

## ŚCISŁY ELEMENT OBROTOWO-SYMETRYCZNY DLA CIENKIEJ POWŁOKI SPRĘŻYSTEJ

ZENON WASZCZYSZYN i ADAM MŁODZIANOWSKI (KRAKÓW)\*)

Podano numeryczną metodę obliczania macierzy sztywności i wyjściowych reakcji. Oparto się na metodzie macierzy bazowej przy całkowaniu kanonicznego układu równań powłoki. Układ ten wyprowadzono z równań liniowej teorii Sandersa powłok cienkich. Przedstawiona metoda nie korzysta zupełnie z pojęcia funkcji kształtu, przy czym liczba stopni swobody węzła jest zawsze równa czterem, a dokładność rozwiązania zależy jedynie od długości elementu w przypadku powłok z efektem brzegowym i stosowanych wzorów numerycznego całkowania. Jako przykłady liczbowe obliczono macierze elementów stożkowego i hiperboloidalnego.

### 1. WSTĘP

#### 1.1. Uwagi ogólne

Teoria cienkich powłok o kształcie obrotowo-symetrycznym jest bardzo dobrze opracowana. W zakresie liniowym można skorzystać z rozwinięcia wielkości kinematycznych i dynamicznych w szeregi Fouriera zmiennej obwodowej, co w rezultacie prowadzi do problemów przestrzennie jednowymiarowych (w opisie lokalnym do równań różniczkowych zwyczajnych). Pomimo tego obliczenia były żmudne i często przybliżone. Dopiero wprowadzenie maszyn cyfrowych i metody elementów skończonych (MES) w szczególności doprowadziło do ogólnych algorytmów. Algorytmy MES zunifikowane na poziomie całej konstrukcji (globalnej struktury) wymagają wyspecyfikowanego elementu skończonego (ES).

W opracowaniu niniejszym ograniczymy się do analizy ES, przy czym dla wyprowadzenia macierzy sztywności  $K$  i wektora wstępnych reakcji  $F$  posłużymy się metodą niestandardową.

W MES dla aproksymacji składowych wektora przemieszczenia  $u$  używa się wielomianów o liczbie współczynników niezależnych  $n$  odpowiadającej liczbie stopni swobody elementu. Dokładność aproksymacji można podwyższać bądź przez podnoszenie  $n$  (a więc stopnia wielomianów), bądź też przez zwiększenie liczby ES (często lokalne zagęszczanie, np. w strefie efektu brzegowego). Podstawowe kryteria MES [14], a zwłaszcza kryterium ruchu sztywnego, są spełnione bądź przez dodanie dodatkowych wyrazów trygonometrycznych [2], bądź też przez wprowadzenie elementów izoparametrycznych [14]. Elementy izoparametryczne pozwoliły też na prostszy opis odkształcenia powierzchni zakrzywionych.

\*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12. „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.

Obok takiego standardowego postępowania próbowano stosować ściśle analityczne rozwiązania dla funkcji kształtu (funkcji przemieszczeń). Wymienić tu można prace dotyczące elementów stożkowych [6 i 11], cylindrycznych [4] i płyt kołowych [9].

Postępowanie takie jest jednak ograniczone do wąskiej klasy płyt i powłok, dla których można podać jawne analityczne rozwiązania.

W pracy tej podjęto myśl posługiwania się ścisłymi rozwiązaniami, lecz uzyskiwanymi nie analitycznie ale czysto numerycznie. Można w ten sposób zbudować macierze elementu dla dowolnych powłok obrotowo symetrycznych, przy czym liczba stopni swobody elementu będzie zawsze równa  $SSE=8$  (dla stanu osiowo-symetrycznego  $SSE=6$ ). Liczba SSE odpowiada liczbie składowych wektora stanu układu równań kanonicznych, który wyprowadzimy na podstawie teorii SANDERSA [12]. Równania te będą rozwiązywane przez zamianę zagadnienia brzegowego równoważnym zagadnieniem początkowym. Wykonanie odpowiednich algebraicznych operacji macierzowych na wynikach uzyskanych z numerycznego całkowania prowadzi do poszukiwanych macierzy elementu  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{F}$ .

### 1.2. Założenia

W odniesieniu do elementu skończonego przyjmujemy następujące założenia:

1. Oprzemy się na liniowej teorii Sandersa powłok cienkich; w szczególności rozważania ograniczamy do powierzchni środkowej, gdzie obowiązują hipotezy Kirchhoffa-Love'a.

