

STATECZNOŚĆ WALCOWEJ PANELI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ PRZY CIŚNIENIU ZEWNĘTRZNYM

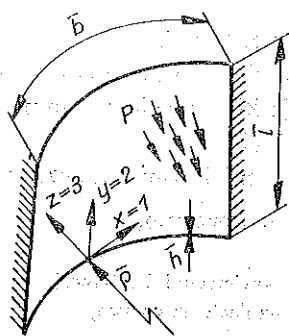
CZESŁAW C I C H O Ń, ZYGMUNT K Ę P K A i ZENON W A S Z C Z Y S Z Y N

W pracy rozpatruje się zachowanie długiej paneli walcowej poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego. Przyjęto materiał sprężysto-plastyczny z wielokrotnym liniowym wzmocnieniem izotropowym. Obliczenia przeprowadzono dla zakresu małych odkształceń, lecz dużych przemieszczeń. Zbadano takie zjawiska jak utrata stateczności typu przeskoku oraz wyoboczenie typu bifurkacyjnego. W pracy oparto się na metodzie bezpośredniego numerycznego całkowania (wstrzeliwania). Algorytm oparto na wersji przyrostowej, przy czym obliczenia kontynuowano aż do wyników wskazujących na utratę stateczności. Wartość ciśnienia bifurkacyjnego obliczono iteracyjnie przez zakłócenie stanu symetrycznego. Jako przykład liczbowy podano obliczenia dla paneli o utwierdzonych brzegach.

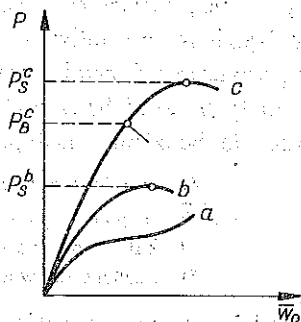
1. UWAGI WSTĘPNE, ZAŁOŻENIA, OZNACZENIA

Panelą walcową będziemy nazywali powłokę walcową podpartą wzdłuż tworzących i o niepodpartych brzegach krzywoliniowych (rys. 1). Jeśli panela jest dostatecznie długa ($l > 3\bar{b}$) i obciążenie nie zależy od zmiennej y , to można rozważać pasek o jednostkowej szerokości, znajdujący się w płaskim stanie odkształcenia. W dalszym ciągu będziemy zajmowali się tylko takim przypadkiem, a ponadto ograniczymy się do obciążenia ciśnieniem zewnętrznym P .

Specyfiką rozpatrywanego zagadnienia jest konieczność oparcia się na teorii dużych przemieszczeń ze względu na analizę stanu giętnego i obliczanie obciążeń krytycznych. W zależności od parametrów paneli mogą wystąpić trzy przypadki. Na rys. 2 w przypadku a) w ogóle nie występuje obciążenie krytyczne. Przy wroście



Rys. 1



Rys. 2

wyniosłości może nastąpić utrata stateczności typu przeskoku przy ciśnieniu $P = P_S$. W powłokach bardziej wyniosłych (przypadek c na rys. 2) dla obciążenia $P = P_B < P_S$ występuje wyboczenie typu bifurkacyjnego.

Zjawisko utraty stateczności paneli walcowej zostało dobrze zbadane w zakresie sprężystym. Z licznych prac wymieniamy tylko monografię WOLMIRA [12] i tablice KORNISZYŃA i ISANBAJEWJEJ [4], uzupełnione w pracy [3]. Należy dodać, że przyjęcie współczynnika Poissona $\nu = 0$ prowadzi do jednoosiowego stanu naprężenia, jaki przyjmuje się w smukłych łukach. Obliczaniu stateczności poświęcono wiele prac. Z ostatnich wymienimy analityczne rozwiązania MASURA [6] i numeryczne otrzymane metodą elementów skończonych [8].

Znacznie bardziej uboga jest bibliografia zakresu pozasprężystego. Trudności matematyczne zmuszają do stosowania metod przybliżonych i numerycznych. Bibliografię z zakresu obliczania łuków sprężysto-plastycznych podano w pracach [1 i 9]. Jeśli można w niej znaleźć przykłady obliczania obciążenia P_S , to zupełnie brak prac, w których byłaby podjęta próba obliczania obciążenia bifurkacyjnego P_B z uwzględnieniem nieliniowego stanu przedwyboczeniowego. Obliczanie paneli poza zakresem sprężystym dostarcza nowych trudności ze względu na płaski stan naprężeń i zmienność współczynnika odkształcenia poprzecznego [2].

W pracy niniejszej oprzemy się na metodzie bezpośredniego numerycznego całkowania (wstrzeliwania). W porównaniu z [1] zastosujemy bardziej złożone równania fizyczne. Algorytm oprzemy na wersji przyrostowej, przy czym obliczenia będą kontynuowane aż do osiągnięcia pierwszej wartości P_S ⁽¹⁾. Wartość obciążenia P_B oblicza się iteracyjnie przez zakłócenie stanu symetrycznego, podobnie jak czyniono w [7].

