

## ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIŃ STATYCZNYCH POWŁOK OBROTOWYCH PRZY ZASTOSOWANIU METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

JERZY GOŁAŚ (OPOLE)

Podano ogólną metodę numerycznego rozwiązania zagadnień statyki dla cienkich powłok obrotowych, których tworzące nie przecinają osi obrotu. Rozwiązania numeryczne uzyskano metodą elementów skończonych. Typowym elementem skończonym jest krzywoliniowy stożek ścięty, którego tworząca jest aproksymowana dowolnie dokładnie wielomianem algebraicznym. Dzięki temu jeden program na maszynie cyfrową obejmuje analizę statyczną wszystkich wyżej wymienionych powłok obrotowych. Podany ogólny algorytm obliczeń uwzględnia również wpływy osiowo-symetrycznych niedokładności wykonawczych powierzchni powłoki. Opracowany program obliczeniowy na komputer został zastosowany do szeregu przykładów liczbowych.

### 1. WSTĘP

W pracy podaje się ogólną metodę rozwiązywania zagadnień statycznych dla szerokiej klasy powłok obrotowych dowolnie obciążonych, przy zastosowaniu metody elementów skończonych. Algorytm obliczeń obejmuje wszystkie cienkie powłoki obrotowe, których tworzące nie przecinają osi obrotu. Elementem skończonym jest krzywoliniowy stożek ścięty, którego tworząca jest aproksymowana dowolnie dokładnie wielomianem algebraicznym. Jest to uogólnienie znanej metody szeregowo-elementowej stosowanej do obliczeń statycznych powłok obrotowych [7 i 8]. Uogólnienie to polega na tym, że (jak wykażemy w dalszej części pracy) można stworzyć jeden algorytm (jeden program na maszynę cyfrową), który będzie obejmował analizę statyczną wszystkich wyżej wymienionych powłok. Za podstawę rozwiązania przyjęto geometrycznie i fizycznie liniową teorię powłok cienkich [6], przy czym nie jest to ograniczeniem przedstawionego poniżej algorytmu.

Algorytm nasz obejmuje ponadto wpływ osiowo-symetrycznych niedokładności wykonawczych powierzchni powłoki. Przykład liczbowy (4.3) będzie dotyczył rozwiązania powłoki hiperboidalnej chłodni kominowej obciążonej ciężarem własnym i parciem wiatru, w której nastąpiło wstępne odchylenie powierzchni środkowej.

Praca jest uogólnieniem i dalszą kontynuacją prac [3 i 4].

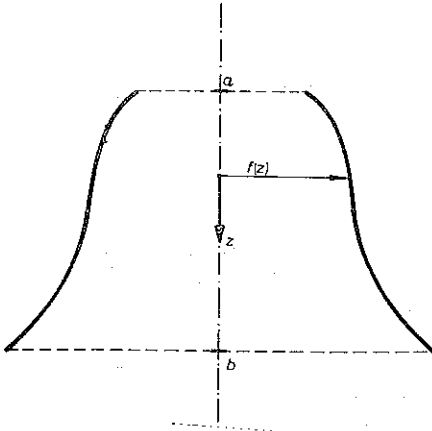
### 2. ALGORYTM OBLICZEŃ

Niech dana będzie cienka powłoka obrotowa (rys. 1), której tworząca jest opisana równaniem

$$(2.1) \quad f=f(z), \quad f \in C \langle a, b \rangle,$$

gdzie  $C \langle a, b \rangle$  jest przestrzenią funkcji ciągłych w przedziale domkniętym  $\langle a, b \rangle$ .

Jak wiadomo [6] przy ustalonym materiale i ustalonych warunkach brzegowych stan przemieszczeń i sił wewnętrznych w powłoce zależy od jej obciążenia i kształtu. Oznacza to między innymi, że uwzględniając krzywoliniowy element dla rozwiązania



Rys. 1. Powłoka obrotowa

W dalszym ciągu tego rozdziału założymy, że znany już jest wielomian  $W_n(z)$  stopnia co najwyżej  $n$ , który przybliży tworzącą  $r(z)$  z dokładnością  $\varepsilon$  w sensie (2.2). Metoda znajdowania wielomianu  $W_n(z)$  będzie podana w następnym punkcie niniejszej pracy.

Założmy, że przy danym  $\varepsilon$  wielomian aproksymacyjny jest postaci

$$(2.3) \quad r = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-3} z^3 + a_{n-2} z^2 + a_{n-1} z + a_n.$$

Kolejne jego pochodne są następujące:

$$\frac{dr}{dz} = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \dots + 3 a_{n-3} z^2 + 2 a_{n-2} z + a_{n-1},$$

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = n(n-1) a_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 z^{n-3} + \dots + 3 \cdot 2 a_{n-3} z + 2 \cdot 1 a_{n-2},$$

$$\frac{d^3 r}{dz^3} = n(n-1)(n-2) a_0 z^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_1 z^{n-4} + \dots + 3 \cdot 2 \cdot 1 a_{n-3}.$$

Współczynniki Lamégo krzywoliniowego układu współrzędnych  $r, z$  oraz promienie głównych krzywizn powierzchni środkowej są następujące:

$$(2.4) \quad A = \sqrt{\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + 1}, \quad B = r,$$

$$R_1 = -\frac{A^3}{d^2 r}, \quad R_2 = rA.$$

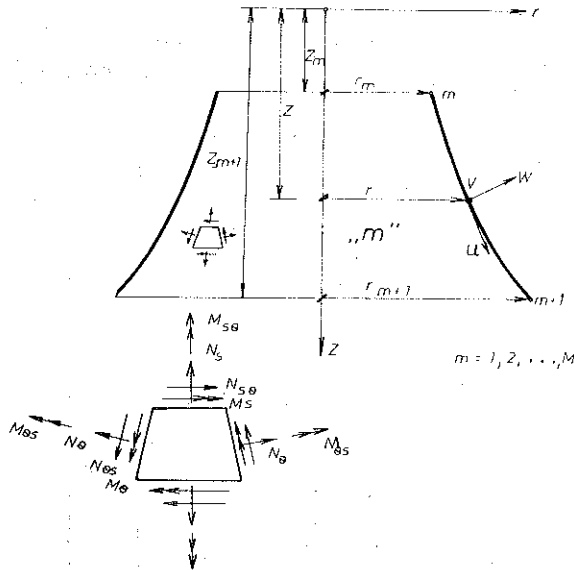
powłok o różnych postaciach funkcji (2.1) należałoby opracować inny algorytm obliczeń na maszynie cyfrową.