2. Powierzchnia środkowa jest obrotowo-symetryczna, ograniczona brzegami pokrywającymi się z kołami równoleżnikowymi.

3. Element skończony jest powłoką krótką o stałej grubości.

4. Materiał jest liniowo-sprężysty, izotropowy i jednorodny.

5. Obciążenie jest statyczne i ma jedną płaszczyznę symetrii, a w przypadku temperatury zakłada się dodatkowo jej liniowy rozkład wzdłuż grubości powłoki.

### 1.3. Oznaczenia

$A, B$  współczynniki I formy kwadratowej powierzchni środkowej,

$A(\xi)$  macierz układu równań kanonicznych,

$\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_L$  macierze warunków brzegowych,

$\alpha$  współczynnik rozszerzalności liniowej,

$\beta = -\frac{1}{A} \nu_{\perp 1}$  kąt obrotu normalnej do powierzchni środkowej,

$c = \begin{cases} 2 & \text{dla } j=0 \\ 1 & \text{dla } j \geq 1 \end{cases}$  współczynnik w macierzach  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{F}$ ,

$E$  moduł Younga,

$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$  odkształcenia powierzchni środkowej,

$\mathbf{F}$  wektor wstępnych reakcji,

$h$  grubość powłoki,

$i = \begin{cases} 0 \\ L \end{cases}$  indeks brzegów elementu,

- I** macierz jednostkowa,  
*j* numer harmoniki (wyrazu szeregu trygonometrycznego),  
*k* indeks kierunku głównych linii krzywizn:  $k=1$  — południkowy,  
 $k=2$  — obwodowy,  
**K** macierz sztywności,  
 $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$  przyrosty krzywizn i spaczenie powierzchni środkowej,  
 $\overline{M}_{kl}, \overline{N}_{kl}$  momenty i siły podłużne,  
 $\overline{N}, \overline{S}, \overline{T}, \overline{M}$  intensywności zastępczych sił brzegowych (na jednostkę długości łuku o promieniu  $\rho_i$ ),  
*N, S, T, M* zastępcze siły brzegowe,  
 $\nu$  współczynnik Poissona,  
**p** wektor obciążeń,  
**q, Q, Q** wektory uogólnionych przemieszczeń i sił brzegowych,  
*r* macierz sztywności dla jednostkowej długości łuku,  
 $R_k$  promienie krzywizn,  
 $\rho$  promień koła równoleżnikowego,  
 $T_k$  siły poprzeczne  
 $\left. \begin{array}{l} \Delta \vartheta = \vartheta_e - \vartheta_i \\ \Delta_0 \vartheta = \vartheta_0 - \vartheta_m \end{array} \right\}$  różnice temperatury (rys. 3),  
 $\xi = \xi_1, \theta = \xi_2$  zmienne niezależne: południkowa i obwodowa,  
 $u = u, v, w$  przemieszczenia względem układu lokalnego,  
 $y$  wektor stanu w układzie równań kanonicznych,  
 $( )_k = \partial / \partial \xi_k, ( )' = \partial / \partial \xi_1$ .

Dla wygody zapisu elementy macierzy jednokolumnowych (wektory) będziemy pisali poziomo, ujmując je w klamry, np.  $\mathbf{q} = \{u, v, w, \beta\}$ .

## 2. PODSTAWOWE RÓWNANIA CIENKIEJ POWŁOKI OBROTOWO-SYMETRYCZNEJ

Wszystkie równania będziemy odnosili do głównych linii krzywizn, a więc pierwszą formę kwadratową powierzchni środkowej piszemy w postaci

$$(2.1) \quad ds^2 = A_1^2 d\xi_1^2 + A_2^2 d\xi_2^2,$$

a ze względu na obrotową symetrię dalej będziemy posługiwali się oznaczeniami

$$(2.2) \quad A_1 = A(\xi_1), \quad A_2 = B(\xi_1).$$

Równania geometryczne i równowagi wewnętrznej przyjmujemy według [12]. Na rys. 1 pokazano znakowanie przemieszczeń, odnoszonych do lokalnego układu  $(1, 2, n)$ . Jeśli uwzględnimy obrotową symetrię, tzn.  $\partial A_k / \partial \xi_2 = 0$ , to równania geometryczne przyjmują postać