W pracy oprzemy się na następujących założeniach:

1. Panela o jednostkowej szerokości znajduje się w płaskim stanie naprężeń.
2. Grubość paneli \bar{h} jest na tyle mała w porównaniu z \bar{b} , l i ρ (rys. 1), że można pominąć wpływ naprężeń stycznych i normalnych σ_z i przyjąć zasadę płaskich przekrojów (odcinka normalnego).
3. Zagadnienie rozpatrujemy na gruncie teorii małych odkształceń lecz dużych przemieszczeń.
4. Materiał jest sprężysto plastyczny, ściśliwy, z wielokrotnym liniowym wzmocnieniem.
5. Jedyne obciążeniem jest ciśnienie zewnętrzne P .

W pracy będziemy posługiwali się wielkościami bezwymiarowymi. Wielkości fizyczne będą oznaczane dużymi literami z wyjątkiem macierzy lub nadkreśleniami. Odstępstwa od tych zasad będą podane w tekście.

Posługiwać się będziemy następującymi ważniejszymi oznaczeniami:

- A_k współczynnik wzmocnienia izotropowego,
- $b = \bar{b}/\bar{h}$ rzepiętość paneli,
- β kąt obrotu normalnej do powierzchni środkowej
- D macierz sztywności w równaniach fizycznych,

⁽¹⁾ W pracy [5] wykazano, że przyjęcie realnej zależności $\sigma(\epsilon)$ może prowadzić do dwóch wartości $P_{SI} < P_{SII}$.

- $e_j = \varepsilon_j / \varepsilon_p$, $s_j = \sigma_j / \sigma_p$ odkształcenia i bezwymiarowe naprężenia główne,
 ε_p , σ_p odkształcenie i naprężenie na granicy plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu,
 E_k moduł styczny wykresu $\sigma(\varepsilon)$ (rys. 4),
 E_j lokalne sztywności,
 \mathbf{q}, \mathbf{Q} wektory uogólnionych przemieszczeń powierzchni środkowej i sił wewnętrznych,
 $\varepsilon = \varepsilon_0 / \varepsilon_p$, $k = \kappa h / \varepsilon_p$ odkształcenie i przyrost krzywizny powierzchni środkowej,
 h grubość paneli,
 $j = 1, 2$ indeks kierunków głównych: $j = 1$ — promieniowy, $j = 2$ — obwodowy,
 $m = 6M / (h^2 \sigma_p)$, odpowiednio moment zginający, siła podłużna i siła poprzeczna,
 $n = N / (h \sigma_p)$, $t = T / (h \sigma_p)$
 ν współczynnik Poissona,
 $p = Pb / \sigma$, ciśnienie zewnętrzne,
 $r = 0, 1, \dots, R$ numeracja warstw we wzorze kwadratowym,
 $\bar{\rho} = \rho / h$ promień krzywizny powierzchni środkowej,
 s_i intensywność naprężeń,
 τ quasi-czas,
 $\theta = b / \rho$ kąt rozwarcia (rys. 8),
 $\xi = \xi / b$ zmienna przestrzenna,
 $u = \bar{u} / (h \sigma_p)$, $w = \bar{w} / (h \sigma_p)$ przemieszczenia powierzchni środkowej,
 \mathbf{y} wektor stanu,
 $z = \bar{z} / h$ odległość warstw przekroju poprzecznego od powierzchni środkowej,
 $(\)' = \partial / \partial \tau$ $(\)^* = \partial / \partial \tau$.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

2.1. Równania geometryczne i równowagi wewnętrznej

Oprzemy się na równaniach, którymi posłużono się w pracy [1]. Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 w' &= \frac{b}{\rho} u - \frac{b}{\varepsilon_p} \beta, \\
 u' &= b\varepsilon - \theta w - \frac{\varepsilon_p}{2b} w'^2, \\
 \beta' &= \varepsilon_p b \left(k + \frac{w}{\rho^2} \right), \\
 t' &= (\theta + \beta') n - p, \\
 n' &= -(\theta + \beta') t, \\
 m' &= 6bt.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

W równaniach tych występują uogólnione odkształcenia ε i k , które będą wyznaczone z równań fizycznych.

2.2. Równania fizyczne

Ze względu na dwuosiowy stan naprężeń skorzystamy z równań z pracy [7], uproszczonych przez przyjęcie tylko wzmocnienia izotropowego. Przyjmijmy dalej, że kierunki główne 1, 2, 3 odpowiadają układowi współrzędnych lokalnych x, y, z z rys. 1. Oprzemy się na następujących zależnościach:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &\equiv \dot{e} \equiv \dot{e} + kz, & \dot{e}_2 &\equiv 0, & z &\in [-1/2; 1/2], \\ \dot{s}_j &= E_j \dot{e}, & \dot{s}_3 &\equiv 0 & (j=1, 2), \end{aligned}$$

gdzie lokalne sztywności E_j przyjmują wartości podane w pracy [7]:

a) Proces aktywny, $\Delta s_i \geq 0$ (lokalne obciążenie):

$$(2.3) \quad \begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{M} (\bar{s}_2^2 + B), & E_2 &= \frac{1}{M} (-\bar{s}_1 \bar{s}_2 + \nu B), \\ M &= \bar{s}_1^2 + 2\nu \bar{s}_1 \bar{s}_2 + \bar{s}_2^2 + (1 - \nu^2)B, & B &= \frac{4}{9} A_k s_i^2. \end{aligned}$$

b) Proces bierny, $\Delta s_i < 0$ (lokalne odciążenia lub zakres sprężysty):