W analizie numerycznej [1] znane jest twierdzenie (tzw. twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa), że każdą funkcję ciągłą w przedziale domkniętym  $\langle a, b \rangle$  da się dowolnie dokładnie przybliżyć wielomianem algebraicznym, tzn.

$$(2.2) \quad \bigwedge_{f(z) \in C\langle a, b \rangle} \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{r_n(z) \in W} \max_{a \leq z \leq b} |f(z) - r_n(z)| < \varepsilon,$$

gdzie  $W$  jest zbiorem wielomianów algebraicznych określonych na przedziale  $\langle a, b \rangle$ .

Zastosujemy następnie standardowy tok postępowania metody elementów skończonych [7 i 8]. W tym celu powłokę dzielimy płaszczyznami prostopadłymi do osi obrotu na skończoną liczbę elementów. Przy podziale na  $M$  elementów otrzymamy  $M+1$  węzłów. Rozważmy  $m$ -ty element powłoki (rys. 2).



Rys. 2.  $m$ -ty element powłoki obrotowej, przemieszczenia i wypadkowe siły wewnętrzne

W przypadku dowolnego obciążenia należy uwzględnić trzy składowe przemieszczeń powłoki  $u, v, w$  — odpowiednio w kierunku południkowym, równoleżnikowym i prostopadłym do powierzchni środkowej powłoki oraz sześć składowych sił wewnętrznych  $N_s, N_\theta, N_{s\theta} = N_{\theta s}, M_s, M_\theta, M_{s\theta} = M_{\theta s}$ . Funkcje kształtu definiujące przemieszczenia oraz wektor obciążeń możemy rozwinąć w szereg Fouriera względem współrzędnej równoleżnikowej  $\eta$ ; otrzymamy

$$(2.5) \quad \{f\}^{(m)} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N]^{(m)} \{\delta\}^{(m)} = \sum_{l=0}^L \{[\bar{N}(z)] \cos l\eta + [\bar{N}(z)] \sin l\eta\} \{\delta\}^m,$$

$$(2.6) \quad \{p\}^{(m)} = \sum_{l=0}^L (\{\bar{p}(z)\} \cos l\eta + \{\bar{p}(z)\} \sin l\eta),$$

gdzie funkcje kształtu są wielomianami 3-go stopnia względem  $z$ , przy czym  $l$ -ta harmoniczna rozwinięcia wektora przemieszczenia ma postać:

$$(2.7) \quad \{\delta\}^{l(m)} = \left\{ u_m^l, \left( \frac{du}{dz} \right)_m^l, v_m^l, \left( \frac{dv}{dz} \right)_m^l, w_m^l, \left( \frac{dw}{dz} \right)_m^l; u_{m+1}^l, \dots, \left( \frac{dw}{dz} \right)_{m+1}^l \right\}^T.$$

W efekcie standardowego postępowania metody elementów skończonych otrzymamy do rozwiązania  $L+1$  podukładów liniowych równań algebraicznych typu

$$(2.8) \quad [K]^l \{\delta\}^l = -\{F\}^l, \quad l=0, 1, \dots, L,$$

gdzie  $[K]^l$  oznacza macierz sztywności układu dla  $l$ -tej harmonicznej,  $\{\delta\}^l$  wektor uogólnionych przemieszczeń oraz  $\{F\}^l$  wektor obciążeń dla  $l$ -tej harmonicznej.

Całkowite rozwiązanie otrzymamy jako superpozycję rozwiązań poszczególnych harmonicznych. Wystarczy zatem rozpatrzyć zagadnienie dla ustalonej  $l$ -tej harmonicznej.

Wektor przemieszczeń dla obciążenia (np. wiatrem), o którym zakładamy, że jest symetryczne względem pionowej płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu powłoki, ma postać

$$(2.9) \quad \{f\}^{l(m)} = \begin{Bmatrix} u^{l(m)} \\ v^{l(m)} \\ w^{l(m)} \end{Bmatrix} = [N]^{l(m)} \{\delta\}^{l(m)},$$

gdzie

$$[N]^{l(m)} = \begin{bmatrix} N_1 \cos l\eta & 0 & 0 \\ N_2 \cos l\eta & 0 & 0 \\ 0 & N_1 \sin l\eta & 0 \\ 0 & N_2 \sin l\eta & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \cos l\eta \\ 0 & 0 & N_2 \cos l\eta \\ N_3 \cos l\eta & 0 & 0 \\ N_4 \cos l\eta & 0 & 0 \\ 0 & N_3 \sin l\eta & 0 \\ 0 & N_4 \sin l\eta & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \cos l\eta \\ 0 & 0 & N_4 \cos l\eta \end{bmatrix},$$

$$N_1 = 1 - 3 \left( \frac{z - z_m}{z_{m+1} - z_m} \right)^2 + 2 \left( \frac{z - z_m}{z_{m+1} - z_m} \right)^3,$$

$$N_2 = z - z_m - 2 \frac{(z - z_m)^2}{z_{m+1} - z_m} + \frac{(z - z_m)^3}{(z_{m+1} - z_m)^2},$$

$$N_3 = 3 \left( \frac{z - z_m}{z_{m+1} - z_m} \right)^2 - 2 \left( \frac{z - z_m}{z_{m+1} - z_m} \right)^3,$$

$$N_4 = - \frac{(z - z_m)^2}{z_{m+1} - z_m} + \frac{(z - z_m)^3}{(z_{m+1} - z_m)^2}.$$

Stan odkształcenia powłoki określa wektor

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \gamma, \kappa_s, \kappa_\theta, \tau\}^T;$$

można go przedstawić w postaci macierzowej następująco:

$$(2.10) \quad \{\varepsilon\} = [G] \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, v, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial \eta}, w, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \eta} \right\}^T = [G] \{\mathcal{F}\}^T.$$