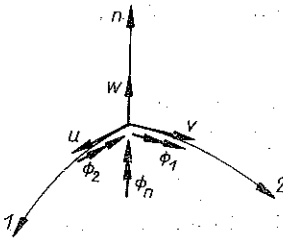
$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A} u_{,1} + \frac{1}{R_1} w, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{B} v_{,2} + \frac{B'}{AB} u + \frac{1}{R_2} w, \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{A} v_{,1} + \frac{1}{B} u_{,2} - \frac{B'}{AB} v, \\ \chi_{11} &= \frac{1}{A} \Phi_{1,1}, \\ \chi_{22} &= \frac{1}{B} \Phi_{2,2} + \frac{B'}{AB} \Phi_1, \\ 2\chi_{12} = 2\chi_{21} &= \frac{1}{A} \Phi_{2,1} + \frac{1}{B} \Phi_{1,2} - \frac{B'}{AB} \Phi_2 - \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Phi_n. \end{aligned}$$

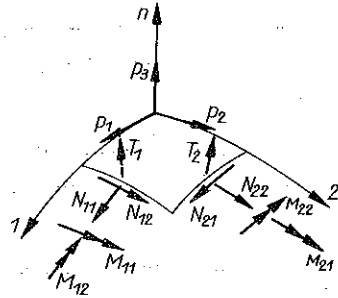
W równaniach tych występują wartości współrzędnych wektorów obrotów:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{R_1} u - \frac{1}{A} w_{,1}, & \Phi_2 &= \frac{1}{R_2} v - \frac{1}{B} w_{,2}, \\ 2\Phi_n &= \frac{1}{A} v_{,1} - \frac{1}{B} u_{,2} + \frac{B'}{AB} v. \end{aligned}$$

Warto podkreślić, że równania (2.3) spełniają warunek ruchu sztywnego, co jak wykazano w [12], nie jest spełnione w często stosowanych równaniach Love'a.



Rys. 1



Rys. 2

Równania równowagi wyprowadzono w [12] posługując się następującymi symetrycznymi tensorami momentów i sił podłużnych:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} N_{kl} &= \frac{1}{2} \left( \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{lk} dz \right), \\ M_{kl} &= \frac{1}{2} \left( \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl} z dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{lk} z dz \right), \\ T_k &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3k} dz \quad (k, l = 1, 2). \end{aligned}$$

Dla znakowania przyjętego na rys. 2 otrzymuje się następujący układ równań równowagi:

$$\begin{aligned}
 (BN_{11})_{,1} + (AN_{12})_{,2} - B'N_{22} + \frac{AB}{R_1} T_1 + \frac{A}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) M_{12,2} + ABp_1 &= 0, \\
 (BN_{12})_{,1} + (AN_{22})_{,2} + B'N_{12} + \frac{AB}{R_1} T_2 - \frac{B}{2} \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) M_{12} \right]_{,1} + ABp_2 &= 0, \\
 (BT_1)_{,1} + (AT_2)_{,2} - AB \left( \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} \right) + ABp_3 &= 0, \\
 (BM_{11})_{,1} + (AM_{12})_{,2} - B'M_{22} - ABT_1 &= 0, \\
 (BM_{12})_{,1} + (AM_{22})_{,2} + B'M_{12} - ABT_2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

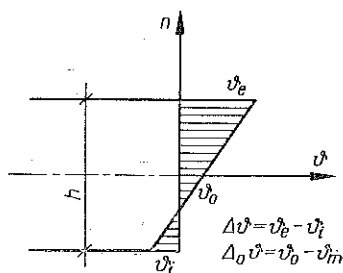
Podane równania J. L. Sanders wyprowadził z zasady prac wirtualnych, co w połączeniu z definicjami (2.5) powoduje tożsamościowe spełnienie szóstego równania równowagi i pojawienie się dodatkowych wyrazów z  $M_{12}$  w (2.6)<sub>1</sub> i (2.6)<sub>2</sub>.