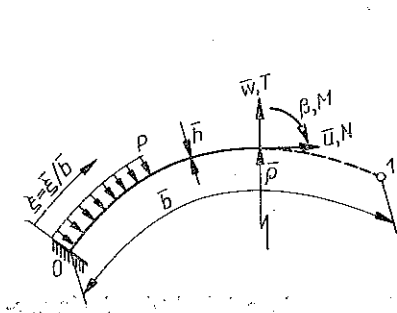
$$(2.3') \quad E_1 = \frac{1}{1 - \nu^2}, \quad E_2 = \frac{\nu}{1 - \nu^2}.$$

W podanych wzorach typ procesu określa się na podstawie przyrostu intensywności naprężeń i składowych dewiatora naprężeń:

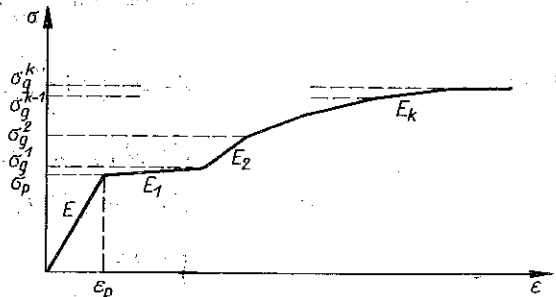
$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Delta s_i &= s_i(\tau_* + \Delta\tau) - s_i(\tau_*), \\ s_i^2 &= s_i^2(\tau_*) = s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2, \\ \bar{s}_j &= s_j - \frac{1}{3}(s_1 + s_2) \quad (j=1, 2). \end{aligned}$$

We wzorach (2.3) występuje współczynnik wzmocnienia izotropowego A_k , wynikający z odcinkowo-liniowej aproksymacji wykresu jednoosiowego rozciągania (rys. 4):

$$(2.5) \quad A_k = \frac{E_k}{E - E_k} \quad \text{dla} \quad s_g^{k-1} < s_i < s_g^k,$$



Rys. 3



Rys. 4

przy czym dla jednoznaczności opisu (ze względu na uzależnienie A_k od s_i) przyjmuje się, że $A_k \neq 0$.

Korzystając z definicji prędkości siły podłużnej i momentu zginającego

$$(2.6) \quad \dot{n} = \int_{-1/2}^{1/2} \dot{s}_1 dz, \quad \dot{m} = \int_{-1/2}^{1/2} \dot{s}_1 z dz,$$

dochodzimy do następujących równań fizycznych:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \dot{n} &= D_0 \dot{e} + D_1 k, \\ \frac{\dot{m}}{6} &= D_1 \dot{e} + D_2 k, \end{aligned}$$

gdzie występują całki D_α ,

$$(2.8) \quad D_\alpha = \int_{-1/2}^{1/2} E_1 z^\alpha dz \quad (\alpha=0, 1, 2).$$

3. ROZWIĄZANIE PODSTAWOWEGO UKŁADU RÓWNAŃ

3.1. Całkowanie podstawowego układu równań różniczkowych

Równania (2.1) i (2.7) napiszemy w postaci wektorowej

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{q}; \tau), \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

gdzie występują następujące wektory (dokładniej są to macierze jednokolumnowe), których składowe będziemy dla zwartości pisali poziomo w klamrach:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{y} &= \{w, u, \beta, t, n, m\}, \\ \mathbf{Q} &= \{n, m/6\}, \quad \mathbf{q} = \{e, k\}. \end{aligned}$$

Rozdzielenie równań będzie wykorzystywane przy ich całkowaniu. Warunki brzegowe, jakie należy dołączyć do (3.1)₁,

$$(3.3) \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{y}(1) = \mathbf{q}_1,$$

formują dla paneli symetryczne zagadnienie dwupunktowe typu 3+3. Oznacza to, że dla końców $\xi=0$ i $\xi=1$ znamy po trzy składowe wektorów \mathbf{g}_0 i \mathbf{g}_1 .

Warunki początkowe dla całkowania równań (3.1)₂ należy przyjąć tak, aby były one niesprzeczne z rozwiązaniem układu (3.1)₁. Będziemy je przyjmowali bądź z rozwiązania sprężystego

$$(3.4) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{D}_b \dot{\mathbf{q}},$$

bądź też wychodząc ze stanu beznapięzeniowego.

Istotnym problemem jest dobór quasi-czasu τ . Może nim być jeden z monotonicznie rosnących parametrów występujących w równaniach (3.1)–(3.3). Najczęściej przyjmuje się obciążenie p , jednak w naszym przypadku byłby on nieprzydatny

w sąsiedztwie obciążeń krytycznych. Ze względu na malejącą sztywność paneli podczas jej odkształcenia się celem jest przyjmowanie raczej parametru kinematycznego. Obliczenia wykazały, że może to być krzywizna k_0 lub przemieszczenie u_0 w punkcie $\xi=0$, zależnie do rozważanych przypadków utraty stateczności.

Do całkowania równań (3.1) użyto metody bezpośredniego całkowania, która była omawiana i stosowana w poprzednich pracach autorów [1 i 10]. W algorytmie, którym posługiwaliśmy się w tej pracy, wprowadziliśmy kilka zmian, które w skrócie omówimy.