Dla przyjętych zależności między składowymi stanu odkształcenia i składowymi stanu przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki (np. według NOWOŻIŁOWA [6]), macierz  $[G]$  ma postać

$$(2.11) \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_4 & G_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_6 & G_7 & G_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_9 & G_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{11} & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ G_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{14} & 0 & G_{15} & 0 & 0 & G_{16} \\ 0 & 0 & G_{17} & G_{18} & G_{19} & 0 & 0 & 0 & G_{20} & 0 & 0 & G_{21} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{A}, & G_2 &= -\frac{1}{A^3} \frac{d^2 r}{dz^2}, & G_3 &= \frac{1}{rA} \frac{dr}{dz}, & G_4 &= \frac{1}{r}, \\ G_5 &= \frac{1}{rA}, & G_6 &= \frac{1}{r}, & G_7 &= -\frac{1}{rA} \frac{dr}{dz}, & G_8 &= \frac{1}{A}, \\ G_9 &= \frac{1}{A^5} \left[ \frac{3}{A} \frac{dr}{dz} \left( \frac{d^2 r}{dz^2} \right)^2 - A \frac{d^3 r}{dz^3} \right], & G_{10} &= -\frac{1}{A^4} \frac{d^2 r}{dz^2}, \\ G_{11} &= \frac{1}{A^4} \frac{dr}{dz} \frac{d^2 r}{dz^2}, & G_{12} &= -\frac{1}{A^2}, & G_{13} &= -\frac{1}{rA^4} \frac{dr}{dz} \frac{d^2 r}{dz^2}, \\ G_{14} &= \frac{1}{r^2 A}, & G_{15} &= -\frac{1}{rA^2} \frac{dr}{dz}, & G_{16} &= -\frac{1}{r^2}, & G_{17} &= -\frac{1}{rA^3} \frac{d^2 r}{dz^2}, \\ G_{18} &= -\frac{2}{r^2 A^2} \frac{dr}{dz} \left( 1 + \frac{r}{2A^2} \frac{d^2 r}{dz^2} \right), & G_{19} &= \frac{1}{rA^2}, & G_{20} &= \frac{2}{r^2 A} \frac{dr}{dz}, \\ G_{21} &= -\frac{2}{rA}. \end{aligned}$$

Na podstawie (2.5), (2.7) i (2.9) można dla  $l$ -tej harmonicznej wektor  $\{\mathcal{F}\}$  wyrazić przez przemieszczenia linii węzłowych elementu:

$$(2.12) \quad \{\mathcal{F}\}^{l(m)} = [\tilde{N}]^{l(m)} \{\delta\}^{l(m)},$$

gdzie  $[\tilde{N}]^{l(m)}$  jest macierzą o wymiarach  $12 \times 12$  zbudowaną odpowiednio z iloczynów funkcji  $N_i$ ,  $dN_i/dz$ , ( $i=1, 2, 3, 4$ ) przez funkcje  $\sin l\eta$ ,  $\cos l\eta$ , ( $l=0, 1, \dots, L$ ).

Odkształcenia  $\{\varepsilon\}$  i siły wewnętrzne  $\{\sigma\} = \{N_s, N_\theta, N_{s\theta}, M_s, M_\theta, M_{s\theta}\}$ , dla  $l$ -tej harmonicznej możemy napisać w postaci

$$(2.13) \quad \{\varepsilon\}^{l(m)} = [G] [\tilde{N}]^{l(m)} \{\delta\}^{l(m)} = [B]^{l(m)} \{\delta\}^{l(m)},$$

$$(2.14) \quad \{\delta\}^{l(m)} = [D] \{\varepsilon\}^{l(m)},$$

gdzie  $[D]$  jest znaną macierzą sprężystości [7] o wymiarach  $6 \times 6$ , dla której zakłada się liniową zmienność grubości powłoki w elemencie

$$h(z) = \frac{h_m z_{m+1} - h_{m+1} z_m}{z_{m+1} - z_m} + \frac{h_{m+1} - h_m}{z_{m+1} - z_m} z.$$

Warunek równowagi dla  $m$ -tego elementu od  $l$ -tej harmonicznej rozwinięcia określa się za pomocą wzoru

$$(2.15) \quad \{F\}^{l(m)} = [k]^{l(m)} \{\delta\}^{l(m)} + \{F\}_m^{l(m)},$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

macierz sztywności

$$(2.16) \quad [k]^{l(m)} = \int_{V^e} [\bar{N}]^{l(m)T} [G]^T [D] [G] [\bar{N}]^{l(m)} r \sqrt{\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + 1} dz d\eta,$$

wektor sił węzłowych

$$(2.17) \quad \{F\}_w^{l(m)} = - \int_{V^e} [\bar{N}]^{l(m)T} \{p\}_w^l r \sqrt{\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + 1} dz d\eta,$$

$\{p\}_m^l$  —  $l$ -ta harmoniczna rozwinięcia obciążenia wiatrem.

Dalsze postępowanie metody elementów skończonych polega na odpowiednim tworzeniu układów równań (2.8) i ich rozwiązań dla poszczególnych harmonicznych, całkowite zaś końcowe rozwiązania dla wektora przemieszczeń i sił wewnętrznych są superpozycją poszczególnych wyników.

Przypadek obciążenia ciężarem własnym sprowadza zagadnienie do stanu osiowo-symetrycznego i jest w pewnym sensie przypadkiem szczególnym, dobrze opracowanym w literaturze. Z tych też powodów nie będzie szczegółowo omawiany.

### 3. APROKSYMACJA TWORZĄCEJ POWŁOKI

Spośród wszystkich wielomianów przybliżających funkcję  $f(z)$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$  w sensie (2.2) wielomianem mającym najniższy stopień (a zatem najbardziej przydatnym do obliczeń) będzie  $n$ -ty wielomian optymalny [1], tzn. wielomian  $r_n(z)$ , który spełnia warunek

$$(3.1) \quad \max_{z \in \langle a, b \rangle} |f(z) - r_n(z)| = \inf_{W_n(z) \in W} \{ \max_{z \in \langle a, b \rangle} |f(z) - W_n(z)| \}.$$

Z teorii aproksymacji [1] wiadomo, że dla każdej funkcji  $f(z) \in C \langle a, b \rangle$  istnieje dokładnie jeden wielomian  $r_n(z)$ , które spełnia (3.1).