W równaniach fizycznych uwzględniono wyrazy pochodzące od zmiany temperatury (rys. 3):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{Eh} (N_{11} - \nu N_{22}) + \alpha \Delta_0 \vartheta, & \chi_{11} &= \frac{12}{Eh^3} (M_{11} - \nu M_{22}) + \alpha \frac{\Delta \vartheta}{h}, \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{Eh} (N_{22} - \nu N_{11}) + \alpha \Delta_0 \vartheta, & \chi_{22} &= \frac{12}{Eh^3} (M_{22} - \nu M_{11}) + \alpha \frac{\Delta \vartheta}{h}, \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{12}, & \chi_{12} &= \frac{12(1+\nu)}{Eh^3} M_{12}.
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Warunki brzegowe dla brzegów  $\xi_1 = \text{const}$  będą przyjmowane dla zastępczych sił brzegowych lub przemieszczeń (por. [12]):

$$\begin{aligned}
 \bar{N} &= N_{11} + \frac{1}{R_1} M_{11} \quad \text{lub} \quad u, \\
 \bar{S} &= N_{12} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{3}{R_2} \right) M_{12} \quad \text{lub} \quad v, \\
 \bar{T} &= T_1 + \frac{1}{B} M_{12,2} \quad \text{lub} \quad w, \\
 \bar{M} &= M_{11} \quad \text{lub} \quad w_{,1}.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$



Rys. 3

### 3. WYPROWADZENIE KANONICZNEGO UKŁADU RÓWNAŃ POWŁOKI OBROTOWO-SYMETRYCZNEJ

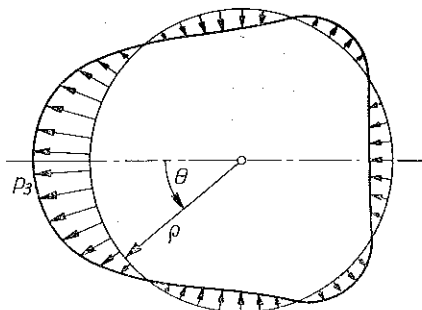
Ze względu na obrotową symetrię powierzchni środkowej i liniowość zagadnienia wszystkie wielkości występujące w równaniach można rozłożyć w szeregi trygonometryczne, przy czym dzięki założeniu 5) będą to szeregi jednego z dwóch typów:

$$C = \sum_{j=0}^{\infty} C^j(\xi) \cos(j\theta), \quad S = \sum_{j=1}^{\infty} S^j(\xi) \sin(j\theta),
 \tag{3.1}$$

gdzie zmienna  $\theta = \xi_2$  odmierza się od płaszczyzny symetrii obciążenia  $p_3$  (rys. 4.)  
W szeregi te rozwijamy następujące wielkości:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} C: & N_{11}, N_{22}, M_{11}, M_{22}, T_1, p_1, p_3, \vartheta, \\ & u, w, \beta = -w_{,1}, \bar{N}, \bar{T}, \bar{M}; \\ S: & N_{12}, M_{12}, T_2, p_2, v, \bar{S}. \end{aligned}$$

Dzięki rozdzieleniu zmiennych dalsze rozważania można ograniczyć do współczynników  $C^j$  i  $S^j$ . W dalszym ciągu pominiemy indeksy  $j$  i oznaczymy kreską pochodną względem  $\xi = \xi_1$ , tj.  $(\cdot)' = d/d\xi$ .



Rys. 4

Układ równań powłoki przyjmuje teraz następującą postać.

### 1. Równania geometryczne

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{u'}{A} + \frac{w}{R_1}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{j}{B} v + \frac{B'}{AB} u + \frac{w}{R_2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{v'}{A} - \frac{j}{B} u - \frac{B'}{AB} v, \\ \chi_{11} &= \frac{1}{A} \left( \frac{1}{R_1} \right)' u + \frac{1}{AR_1} u' + \frac{1}{A} \left( \frac{1}{A} \right)' \beta + \frac{\beta'}{A^2}, \\ \chi_{22} &= \frac{j}{B} \left( \frac{v}{R_2} + \frac{j}{B} w \right) + \frac{B'}{AB} \left( \frac{u}{R_1} + \frac{\beta}{A} \right), \\ 2\chi_{12} &= -\frac{j}{2B} \left( \frac{3}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) u + \frac{1}{A} \left[ \left( \frac{1}{R_2} \right)' - \frac{B'}{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] v - \\ &\quad - \frac{1}{2A} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{3}{R_2} \right) v' - 2 \frac{jB'}{AB^2} w - 2 \frac{j}{AB} \beta. \end{aligned}$$