Całkowanie równania (3.1)₁ można, dzięki rozdzieleniu pochodnych, przeprowadzić dla ustalonego przyrostu $\Delta\tau$ i czasu τ

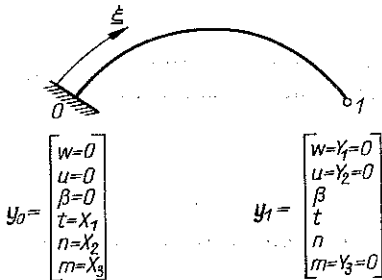
$$(3.5) \quad \tau = \tau_* + \Delta\tau,$$

gdzie τ_* jest poprzednim czasem, dla którego znane rozwiązanie jest zanotowane w pamięci maszyny.

Jeśli swobodne warunki początkowe (nieznane, niezależne składowe) wektora y_0 oznaczymy przez X , a warunki brzegowe w punkcie $\xi=1$ przez Y , to iteracyjnie rozwiązuje się równanie w sposób następujący:

$$(3.6) \quad [NC]X = Y \quad (X, Y \in R^3).$$

Macierz $[NC]$ jest nieznaną i symuluje cały proces numerycznego całkowania, wykonywany przez komputer. W zadaniu rozwiązywanym przez nas wektory X, Y są trójelementowe; na rys. 5 pokazano przykładowo dobór współrzędnych tych wektorów.



Rys. 5

Wektor X oblicza się iteracyjnie, rozwiązując dwupunktowe zadanie brzegowe typu 3+3. Do algorytmu, który wykorzystano w [1], wprowadzono tylko procedurę uzbiegającą opisaną w [11].

Wyjściowe wartości X dla rozpoczęcia iteracyjnego rozwiązywania równania (3.5) oblicza się z ekstrapolacji wyników otrzymanych dla poprzednich czasów [10].

Procesu numerycznego całkowania równania (3.1)₁ nie można kontynuować bez całkowania równania (3.1)₂. W tym celu korzysta się ze zbioru wartości zanotowanych dla czasu τ_* dla każdego węzła 1 numerycznego całkowania wzdłuż osi ξ :

$$(3.7) \quad \{W\}_1^* = \{q_*, Q_*, s_*^r, s_{i*}^r\}_1,$$

gdzie naprężenia s_*^r i intensywności s_{i*}^r zapamiętuje się dla warstw o współrzędnych z_r , gdzie $r=0, 1, \dots, R$. Przy przejściu do następnego czasu $\tau = \tau_* + \Delta\tau$ oblicza się przyrosty

$$(3.8) \quad \{\Delta W\}_i = \{\Delta q, \Delta Q, \Delta s^r, \Delta s_i^r\}_i,$$

gdzie poszczególne składniki wynoszą

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \Delta \mathbf{q} &= \mathbf{q}(\tau) - \mathbf{q}(\tau_*) \quad \text{itd.}, \\ \Delta s_i^r &= s_i(s^r) - s_i(s_*^r). \end{aligned}$$

Istotnym problemem jest przy tym obliczanie całek (2.8). Mianowicie współczynnik lokalnej sztywności E_1 jest funkcją nie tylko stanu naprężenia w rozpatrywanym punkcie paneli, ale też funkcją typu i historii procesu, jak to wynika ze wzorów (2.3). Zanotujemy to symbolicznie

$$(3.10) \quad E_1 = F(\mathbf{s}, s_i, \Delta s_i; z).$$

W przekroju mogą zachodzić różne typy procesów, przy czym granica pomiędzy nimi jest nieznana. Trudność tę pokonano tak jak w pracach [1 i 9], tzn. zastąpiono całkę (2.8) wzorem kwadraturowym

$$(3.11) \quad D_\alpha \approx \sum_{r=0}^R \xi_r E_1^r z_r^\alpha.$$

Obliczanie całek (3.11) wykonuje się w ramach jednej procedury służącej odwracaniu związków fizycznych, przy czym należy uwzględnić zarówno możliwości zmiany typu procesu, jak też odcinkowo-liniową zależność wykresu $\sigma(\epsilon)$. Problem ten omówiono bardziej szczegółowo w „Dodatku”.

Po obliczeniu wektora \mathbf{X} przed przejściem do następnego czasu dokonuje się korekty pamięci. We wszystkich punktach numerycznego całkowania poprawia się elementy zbioru (3.7):

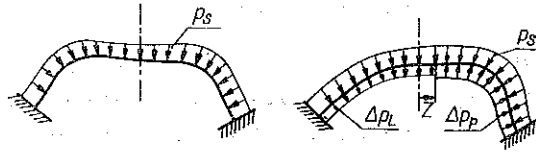
$$(3.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_* + \Delta \mathbf{q} &\rightarrow \mathbf{q}_*, & \mathbf{Q}_* + \Delta \mathbf{Q} &\rightarrow \mathbf{Q}_*, \\ s_*^r + \Delta s^r &\rightarrow s_*^r & \text{dla } r=0, 1, \dots, R, \\ s_i(s_*^r + \Delta s^r) &\rightarrow s_{i*}^r & \text{dla } \Delta s_i^r > 0. \end{aligned}$$

Podany algorytm opiera się na przyrostowych równaniach fizycznych (3.1)₂ i ma wszystkie zalety i wady metod przyrostowych rozwiązywania nieliniowych zagadnień. Do zalet należy operowanie liniowymi względem przyrostów równaniami fizycznymi i łatwość uwzględniania lokalnych odciążań; do wad natomiast kumulacja błędów przy ekstrapolacji rozwiązań względem czasu τ . Praktyczną metodą oceny dokładności jest powtórzenie obliczeń ze zmniejszonym krokiem $\Delta \tau$. Krok przestrzenny $\Delta \xi$ i liczbę warstw $R+1$ można dobrać na podstawie próbnych obliczeń.