Jest oczywiste, że przedstawiony w punkcie poprzednim algorytm może być realizowany jedynie na maszynach cyfrowych. Zatem wszelkie dane (również dotyczące tworzącej) do obliczeń muszą być podane w postaci liczbowej. Zakładamy, że dane dotyczące kształtu powłoki mają postać skończonego zbioru punktów

$$F = \{z_1, f_1; z_2, f_2; \dots; z_p, f_p\}, \quad \text{gdzie } p > n$$

oraz gdzie  $a \leq z_i \leq b$ ,  $z_i \neq z_j$  dla  $i \neq j$ ,  $f_i = f(z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Dla każdej powłoki obrotowej dane te łatwo zgromadzić.

Na zbiorze  $F$  skonstruujemy wielomian

$$r_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

który w przybliżeniu będzie  $n$ -tym wielomianem optymalnym dla funkcji  $f(z)$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$  i który przybliży funkcję  $f(z)$  na zbiorze  $F$  z dokładnością  $\varepsilon$ , tzn.

$$(3.2) \quad \max_{z_i \in F} |f(z_i) - r_n(z_i)| < \varepsilon$$

(jest to tzw. aproksymacja jednostajna).

Współczynniki wielomianu  $r_n(z)$  tworzy się metodą Remez'a [1], str. 303–307. Metoda ta oparta jest na twierdzeniu Czebyszewa (twierdzenie o alternansie). Wielomian  $r_n(z)$  tworzy się w sposób rekurencyjny. Najpierw znajduje się wielomian  $r_{n,0}(z)$  taki, że na zbiorze  $F$  istnieją  $n+2$  punkty  $z_1 < z_2 < \dots < z_{n+2}$  takie, że różnica

$$\Delta_0(z_i) = f(z_i) - r_{n,0}(z_i)$$

ma znaki naprzemienne. Następnie oblicza się poprawkę  $r_0(z)$  dla wielomianu  $r_{n,0}(z)$ . Poprawkę tę znajduje się jako wielomian optymalny dla funkcji  $\Delta_0(z)$  na zbiorze punktów

$$z_1^{(0)} < z_2^{(0)} < \dots < z_{n+2}^{(0)} \quad (z_i^{(0)} \in F),$$

w którym wartości  $\Delta_0(z_i^{(0)})$  mają znaki naprzemienne. Jako pierwsze przybliżenie wielomianu  $r_n(z)$  przyjmuje się wielomian

$$r_{n,1}(z) = r_{n,0}(z) + r_0(z).$$

Następnie rozpatruje się funkcję  $\Delta_1(z) = f(z) - r_{n,1}(z)$  i szuka się poprawki  $r_1(z)$  analogicznie do  $r_0(z)$ .

Ogólny wzór rekurencyjny wygląda więc następująco:

$$r_{n,i}(z) = r_{n,i-1}(z) + r_{i-1}(z) \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

$$r_n(z) \approx r_{n,m}(z).$$

W przeprowadzonych obliczeniach na maszynie cyfrowej skorzystano z procedury bibliotecznej komputera ODRA 1204 o nazwie REMEZ 2.

Współczynniki wielomianu  $r_n(z)$  można tworzyć innymi metodami, np. metodą najmniejszych kwadratów, w której szuka się współczynników  $a_0, a_1, \dots, a_n$  wielomianu  $r_n(z)$  takich, aby

$$\sum_{j=1}^n [r_n(x_j) - f(x_j)]^2 = \min$$

(jest to tzw. aproksymacja średnio kwadratowa).

W zamieszczonym w następnym punkcie przykładzie dotyczącym hiperboloidalnej chłodni kominowej uzyskano identyczne wyniki przy obu metodach aproksymacji. Wydaje się jednak, że w ogólnym przypadku powłok obrotowych bardziej sensowna jest aproksymacja jednostajna, Np. dla tworzącej w kształcie hiperboli o równaniu

$$(3.3) \quad \frac{f^2}{43,03^2} - \frac{z^2}{101,807^2} = 1,$$

dla  $\varepsilon=10^{-3}$  otrzymano na zbiorze

$$F = \left\{ z_i, f_i: z_i = 52,70 - 86,95 \cos\left(\frac{\pi_i}{69}\right), f_i = 43,03 \sqrt{1 + \frac{z_i^2}{101,807^2}}, \right. \\ \left. i=0, 1, \dots, 69 \right\},$$

następujący wielomian aproksymacyjny:

$$(3.4) \quad r_7(z) = -2,9896 \cdot 10^{-15} z^7 + 6,6717 \cdot 10^{-13} z^6 + 1,4082 \cdot 10^{-10} z^5 - \\ - 5,0682 \cdot 10^{-8} z^4 - 2,1728 \cdot 10^{-7} z^3 + 2,0787 \cdot 10^{-3} z^2 + \\ + 8,1594 \cdot 10^{-5} z + 43,02955.$$

Dokładność aproksymacji tworzącej w wybranych punktach charakterystycznych przedstawia tablica 1.

Tablica 1

$i$	$z_i$ dane	$f_i$ z równania (3.3)	$r_i$ z równania (3.4)	Błąd bezwzględny	Błąd względny w %
0	-34,000	45,366	45,365	0,001	0,002
1	-33,910	45,354	45,353	0,001	0,002
2	-33,640	45,318	45,318	0,001	0,001
3	-33,190	45,259	45,259	0,000	0,001
4	-32,562	45,177	45,177	0,000	0,000
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
19	-3,444	43,055	43,054	0,001	0,002
20	-0,374	43,030	43,030	0,000	0,001
21	2,808	43,046	43,046	0,000	0,001
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
68	139,810	73,099	73,098	0,001	0,001
69	139,900	73,130	73,129	0,001	0,001

#### 4. PRZYKŁADY OBLICZEŃ (\*)

##### Przykład 4.1

Należy określić stan przemieszczeń  $u, v, w$  oraz stan sił wewnętrznych  $N_s, N_\theta, N_{s\theta}, M_s, M_\theta, M_{s\theta}$  dla powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej przedstawionej na rysunku 3. Powłoka ma gładką powierzchnię i obciążona jest normowym

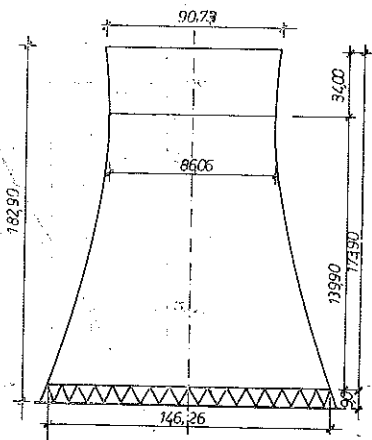
(\*) Wszystkie obliczenia wykonano w Ośrodku Elektronicznej Techniki Obliczeniowej Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu na komputerze ODRA 1204.



