\eta_a, 0)] \eta_a = 6\epsilon \lambda,$$

które mimo zerowych warunków początkowych, lecz z powodu niejednorodności, ma nietrywialne rozwiązanie $\eta_a(\tau, \lambda) \neq 0$.

Natomiast podstawienie $\eta_a = 0$ w (3.37) daje

$$(3.40) \quad \ddot{\eta}_b + \omega_b^2 [1 - \Psi(0, \eta_b)] \eta_b = 0$$

lecz odpowiedni problem początkowy ma jedynie trywialne rozwiązanie $\eta_b \equiv 0$.

Okazuje się więc, że drgania *quasi-główne* formy *a* są wzbudzone obciążeniem skokowym bezpośrednio, natomiast drgania formy *b* — parametrycznie przez drgania formy *a*. Sytuacja taka powstaje niewątpliwie w związku z postulowaną konfiguracją początkową układu, która koresponduje z drganiami formy *a* (tzn. antysymetrycznymi, (por. rys. 6a).

Z tej analizy wyciągamy pewne wnioski odnośnie do metody przybliżonego rozwiązania problemu początkowego. Stosując algorytm metody iteracyjnej rozwiążemy najpierw problem początkowy dla równania (3.39), a wynik w postaci funkcji $\eta_a^{(1)}(\tau)$ podstawimy do równania (3.37), z którego po rozwiązaniu otrzymamy $\eta_b^{(1)}(\tau)$; będzie to rozwiązanie pierwszego przybliżenia.

W podobny sposób można wyznaczyć drugie i dalsze przybliżenie, chociaż stopień komplikacji równań szybko rośnie. Ograniczymy się do obliczenia amplitud drgań w pierwszym przybliżeniu.

Równanie (3.39) można rozwiązać kilkoma metodami przybliżonymi, które są znane w dynamice nieliniowej. Wybierając metodę Kryłowa-Bogolubowa przepisujemy wspomniane równanie w postaci *quasi*-liniowej:

$$(3.41) \quad \ddot{\eta}_a + \omega_a^2 \eta_a = \varepsilon F(\eta_a),$$

$$(3.42) \quad F(\eta_a) \equiv 6\lambda + \frac{51}{4} \lambda \eta_a^2 + c \eta_a^3, \quad c \equiv \frac{9\lambda - 2b}{8\varepsilon}.$$

Rozwiązanie drugiego przybliżenia postulujemy w postaci

$$(3.43) \quad \eta_a = a \cos \psi + \varepsilon \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} A_n(a) \frac{\cos n\psi}{n^2 - 1},$$

gdzie ogólnie

$$\psi(a) = \Omega_a(a) \tau + \theta \quad (\theta = \text{const}),$$

$$\Omega_a(a) = \omega_a + \frac{\varepsilon}{2\omega_a} \frac{A_1(a)}{a} + O(\varepsilon^2),$$

$$A_0(a) = -\frac{1}{2\pi\omega_a^2} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi) d\psi,$$

$$A_n(a) = -\frac{1}{\pi\omega_a^2} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi, \quad n \geq 1.$$

W konkretnym przypadku funkcji F określonej wzorem (3.42) mamy

$$(3.44) \quad \begin{aligned} A_0 &= -\frac{\lambda}{\omega_a^2} \left(6 + \frac{51}{8} a^2 \right), & A_1 &= -\frac{3ca^3}{4\omega_a^2}, \\ A_2 &= -\frac{51\lambda a^2}{8\omega_a^2}, & A_3 &= -\frac{ca^3}{4\omega_a^2} \end{aligned}$$

itd. Spełnienie zerowych warunków początkowych wymaga, aby

$$a \cos \theta - \varepsilon A_0(a) = 0, \quad -a\omega_a \sin \theta = 0;$$

zatem $a = \varepsilon A_0$, $\theta = 0$ oraz

$$(3.45) \quad \eta_a(\tau) = -\varepsilon A_0 [1 - \cos \Omega_a(A_0) \tau] + \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} A_n(A_0) \frac{\cos n\psi}{n^2 - 1}.$$

Podstawienie $a = \varepsilon A_0$ do wzoru (3.44) daje równanie kwadratowe:

$$\varepsilon^2 A_0^2 + \frac{8}{51} \frac{\omega_a^2}{\lambda} A_0 + \frac{16}{17} = 0,$$

które dla $\lambda \leq [3(1 + \varepsilon\sqrt{17})]^{-1}$ ma pierwiastek rzeczywisty

$$(3.46) \quad A_0 \approx -\frac{6\lambda}{1-3\lambda}.$$

Celowe jest wprowadzenie drugiego (oprócz ε) małego parametru

$$\mu(\varepsilon, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{3\varepsilon\lambda}{1-3\lambda} \right)^2.$$