4. OBLICZANIE CIŚNIENIA KRYTYCZNEGO

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywali panelę o symetrycznych warunkach brzegowych. W takim przypadku można mówić o symetrycznej i niesymetrycznej formie utraty stateczności.

Forma symetryczna występuje przy przeskoku; odpowiednie ciśnienie krytyczne oznaczmy przez \hat{p}_S . Natomiast ciśnieniu bifurkacyjnemu \hat{p}_B będzie towarzyszyło pojawienie się niesymetrycznej formy wyboczenia (rys. 6).



Rys. 6

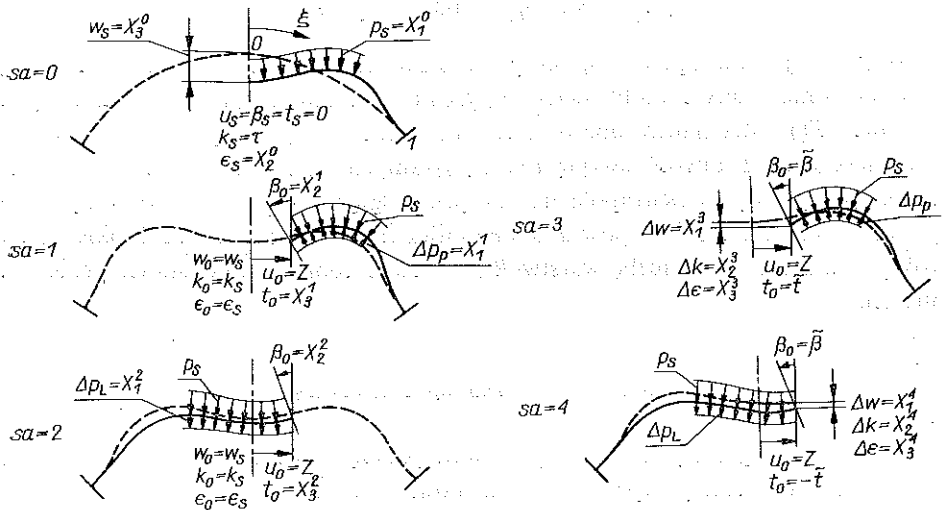
\hat{p}_S oblicza się metodą przyrostową, prowadząc obliczenia aż do momentu gdy

$$(4.1) \quad \frac{\Delta p}{\Delta \tau} \Big|_{\hat{p}_S} = 0.$$

Wielkość \hat{p}_B można obliczyć przez zakłócenie stanu symetrycznego. Takim zakłóceniem może być np. małe poziome przemieszczenie Z , jak to pokazano na rys. 6. Ze względu na symetrię konstrukcji można obliczać tylko połowę paneli. Równowagę stanu zakłóconego zapewniają dodatkowe ciśnienia Δp_p i Δp_L . Jeśli ciśnienia te będą równe, to uzyskuje się niesymetryczny stan równowagi, odpowiadający ciśnieniu krytycznemu

$$(4.2) \quad \Delta p = \Delta p_L \Big|_{\hat{p}_S} \Rightarrow \hat{p}_B \approx \hat{p}_S.$$

Warunki (4.1) i (4.2) sprawdza się dla każdego czasu $\tau = \tau_* + \Delta \tau$ lub też w otoczeniu przewidywanych obciążeń krytycznych. Przyrosty Δp_p i Δp_L oblicza się dla pamięci poprawionej według (3.10) i po obliczeniu stanu zakłóconego nie poprawia się jej. Dzięki temu można, w przypadku niespełnienia (4.2), kontynuować obliczanie stanu symetrycznego dla kolejnego przyrostu.



Rys. 7

Stan zakłócony wyznacza się dla dwóch połówek paneli, gdyż ze względu na duże przemieszczenia, a przede wszystkim przez rozwijanie się procesów biernych nie będzie występowała antysymetria przyrostów nakładanych na stan symetryczny. Warunki równowagi i ciągłości spełnia się iteracyjnie według algorytmu pokazanego na rys. 7. Kolejne etapy procedury iteracyjnej są numerowane parametrem sterującym sa .

Etap $sa=0$ odpowiada rozwiązaniu symetrycznemu, które otrzymuje się dla czasu $\tau=k_0$ i swobodnych parametrów początkowych $X_1=q_s$, $X_2=e_0$, $X_3=w_0$ przy spełnieniu warunków brzegowych $u_0=\beta_0=t_0=0$ dla $\xi_0=0$.

W etapie $sa=1$ zakłóca się stan symetryczny przez przyjęcie przemieszczenia $u_0=Z$. Dwupunktowe zadanie brzegowe rozwiązuje się dla warunków początkowych $X_1^1=\Delta p_p$, $X_2^1=\beta_0$, $X_3^1=t_0$, zachowując wartości $w_0=w_s$, $n_0=n_s$, $m_0=m_s$ (lub równoważnie $e_0=e_s$, $k_0=k_s$, jak zaznaczono na rys. 7) ze stanu symetrycznego.