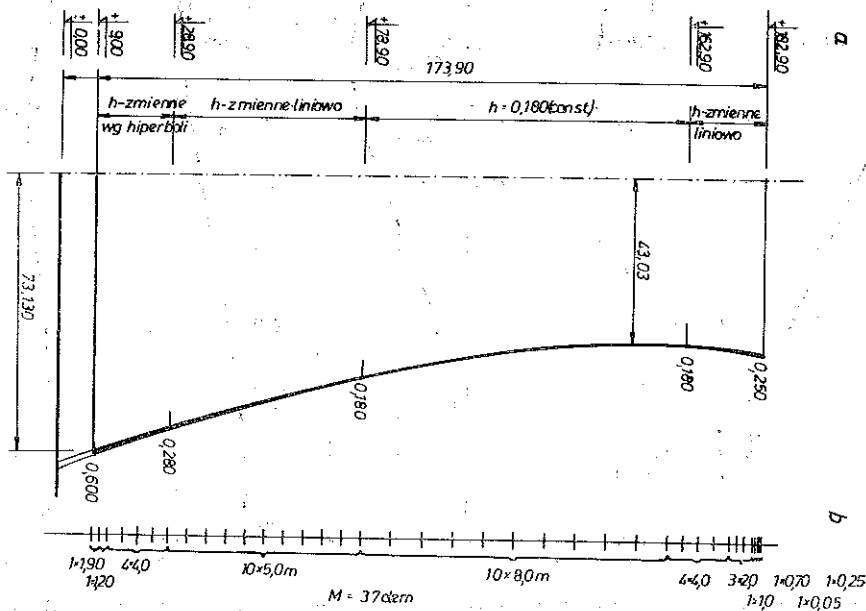
parciem wiatru wg I strefy oraz ciężarem własnym. Chłodnia łącznie z konstrukcją wsporczą ma wysokość  $H=182,90$  m, grubość zaś powłoki jest zmienna w kierunku wysokości i waha się w granicach od 0,18 do 0,60 m (rys. 4). Warunki brzegowe: krawędź dolna powłoki jest zamocowana, tzn.  $u=0, du/dz \neq 0, v=0, dv/dz \neq 0, w=0, dw/dz = 0$ , a górna całkowicie swobodna bez pierścienia wzmacniającego. Stałe materiałowe przyjęte do obliczeń:  $E=2 \cdot 10^9$  KG/m<sup>2</sup>,  $\nu=0,20$ ,  $\gamma_{zel} = 2500$  KG/m<sup>3</sup>.

Na rysunkach 5, 6, 7, 10, 11 i 12 pokazano niektóre ciekawsze wyniki dotyczące stanu przemieszczeń i sił wewnętrznych dla rozpatrywanej powłoki. Otrzymane wyniki są w pełni zgodne z wynikami uzyskanymi za pomocą wcześniej opracowanych programów HJOC i HJOW, podanych w pracy [2], które dotyczą wyłącznie powłok o kształcie hiperboloidy jedno-powłokowej.

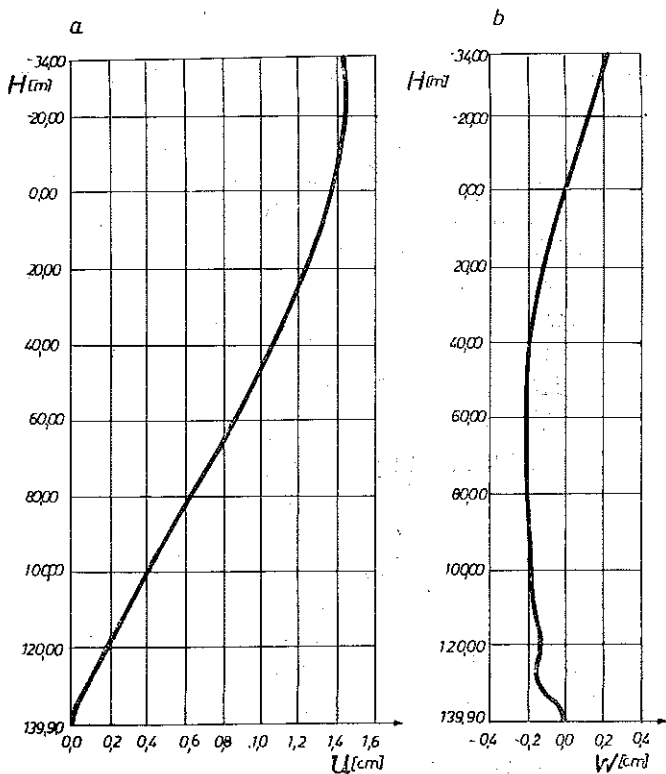
Jak pokazano na rys. 6, uzyskane największe rzędne przemieszczeń w prostopadłych do powierzchni środkowej powłoki są rzędu połowy jej grubości. Dowodziłoby to, że przy obliczeniach statycznych tak wysokich i zarazem cienkich konstrukcji inżynierskich, jakimi są powłoki chłodni kominowych, należy uwzględnić w trakcie obliczeń zmiany ich kształtu spowodowane przez poszczególne procesy ociążenia.