Teraz wzory na A_1, A_2, A_3, Ω_a przyjmują postać

$$A_1 = \frac{9\mu}{4} \frac{\lambda(9\lambda-2b)}{(1-3\lambda)^2}, \quad A_2 = -\frac{51\mu}{2} \frac{\lambda}{1-3\lambda},$$

$$A_3 = -\frac{\mu}{8} \frac{9\lambda-2b}{1-3\lambda}, \quad \Omega_a = \omega_a - \frac{3\mu}{16\omega_a^3} (9\lambda-2b).$$

Zachowując trzy pierwsze wyrazy szeregu we wzorze (3.45) otrzymamy rozwiązanie problemu początkowego dla równania (3.41) w drugim przybliżeniu

$$(3.47) \quad \eta_a^{(1)}(\tau) = \varepsilon \left[\frac{6\lambda}{1-3\lambda} (1 - \cos \psi) - \frac{17\mu}{2} \frac{\lambda}{1-3\lambda} \cos 2\psi - \frac{\mu}{64} \frac{9\lambda-2b}{1-3\lambda} \cos 3\psi \right],$$

gdzie

$$\psi = \Omega_a(\lambda, b, \mu) \tau.$$

Jak widać amplitudy wyższych harmonicznych szybko maleją ze wzrostem rzędu harmonicznej. Amplituda drgań według formy antysymetrycznej wynosi w przybliżeniu

$$(3.48) \quad \text{amp } \eta_a = \frac{12\varepsilon\lambda}{1-3\lambda} \left[1 + \frac{\mu}{24} \left(17 - \frac{b}{16\lambda} \right) \right] \approx \frac{12\varepsilon\lambda}{1-3\lambda}.$$

Zanim przejdziemy do obliczenia $\text{amp } \eta_b$, zwróćmy uwagę na elipsę drgań, wykreśloną dla $\lambda = \lambda_d$ (rys. 9). Jej półosie są równe amplitudom drgań *quasi-głównych*. Poprzednio stwierdziliśmy, że z powodu symetrii układu charakterystyka statyczna jest krzywą płaską. Jej rzut na płaszczyznę $Oq_1 q_2$ jest przeto prostą $O' C^* S^* D$, dwusieczną kąta prostego między osiami Oq_1 i Oq_2 . Fakt ten znakomicie ułatwia wyznaczenie współrzędnych punktu krytycznego D . Mianowicie

$$q_{1d} = q_{1c} + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{amp } \eta_a(\lambda_d), \quad q_{2d} = q_{2c} - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{amp } \eta_a(\lambda_d).$$

Ponieważ współrzędne punktów leżących na tej prostej spełniają relacje $q_{1c} = -q_{2c} \equiv q_c$ i podobnie $q_{1d} = -q_{2d} \equiv q_d$, więc wzory powyższe reprezentują w gruncie rzeczy jedną zależność

$$(3.49) \quad q_d = q_c + \frac{6\sqrt{2}\varepsilon\lambda_d}{1-3\lambda_d}.$$

Uwzględniono tu od razu wzór (3.48) na $\text{amp } \eta_a(\lambda)$ dla $\lambda = \lambda_d$. Jak widać obliczenie $\text{amp } \eta_b$ jest w tym przypadku zbędne.

Dla dalszych obliczeń istotny jest fakt, że zarówno punkt C , jak i D leżą na charakterystyce statycznej (rys. 8) z tym zastrzeżeniem, że pierwszy leży na statecznym, a drugi na niestatecznym odcinku tej krzywej. W każdym razie współrzędne obu punktów muszą spełniać równanie (3.28), w którym zamiast λ_s trzeba podstawić λ_d . Tak otrzymujemy

$$(3.50) \quad \left(\frac{9}{2}\lambda_d - b\right)q^3 + \frac{27}{2}\varepsilon\lambda_d q^2 - (1 - 3\lambda_d)q + 3\varepsilon\lambda_d = 0.$$

W określonym przedziale wartości b i ε równanie to ma trzy pierwiastki rzeczywiste, z których mniejszy, dodatni określa współrzędną q_c , a większy q_d . Podstawienie tych wartości w (3.49) daje równanie z jedną niewiadomą λ_d . Poszukiwana wartość krytyczna obciążenia dynamicznego (skokowego) równa się $\lambda_d k l$.