Etap $sa=2$ jest powtórzeniem podanych obliczeń dla lewej połówki paneli z warunkami początkowymi $X_1^2=\Delta p_L$, $X_2^2=\beta_0$, $X_3^2=t_0$ i takim samym zakłóceniem $u_0=Z$.

W etapach $sa=3$ i $sa=4$ liczy się prawą i lewą stronę paneli przy uśrednionych wartościach

$$(4.3) \quad \bar{\beta} = \frac{1}{2} (X_2^1 + X_2^2), \quad \bar{t} = \frac{1}{2} (X_3^1 - X_3^2)$$

i tym samym co w poprzednich etapach zakłóceniu $u_0=Z$.

Etapy $sa=1$ i 2 powtarza się dla poprawionych wartości:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} w_0 + \frac{1}{2} (X_3^3 + X_3^4) &\rightarrow w_s, \\ k_0 + \frac{1}{2} (X_2^3 + X_2^4) &\rightarrow k_s, \\ e_0 + \frac{1}{2} (X_3^3 + X_3^4) &\rightarrow e_s. \end{aligned}$$

Iterację kończy się po spełnieniu nierówności (znaki przemieszczeń odpowiadają rys. 7)

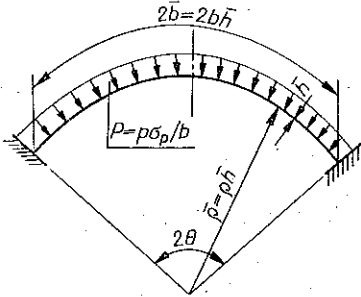
$$(4.5) \quad \left[\left(\frac{X_2^1 - X_2^2}{X_2^2} \right)^2 + \left(\frac{X_3^1 + X_3^2}{X_3^2} \right)^2 \right]^{1/2} < B.$$

Podana iteracja jest na ogół szybko zbieżna. Można ją przyspieszyć przez zapamiętanie ostatnich przyrostów z (4.4) i rozpoczynanie etapów $sa=1$ i 2 (dla nowego obciążenia) od poprawionych wartości w_0 , k_0 i e_0 .

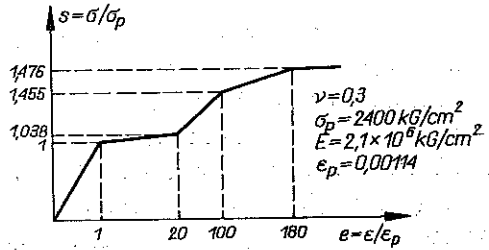
5. PRZYKŁAD LICZBOWY

Dokonano obliczeń paneli o utwierdzonych brzegach (rys. 8). Wykres rozciągania aproksymowano linią łamaną (rys. 9).

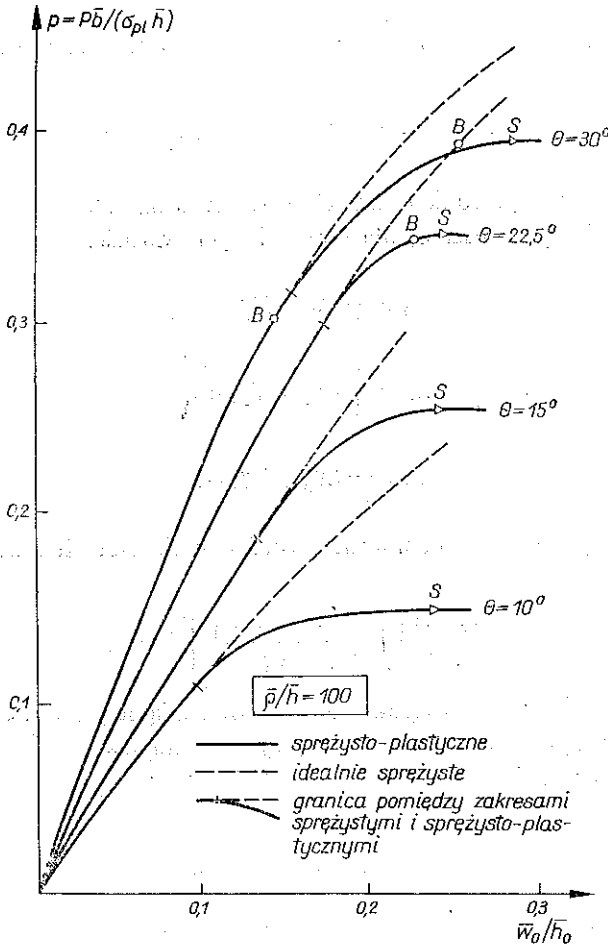
Liczono połowę paneli według algorytmu omówionego w p. 3 i 4. Do całkowania przyjęto 20 kroków we wzorach Rungego-Kutty, tj. $\Delta\xi=0,05$ i 5 węzłów ($R=4$) we wzorze kwadraturowym Simpsona dla liczenia całek (3.8). W wyniku



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

próbnych obliczeń przyjęto krok $\Delta\tau = \Delta k_0 = 0,02$ do 0,1. Okazało się mianowicie, że przy wzroście wyniosłości lub zaawansowanych odkształceniach plastycznych można krok na osi czasu wydłużać bez istotniejszego wpływu na dokładność obliczeń. Do liczenia obciążenia bifurkacyjnego przyjmowano zakłócenie $Z = u_0 = 1,0$.