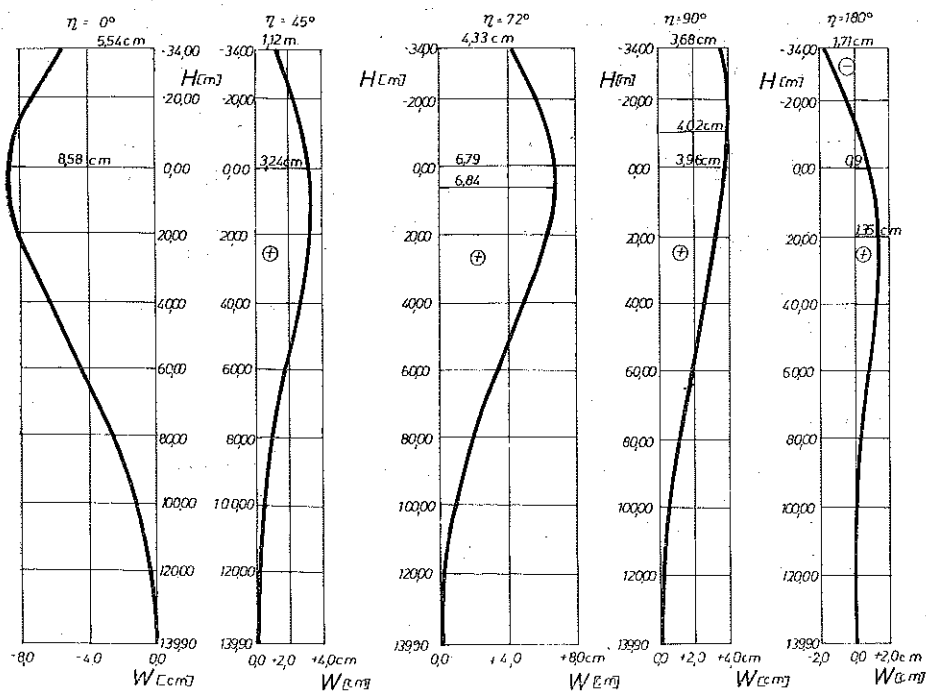
Rys. 3. Wymiary gabarytowe powłoki chłodni kominowej



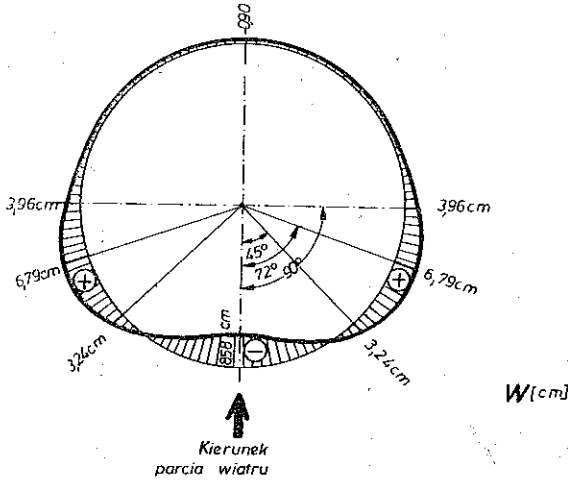
Rys. 4. a) zmiany grubości powłoki, b) podział na elementy



Rys. 5. Przeszczenia powłoki pod wpływem ciężaru własnego  
 a)  $u$  — południkowe (styczne do powłoki), b)  $w$  — normalne



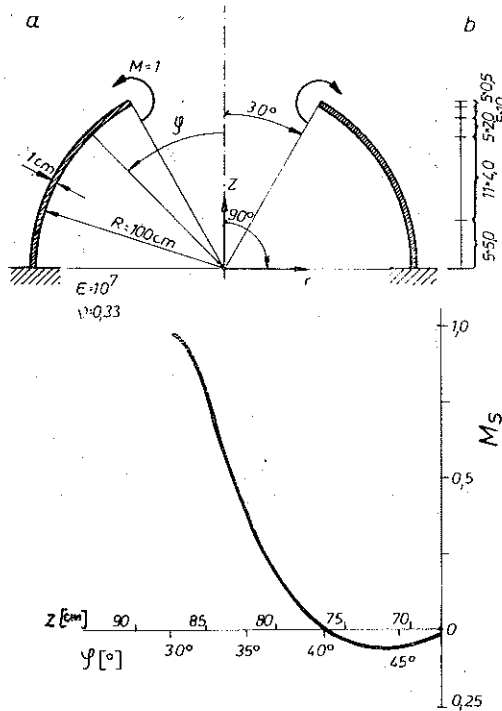
Rys. 6. Rozkład przeszczenia wzdłuż wysokości pod wpływem parcia wiatru dla poszczególnych przekrojów południkowych  $\eta=0^\circ, 45^\circ, 72^\circ, 90^\circ, 180^\circ$



Rys. 7. Rozkład przemieszczeń wzdłuż obwodu na wysokości przewężenia chłodni kominowej ( $H=0,00$  m) pod wpływem parcia wiatru

Przykład 4.2

Określić południkowe momenty zginające  $M_s$  dla powłoki przedstawionej na rysunku 8. W monografiach [5 i 7] przytoczono wyniki dla tej powłoki na podstawie rozwiązania analitycznego, metody elementów skończonych i metody sił.

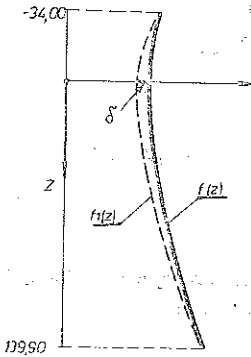


Rys. 8. Kulista powłoka obrotowa omawiana w pracach [5 i 7]

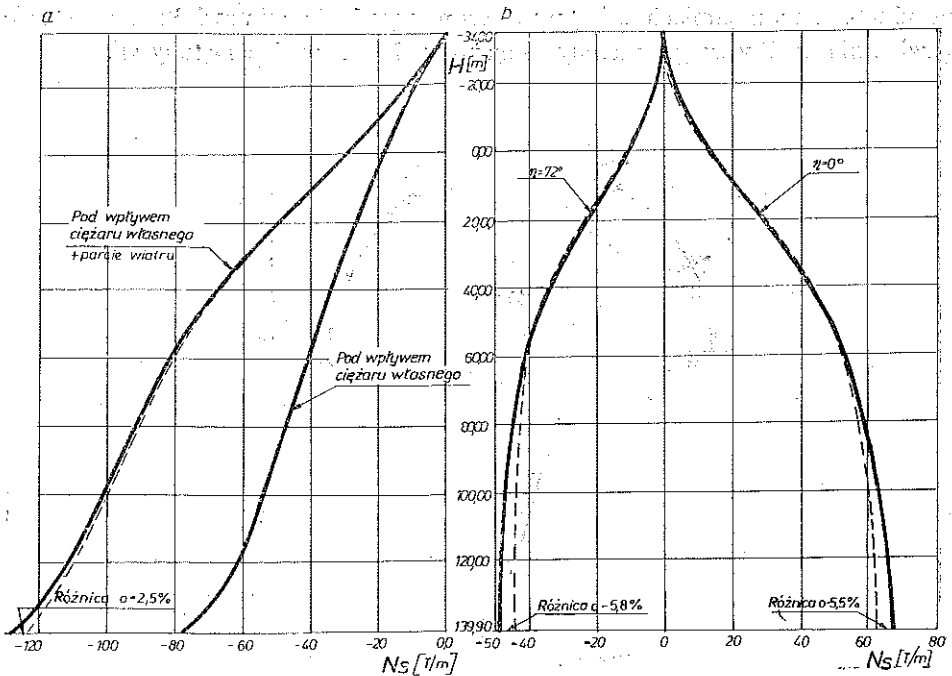
a) wymiary powłoki, b) podział na elementy, c) wykres  $M_s$