## 2. Równania równowagi

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad N'_{11} + \frac{B'}{B}(N_{11} - N_{22}) + \frac{jA}{B} \left[ N_{12} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) M_{12} \right] + \frac{A}{R_1} T_1 + A p_1 &= 0, \\
 N'_{12} + 2 \frac{B'}{B} N_{12} - \frac{jA}{B} N_{22} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) M_{12} \right]' + \frac{A}{R_2} T_2 + A p_2 &= 0, \\
 T'_1 + \frac{B'}{B} T_1 + \frac{jA}{B} T_2 - A \left( \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} \right) + A p_3 &= 0, \\
 M'_{11} + \frac{B'}{B} (M_{11} - M_{22}) + \frac{jA}{B} M_{12} - A T_1 &= 0, \\
 M'_{12} + 2 \frac{B'}{B} M_{12} - \frac{jA}{B} M_{22} - A T_2 &= 0.
 \end{aligned}$$

3. Równania fizyczne — jak (2.7).

4. Zastępcze siły brzegowe — jak (2.8) z wyjątkiem

$$(3.5) \quad \bar{T} = T_1 + \frac{j}{B} M_{12}.$$

Pełny układ równań (3.3)–(3.5) przekształcimy do postaci wygodnej dla dalszych obliczeń. Ze względu na MES wszystkie wielkości wewnątrz powłoki wyrazimy przez wielkości brzegowe. Jako takie wielkości przyjmujemy przemieszczenia

$$(3.6) \quad \mathbf{q} = \{u, v, w, \beta\}$$

oraz odpowiadające im siły uogólnione

$$(3.7) \quad \bar{\mathbf{Q}} = \{\bar{N}, \bar{S}, \bar{T}, \bar{M}\}.$$

Łącznie wektory te tworzą wektor stanu  $\mathbf{y}$ :

$$(3.8) \quad \mathbf{y} = \{\mathbf{q}; \bar{\mathbf{Q}}\} = \{u, v, w, \beta; \bar{N}, \bar{S}, \bar{T}, \bar{M}\}.$$

Układ równań przekształcimy do takiej postaci, aby można było obliczyć na podstawie niego wektor  $\mathbf{y}$ . W tym celu najpierw obliczamy z (2.8) i (3.5) siły:

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad N_{11} &= \bar{N} - \frac{\bar{M}}{R_1}, & N_{12} &= \bar{S} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{3}{R_2} \right) M_{12}, \\
 T_1 &= \bar{T} - \frac{j}{B} M_{12}, & M_{11} &= \bar{M}.
 \end{aligned}$$

Wielkości te oraz pochodną  $M_{12}'$  obliczoną z (3.4)<sub>5</sub> podstawiamy do czterech pierwszych równań równowagi. Można z nich wtedy obliczyć wartości składowych pochodnych wektora  $\bar{\mathbf{Q}}$ :

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad \bar{N}' &= \left( \frac{1}{R_1} \right)' \bar{M} + \frac{B'}{BR_1} M_{22} - 2 \frac{jA}{B} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) M_{12} - \frac{jA}{B} \bar{S} + \\
 &\quad + \frac{B'}{B} (N_{22} - \bar{N}) - A p_1,
 \end{aligned}$$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{S}' &= \frac{jA}{B} N_{22} - 2 \frac{B'}{B} \bar{S} + \frac{jA}{BR_2} M_{22} + \left[ \frac{B'}{B} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \left( \frac{1}{R_2} \right)' \right] M_{12} - A p_2, \\ \bar{T}' &= -\frac{B'}{B} \bar{T} + A \left( \frac{\bar{N}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} \right) - 2 \frac{jB'}{B^2} M_{12} - \frac{A}{R_1^2} \bar{M} + \frac{j^2 A}{B^2} M_{22} - A p_3, \\ \bar{M}' &= \frac{B'}{B} (M_{22} - \bar{M}) - 2 \frac{jA}{B} M_{12} + A \bar{T}. \end{aligned}$$

Po prawej stronie układu (3.10) oprócz składowych wektora  $\bar{Q}$  występują jeszcze siły  $N_{22}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{12}$ , które obliczymy oddzielnie, natomiast zredukowaniu ulega siła  $T_2$ .