Szczegółowe obliczenia są dość uciążliwe ze względu na wysoki stopień równania (3.50) i jeszcze wyższy stopień równania końcowego dla λ_d . W przybliżeniu pierwiastki q_c , q_d można oszacować z dwóch różnych równań kwadratowych. Współrzędna q_c jest bardzo mała ($q_c < q_s$), więc sześcienny wyraz równania (3.50) jest mały wobec pozostałych. Dlatego q_c oszacujemy jako mniejszy pierwiastek równania

$$\frac{27}{2}\varepsilon\lambda_d q^2 - (1 - 3\lambda_d)q + 3\varepsilon\lambda_d = 0.$$

Stąd

$$(3.51) \quad q_c \approx \frac{6\varepsilon\lambda_d}{1 - 3\lambda_d}.$$

Współrzędna q_d jest znacznie większa od q_c . W tym przypadku wyraz wolny $3\varepsilon\lambda_d$ jest mały wobec pozostałych wyrazów równania (3.50) i dlatego q_d można oszacować jako większy spośród dwóch pierwiastków równania

$$\left(\frac{9}{2}\lambda_d - b\right)q^2 + \frac{27}{2}\varepsilon\lambda_d q - (1 - 3\lambda_d) = 0.$$

Stąd

$$q_d \approx \sqrt{\frac{2(1 - 3\lambda_d)}{9\lambda_d - 2b}} - \frac{27\varepsilon\lambda_d}{2(9\lambda_d - 2b)}.$$

Wykorzystanie tych wzorów we wzorze (3.49) daje poszukiwaną zależność $f(\lambda_d, \varepsilon, b) = 0$ w postaci uwikłanej:

$$(3.52) \quad \sqrt{\frac{2(1 - 3\lambda_d)}{9\lambda_d - 2b}} = \frac{27\varepsilon\lambda_d}{2(9\lambda_d - 2b)} \left[1 + \frac{4(1 + \sqrt{2})(9\lambda_d - 2b)}{9(1 - 3\lambda_d)} \right].$$

Jej obrazem są krzywe na rys. 7a (linie przerywane), wykreślone dla trzech wartości b , charakteryzujących sprężynę sztywną ($b=1$), miękką ($b=-1$) i liniową ($b=0$). Wykres ten stanowi rozwiązanie problemu stateczności dynamicznej układu przedstawionego na rys. 6. Widoczny jest silnie redukujący wpływ odchyłek na obciążenie krytyczne. Np. już dla $\varepsilon=0,02$ krytyczne obciążenie dynamiczne stanowi $\sim 89\%$ obciążenia statycznego.

4. WNIOSKI

Przedstawiona teoria oraz przykłady obrazują ogólną metodę wyznaczania dynamicznego obciążenia krytycznego układów dyskretnych. Cel osiąga się stosunkowo prosto jedynie w przypadku układu o jednym stopniu swobody pod obciążeniem skokowym. Model o dwóch lub większej liczbie stopni swobody wymaga już rozwiązania problemu początkowego dla układu równań różniczkowych, nieliniowych ze współczynnikami okresowymi. Sprawa komplikuje się jeszcze bardziej, gdy układ jest niesymetryczny, a przebieg obciążenia dowolny (różny od skokowego).

W tym przypadku, jak się zdaje, jedyna droga do obliczenia wartości λ_d prowadzi przez numeryczne badanie przebiegu rozwiązań uzyskiwanych kolejno dla coraz większych wartości parametru λ .

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. BUDIANSKY, J. W. HUTCHINSON, *Dynamic buckling of imperfection sensitive structures*, Proceed. XIth Internat. Congr. Appl. Mech. 636-651, Berlin 1964.
2. B. BUDIANSKY, *Theory of buckling and post-buckling behaviour of elastic structures*, Adv. Appl. Mech. 14, 1-65, 1974.
3. B. BUDIANSKY, *Dynamic buckling of elastic structures: criteria and estimates*, Dynamic Stability of Structures, Perg. Press, 83-106, Oxford 1966.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Известное понятие статической характеристики выпучивания обобщено на случай динамической нагрузки. На этой концепции основывается метод вычисления динамической критической нагрузки дискретных систем. Рассуждения и общие теоремы иллюстрирует несколько примеров исследования нелинейных систем с одной или двумя степенями свободы под шаговой нагрузкой.

SUMMARY

DYNAMIC STABILITY OF DISCRETE SYSTEMS

The well-known approach to the problem of buckling under static loads is generalized to the case of dynamic loading and applied to the analysis of dynamic stability of discrete systems. General theorems and details of the procedure are illustrated by several examples concerning the stability of nonlinear systems with one or two degrees of freedom, subject to loads expressed in terms of step functions of time.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 stycznia 1979 r.