Na rys. 10 pokazano najistotniejszą zależność ciśnienia p od ugięcia środka paneli w_0 . Linijką kreskowaną zaznaczono krzywe dla materiału idealnie sprężystego. Dla małych kątów rozwarcia ($\theta = 10^\circ$ lub 15°) występuje tylko ciśnienie przeskoku \hat{p}_S ; przy $\theta = 22,5^\circ$ ciśnienie bifurkacyjne \hat{p}_B niewiele się różni od \hat{p}_S i występuje w zakresie sprężysto-plastycznym. Przy wzroście kąta θ różnica pomiędzy \hat{p}_B i \hat{p}_S rośnie, a dla $\theta = 30^\circ$ ciśnienie \hat{p}_B występuje przed pojawieniem się odkształceń plastycznych.

Program został napisany w języku ALGOL-1204, a obliczenia wykonano w Ośrodku ETO Politechniki Krakowskiej. Do obliczeń wykorzystywano jedynie pamięć operacyjną komputera ODRA 1204.

6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy podano metodę obliczania ciśnień krytycznych dla długiej paneli walcowej. Oparto się na przyrostowych równaniach fizycznych, ujmujących izotropowe wzmocnienie materiału ściśliwego. Opracowane procedury pozwalają uwzględnić procesy biernie, jakie powstają przy odkształcaniu się paneli.

Metoda wstrzeliwania okazuje się w rozważanym problemie efektywna dzięki swojej elastyczności w odniesieniu do wyboru umownego czasu τ i możliwości obliczania zarówno symetrycznych jak też niesymetrycznych form równowagi paneli.

Należy też podkreślić możliwość wykonywania obliczeń na małym komputerze, jakim jest ODRA-1204. Można było tego dokonać dzięki małemu zbiorowi przetwarzanych informacji i optymalizacji programu, który angażuje tylko pamięć operacyjną maszyny.

DODATEK

D. 1. Odwracanie równań fizycznych

Przy znanym wektorze stanu $y_1 = y(\xi_1)$, a więc też $Q = \{n, m/6\}_1^{(1)}$, przedłużanie całkowania wiąże się z koniecznością obliczania pochodnych y' , przy czym dla obliczania u' i β' według (2.1) należy wyznaczyć $q = \{e, k\}$.

Jeśli w przekroju nie występują wyłącznie sprężyste odkształcenia, to najpierw do pomocniczego zbioru $\{Z\}$ wpisujemy wartości z pamięci (3.7)

$$(D.1) \quad \{Z\} = \{\{W\}^*, E^*\} = \{q_*, Q_*, s_*^r, s_*^i, E_*\}.$$

gdzie sztywności E^* liczymy na podstawie s_*^r i s_*^i . Wzorem kwadraturowym liczymy całki D_a^* .

Następnie liczymy przyrosty uogólnionych sił i odkształceń

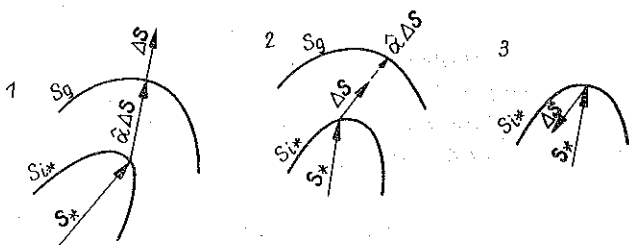
$$(D.2) \quad \Delta Q = Q - Q_*, \quad \Delta q = D_*^{-1} \Delta Q.$$

(¹) Dalej pomijamy indeks 1 rozumiejąc, że wszystkie rozważania odnoszą się do przekroju 1 o współrzędnej ξ_1 .

Kolejnym krokiem jest obliczenie przyrostów naprężeń i intensywności

$$(D.3) \quad \Delta s^r = (\Delta \epsilon + z_r \Delta k) \cdot E_*, \quad s_i^r = s_i(s_*^r + \Delta s^r) - s_*^r.$$

Obliczenie intensywności $s_i^r = s_i(s_*^r + \Delta s^r)$ pozwala (na podstawie zanku Δs_i^r) określić typ procesu, a ponadto sprawdzić czy nie przekracza się punktu załamania wykresu $\sigma(\epsilon)$ z rys. 4. Możliwe przypadki pokazano na rys. 11, przy czym zakres sprężysty odpowiada przypadkowi 2.



Rys. 11

W kolejnych warstwach r mogą zachodzić różne przypadki. Dlatego dalsze obliczenia polegają na podzieleniu przyrostu ΔQ na części odpowiadające osiągnięciu s_g^r . W tym celu oblicza się najpierw współczynnik α_r odpowiadający proporcjonalnemu wzrostowi Δs^r , jeśli $\Delta s_g^r > 0$ (przypadki 1 i 2 na rys. 11). Współczynnik ten jest nieujemnym pierwiastkiem α_r równania (pominięto górne indeksy r):

$$(D.4) \quad \alpha_r^2 \Delta s_i^2 + \alpha_r [(2\Delta s_1 - \Delta s_2)s + (2\Delta s_2 - \Delta s_1)s_{2*}] - (s_g^2 - s_i^2) = 0,$$

$$\Delta s_i^2 = \Delta s_1^2 - \Delta s_1 \Delta s_2 + \Delta s_2^2,$$

gdzie przyjęto $s_g = s_g^k$ dla $s_g^{k-1} < s_i \leq s_g^k$ w nawiązaniu do wykresu $\sigma(\epsilon)$ na rys. 4.