W niniejszym przykładzie tworzącą powłoki przybliżono wielomianem  
 $r_s(z) = -1,3001z^5 + 2,0175z^4 - 1,3105z^3 - 1,6558 \cdot 10^{-1}z^2 - 3,01772 \cdot 10^{-2}z + 1,0004$   
 z błędem  $\varepsilon = 4,33 \cdot 10^{-4}$ .

Otrzymano wyniki zgodne z wynikami podanymi w pracach [5 i 7].



Rys. 9. Powłoka chłodni kominowej o zmieniającym się kształcie tworzącej  $f_1(z)$  spowodowanym błędami wykonawczymi



Rys. 10. Wyniki obliczeń sił południkowych  $N_s$  dla powłoki chłodni z rys. 3 i 4 oraz dla powłoki z błędami wykonawczymi wg rys. 9 ( $\delta = 40$  cm)

a)  $N_s$  pochodzące od ciężaru własnego i parcia wiatru;  $\eta = 72^\circ$ , b)  $N_s$  pochodzące od parcia wiatru w przekrojach  $\eta = 0^\circ$  i  $72^\circ$

Oznaczenia: — wykres dla powłoki o teoretycznym kształcie tworzącej (rys. 4), - - - - wykres dla powłoki o zmienionych kształtach tworzącej spowodowanych błędami wykonawczymi

*Przykład 4.3* Uwzględnienie zmian kształtu powłoki.

Podana w punktach 2 i 3 niniejszej pracy metoda pozwala w łatwy sposób na uwzględnienie zmian kształtu powłoki spowodowanych np. błędami wykonawczymi. W tym celu wystarczy jedynie podać maszynie cyfrowej zbiór  $F$ , w którym

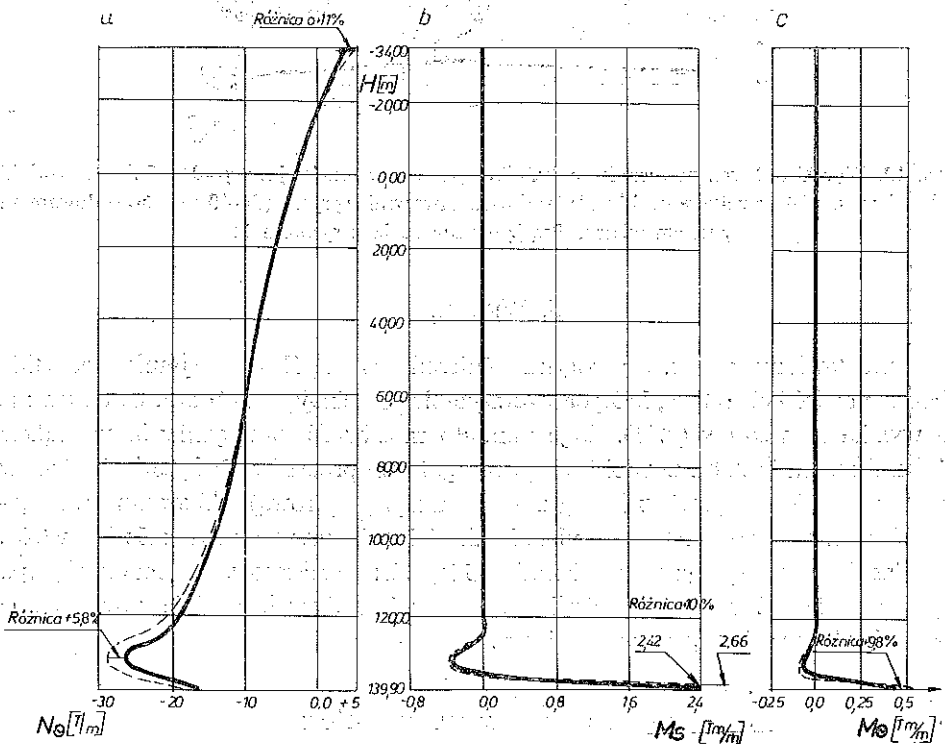
$$f_i = f(z_i) + \Delta_i,$$

gdzie  $\Delta_i$  jest różnicą między rzędną „teoretyczną” a rzeczywistą. Dla tego zbioru tworzy się inny wielomian  $r(z)$ , a dalsze postępowanie nie ulega zmianie.

Dla powłoki chłodni kominowej omawianej w przykładzie 4.1. określić stan przemieszczeń i sił wewnętrznych przy następującej zmianie tworzącej (rys. 9) spowodowanej błędami wykonawczymi:

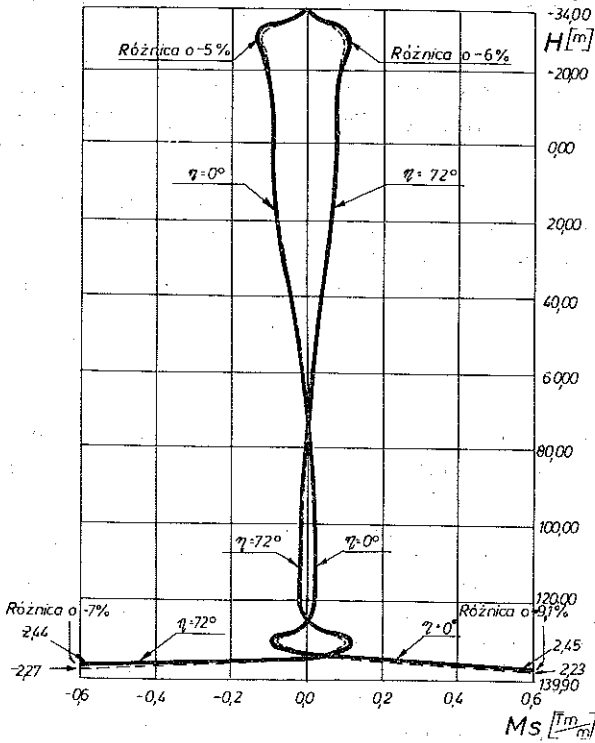
$$f_1(z) = 43,03 \sqrt{1 + \frac{z^2}{101,807^2}} - \delta(0,0002105 z^2 - 0,223z + 1) = f(z) - \Delta(z).$$

Otrzymane różnice dla  $\delta = 40$  cm (ok. 0,93% promienia w przewężeniu powłoki) w stosunku do powłoki z przykładu 4.1. w wartościach przemieszczeń w i sił wewnętrznych ilustrują rysunki 10, 11 i 12



Rys. 11. Wyniki obliczeń dla powłoki chłodni z rys. 3 i 4 oraz dla powłoki z błędami wykonawczymi wg rys. 9 ( $\delta = 40$  cm) obciążonej ciężarem własnym

a) siły równoleżnikowe  $N_0$ , b) momenty południkowe  $M_s$ , c) momenty równoleżnikowe  $M_0$ .  
Oznaczenia: ——— wykresy dla powłoki z rys. 3 i 4, - - - wykresy dla powłoki o zmieniających się kształtach tworzącej wg rys. 9



Rys. 12. Wyniki obliczeń momentów południkowych  $M_s$  w przekrojach  $\eta = 0^\circ$  i  $72^\circ$  dla powłoki chłodni z rys. 3 i 4 oraz dla powłoki z błędami wykonawczymi wg rys. 9 ( $\delta = 40$  cm) spowodowanymi parciem wiatru. Przyjęto oznaczenia z rysunku 11

## 5. WNIOSKI

Przedstawiony powyżej algorytm obliczeń jest ogólny, obejmuje wszystkie cienkie powłoki obrotowe, których tworzące nie przecinają osi obrotu. Ograniczenie to wynika ze wzorów (2.11). Daje ponadto możliwość uwzględniania w trakcie obliczeń zmian kształtu powłoki od poszczególnych procesów obciążenia (w trakcie opracowania jest odpowiedni program na maszynę cyfrową). Algorytm uwzględnia również osiowo-symetryczne niedokładności wykonawcze powierzchni powłoki.

Wszelkie operacje na wielomianach takie, jak: różniczkowanie, mnożenie itp., są proste dla obliczeniowej techniki na maszynie cyfrowej, co daje nawet pewne oszczędności w czasie trwania obliczeń.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. I. S. BEREZIN, N. P. ŻIDKOW, *Metody wyćislenij*, Izd. Nauka, tom I, Moskwa 1966.
2. J. GOŁAŚ, H. NOWAK, A. PEER-KASPERSKA, E. SADOWSKI, *Analiza stanu zgięciowego w powłokach hiperboloidalnych chłodni kominowych wysokości  $H = 120$  do 180 m metodą elementów skończonych*. Inst. Inżyn. Łąd. WSI w Opolu (praca nieopublikowana, wykonana na zlecenie Przedsiębiorstwa Budowy Chłodni „CHŁODNIE KOMINOWE” w Gliwicach), 1975.

3. J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, H. NOWAK, *Numeryczna analiza statyczna powłok hiperboloidalnych chłodni kominowych o dużych wysokościach obciążonych wiatrem*, Mechanika i Komputer, tom I, 1977 [w druku].
4. Z. KASPERSKI, *Numeryczne problemy w obliczeniach statycznych płyt i powłok metodą elementów skończonych*, Praca doktorska, Gdańsk, Wydział Budownictwa Lądowego, 1975.
5. O. MATEJA, *Problemy statyki i dynamiki płyt pierścieniowych oraz powłok obrotowych*, Zesz. Nauk. WSI w Opolu, Nr 4, Opole 1972.
6. W. W. NOWOŻIŁOW, *Teorija tonkich obołoczek*, Sudizdat., Leningrad 1951.
7. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, Mc Graw-Hill, London 1967.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady Warszawa 1972.

## Резюме

**РЕШЕНИЕ ВОПРОСОВ СТАТИКИ ШИРОКОГО КЛАССА ВРАЩАТЕЛЬНЫХ  
ОБОЛОЧЕК ПРИ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

В работе дается общий метод численного решения вопросов статики для тонких вращательных оболочек, образующие которых не пересекают оси вращения. За основу численного решения принят метод конечных элементов. Типичным конечным элементом является криволинейный усеченный конус, образующая которого аппроксимируется произвольно точно алгебраическим многочленом. Благодаря этому одна программа на цифровую машину охватывает статический анализ всех вышеперечисленных вращательных оболочек. Приведенный алгоритм расчетов учитывает тоже в своей общности влияния осесимметричных неточностей изготовления поверхности оболочки. Разработанная расчетная программа на ЭЦВМ проверена на ряде числовых примерах. Она позволяет удобно пользоваться приведенным общим методом.

## SUMMARY

**STATIC SOLUTIONS OF BROAD CLASS OF PROBLEMS FOR SHELLS OF REVOLUTION  
BY FINITE ELEMENT METHOD**

The general method of numerical solution of the static problems of the shells of revolution, the generators of which do not cut the axis of revolution is proposed. The finite element technique was chosen as the basis for numerical solution. The frustum of the curvilinear cone, the ruling of which is approximated with arbitrary exactness by algebraic polynomial is typical finite element. Thanks to this the single computing programme contains static analysis for the all types of shells of revolution mentioned above. The algorithm of computations takes into account in its generality also the influences of axially-symmetric production imperfections of the shell surface. The computing programme was tested on the series of numerical examples. It permits for convenient use of the method presented.

INSTYTUT INŻYNIERII ŁĄDOWEJ  
WYŻSZEJ SZKOŁY INŻYNIERSKIEJ W OPOLU

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lipca 1976 r.