Z równań geometrycznych (3.3)<sub>1</sub>, (3.3)<sub>3</sub> oraz (3.3)<sub>4</sub> można obliczyć wartości pochodnych  $u'$ ,  $v'$ ,  $\beta'$  a po wykorzystaniu części równań fizycznych (2.7) i definicji  $\beta'$  otrzymujemy:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} u' &= \frac{A}{Eh} \left( \bar{N} - \frac{\bar{M}}{R_1} - \nu N_{22} \right) + A \alpha \Delta_0 \vartheta - \frac{A}{R_1} w, \\ v' &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} A \left[ \bar{S} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{3}{R_2} \right) M_{12} \right] + \frac{jA}{B} u + \frac{B'}{B} v, \\ w' &= -A\beta, \\ \beta' &= \frac{12A}{EH^3} (\bar{M} - \nu M_{22}) + A \alpha \frac{\Delta \vartheta}{h} - \left( \frac{1}{R_1} \right)' u - \frac{1}{R_1} u. \end{aligned}$$

Z pozostałych równań geometrycznych oraz fizycznych można obliczyć siły  $N_{22}$ ,  $M_{22}$  i  $M_{12}$ :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} N_{22} &= Eh \left( \frac{j}{B} v + \frac{B'}{AB} u + \frac{w}{R_1} - \alpha \Delta_0 \vartheta \right) + \nu \left( \bar{N} - \frac{\bar{M}}{R_1} \right), \\ M_{22} &= \frac{Eh^3}{12} \left[ \frac{j}{B} \left( \frac{v}{R_2} + \frac{j}{B} w \right) + \frac{B'}{AB} \left( \frac{u}{R_1} + \beta \right) - \alpha \frac{\Delta \vartheta}{h} \right] + \nu \bar{M}, \\ M_{12} &= \frac{Eh^3}{2(1+\nu)} \left[ 1 + \frac{h^2}{48} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{3}{R_2} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ \frac{1+\nu}{2Eh} \left( \frac{3}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \bar{S} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{j}{B} \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) u - \frac{B'}{AB} w - \beta \right] + \frac{1}{2A} \left[ \left( \frac{1}{R_2} \right)' - \frac{B'}{B} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] v \right\}. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy pełny układ równań kanonicznych (3.11) i (3.10), służących do obliczania składowych wektora stanu (3.8), przy czym dla skrócenia zapisu nie wyeliminowano po prawej stronie tych równań sił (3.12).



## 4. OBLICZENIE MACIERZY SZTYWNOŚCI ELEMENTU I WEKTORA WSTĘPNYCH REAKCJI

Do obliczenia macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  oraz wektora wstępnych reakcji  $\mathbf{F}$  posłużymy się metodą macierzy bazowej [7], którą wykorzystano z powodzeniem w pracy [8].

Układ równań kanonicznych (3.10)–(3.11) można napisać w postaci (po wyeliminowaniu (3.12)):

$$(4.1) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}(\xi)\mathbf{y} + \mathbf{p} \quad (\mathbf{y}, \mathbf{p} \in R^8),$$

gdzie wektor obciążeń  $\mathbf{p}$  zależy zarówno od obciążeń powierzchniowych, jak też od zmian temperatury:

$$(4.2) \quad \mathbf{p} = \mathbf{f}(p_1, p_2, p_3, A_0 \vartheta, A \vartheta).$$

Do równania (4.1) dołączamy warunki brzegowe

$$(4.3) \quad \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 + \mathbf{B}_L \mathbf{y}_L = \mathbf{0},$$

gdzie indeksy 0 i  $L$  odpowiadają brzegom elementu o współrzędnych  $\xi_0$  i  $\xi_L$ , np.  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(\xi_0)$ .

W dalszym ciągu wyprowadzimy wzory dla utwierdzonych brzegów, dla których macierze  $\mathbf{B}_0$  i  $\mathbf{B}_L$  mają postać:

$$(4.4) \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

gdzie każda z podmacierzy jest o wymiarze  $4 \times 4$ .

Zgodnie z metodą opisaną w [7] zamiast równania wektorowego (4.1) będziemy najpierw rozpatrywali jednorodne równanie macierzowe

$$(4.5) \quad \frac{d\mathbf{Y}}{d\xi} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$$

z warunkiem początkowym

$$(4.6) \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(\xi_0) = \mathbf{I},$$

gdzie macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{I}$  są o wymiarach  $(8 \times 8)$ .

Po wykonaniu całkowania (będzie to 8-krotne całkowanie z warunkami początkowymi odpowiadającymi kolejnym kolumnom macierzy  $\mathbf{Y}_0$ ) otrzymujemy macierz  $\mathbf{Y}_L = \mathbf{Y}(\xi_L)$

$$(4.7) \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{I} \xrightarrow{NI} \mathbf{Y}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix},$$

$\begin{matrix} 8 \times 8 & & 4 \times 4 & 4 \times 4 \end{matrix}$

której podmacierze można interpretować zgodnie z użytymi oznaczeniami.