Współczynnik α dla całego przekroju wynosi

$$(D.5) \quad \alpha = \min(\min \alpha_r, 1),$$

gdzie

$$(D.6) \quad \alpha_r = \begin{cases} \hat{\alpha}_r \geq 0 \text{ z (D.4)}, & \text{jeśli } s_i^r > 0, \\ 1, & \text{jeśli } s_i^r \leq 0. \end{cases}$$

Jeśli $\alpha < 1$, to poprawia się zbiór (D.1); zaznaczamy to symbolicznie

$$(D.7) \quad \begin{aligned} q_* + \alpha \Delta q &\rightarrow q_*^r, \\ Q_* + \alpha \Delta Q &\rightarrow Q_*^r, \\ s^r &= s_*^r + \alpha \Delta s^r \rightarrow s_*^r, \\ s_i(s^r) &\rightarrow s_i^r \quad \text{dla } \Delta s_i^r > 0, \\ E(s^r; s_i^r) &\rightarrow E_*^r \end{aligned}$$

i obliczenia powtarza się od (D.2) aż do osiągnięcia $\alpha = 1$.

Jeśli $\alpha = 1$ wychodzi po pierwszym kroku iteracyjnym, to obliczenia powtarza się co najmniej jeden raz, aby przyrosty Δq były obliczone na podstawie poprawnych sżtywności (taki przypadek może np. zachodzić przy pełnym lokalnym odciążeniu przekroju).

Po zakończeniu iteracji oblicza się zbiór $\{W\}$ o składowych jak w (3.7) i w razie potrzeby przy liczeniu symetrycznych form poprawia się $\{W\}^*$ według (3.12).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. CZ. CICHÓN, *The shakedown of circular arches for movable loads*, Rozpr. Inżyn., 23, 4, 641–656, 1975.
2. J. W. HUTCHINSON, *Plastic buckling*, Advances in Appl. Mech., 14, Academic Press 1974.
3. Z. КЕРКА, *Tablice do obliczania naprężeń i skończonych ugięć w utwierdzonych panelach walcowych*, Zesz. Nauk. KR WSI Kielce, Seria Mech, 4, 1972.
4. M. S. KORNISZYN, F. S. ISANBAJEWA, *Gibkije plastiny i paneli*, Izd. Nauka, Moskwa 196.
5. J. LEDZIŃSKI, Z. WASZCZYŻYN, *Analiza zjawiska „przeskoku” w zakresie sprężysto-plastycznym na modelu układu kratowego Misesa*, Mech. Teoret. i Stos., 6, 4, 71–82, 1966.
6. E. F. MASUR, D. L. C. LO, *The shallow arches-general buckling, postbuckling and imperfection analysis*, J. Struct. Mech., 1, 1, 91–112, 1972.
7. M. RADWAŃSKA, Z. WASZCZYŻYN, *Wyboczenie i pozakrytyczne ugięcia sprężysto-plastycznej trójwarstwowej płyty pierścieniowej*, Rozpr. Inżyn., 22, 4, 587–600, 1974.
8. A. B. SABIR, A. C. LOOK, *Large deflection, geometrically nonlinear analysis of circular arches*, Int. J. Mech. Sci., 15, 1, 37–47, 1973.
9. Z. WASZCZYŻYN, *Application of the theory of finite deflections to calculation of elastic-plastic arches*, Arch. Inż. Łąd, 16, 1, 55–74, 1970.
10. Z. WASZCZYŻYN, *Obliczanie pozakrytycznych ugięć sprężysto-plastycznych płyt kołowych*, Rozpr. Inżyn., 21, 2, 347–360, 1973.
11. Z. WASZCZYŻYN, *Modification of numerical methods for analysis of elastic-plastic structures*, Materiały z polsko-francuskiego sympozjum n.t. mechaniki ośrodków ciągłych, Nicea 1974 [w druku].
12. A. S. WOLMIR, *Gibkije plastinki i obłoczki*, Gostechizdat, Moskwa 1956.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

В работе рассматривается поведение длинной цилиндрической панели подвергнутой действию внешнего давления, Принят упруго-пластический материал с многократный линейным изотропным упрочнением. Расчеты проведены для области малых деформаций, но больших перемещений. Исследованы такие явления, как потеря устойчивости типа скачка и продольный изгиб типа бифуркации. В работе опираются на метод непосредственного интегрирования (прицела). Алгоритм основан на версии в приростах, причем расчеты продолжались вплоть к достижению потери устойчивости. Значение давления бифуркации рассчитано итерационным образом путем возмущения симметричного состояния. Как числовой пример даются расчеты для панели с закрепленными кромками.

SUMMARY

STABILITY OF AN ELASTIC-PLASTIC CYLINDRICAL PANEL UNDER EXTERNAL PRESSURE

A long cylindrical panel is subjected to external pressure. The material is assumed to be elastic-plastic with multiple linear isotropic strain-hardening. The calculations are performed under the assumption of small strains but large displacements. Such phenomena as snap-through type stability loss and bifurcation type buckling are considered. The method of direct numerical integration is used. The algorithm applied is based on the incremental version, the computations being continued up to the stability loss. The value of the bifurcation pressure is found by the method of iteration, by perturbing the symmetric state. A numerical example concerning a panel with clamped edges is given.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

i

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 maja 1976 r.