Dla obliczenia macierzy sztywności posłużymy się definicją jej składowych jako reakcji od kolejnych jednostkowych przemieszczeń w kierunkach więzów z zachowaniem macierzy warunków brzegowych (4.4). Dochodzimy w ten sposób do równań

$$(4.8) \quad (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L \mathbf{Y}_L) \mathbf{D}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{D}_L = \mathbf{Y}_L \mathbf{D}_0.$$

Równanie (4.8)<sub>1</sub> zastępuje warunek brzegowy (4.3) i służy do obliczenia rzeczywistej macierzy wejścia  $D_0$ . Za pomocą równania (4.8)<sub>2</sub> oblicza się macierz wyjścia  $D_L$ , która spełnia warunki (4.8)<sub>1</sub>. Macierze te podzielimy na bloki o wymiarach  $4 \times 4$ :

$$(4.9) \quad D_0 = \begin{bmatrix} \delta_{00} & \delta_{0L} \\ r_{00} & r_{0L} \end{bmatrix}, \quad D_L = \begin{bmatrix} \delta_{L0} & \delta_{LL} \\ r_{L0} & r_{LL} \end{bmatrix}.$$

Bloki  $\delta$  są przemieszczeniami, a  $r$  reakcjami, przy czym konwencjonalny system dwuindeksowy pokazuje miejsce, gdzie występuje reakcja, wywołana przemieszczeniami wymuszonymi w miejscu oznaczonym drugim indeksem.

Po napisaniu układu (4.8) w formie rozwiniętej otrzymujemy następujące rozwiązanie:

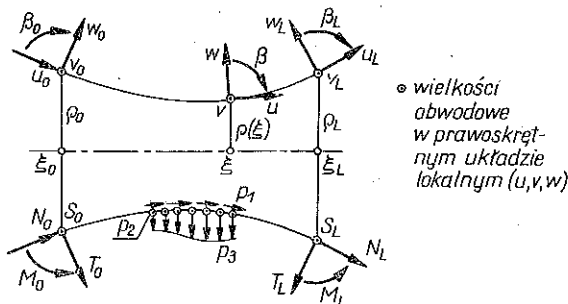
$$(4.10) \quad \begin{aligned} \delta_{00} &= \delta_{LL} = I, & \delta_{0L} &= \delta_{L0} = 0, \\ r_{0L} &= q_Q^{-1}, & r_{00} &= -r_{0L} q, \\ r_{L0} &= Q_q + Q_Q r_{00}, & r_{LL} &= Q_Q r_{0L}. \end{aligned}$$

Istotną cechą uzyskanego rozwiązania jest konieczność tylko jednokrotnego odwracania podmacierzy  $q_Q$  o wymiarach  $4 \times 4$ ; dalsze operacje wymagają tylko mnożenia.

Reakcje  $r$  z (4.10) tworzą macierz sztywności, w której znaki minus odpowiadają znakowaniu przyjętemu na rys. 5:

$$(4.11) \quad r = \begin{bmatrix} -r_{00} & -r_{0L} \\ r_{L0} & r_{LL} \end{bmatrix}.$$

Macierz  $r$  dotyczy sił brzegowych  $\bar{Q}$  odnoszonych do jednostki długości łuku kół równoleżnikowych o promieniach  $\rho_i$ . Wadą tej macierzy jest jej niesymetria, tzn.  $r^T \neq r$ .



Rys. 5

W dalszym ciągu wprowadzimy wielkości całkowite dla sił uogólnionych odpowiadających promieniowi  $\rho_i = \rho(\xi_i)$ :

$$(4.12) \quad Q_i = c\pi\rho_i \bar{Q}_i = \{N, S, T, M\}_i,$$

gdzie wartość współczynnika

$$(4.13) \quad c = \begin{cases} 2 & \text{dla } j=0, \\ 1 & \text{dla } j \geq 1 \end{cases}$$

wynika z pracy reakcji  $Q_i$  na przemieszczeniach  $q_i$ :

$$\int_0^{2\pi} q_i^T \bar{Q}_i \begin{Bmatrix} \sin^2 \\ \cos^2 \end{Bmatrix} \rho_i d\theta = q_i^T Q_i.$$

Macierz sztywności elementu  $\mathbf{K}$  będzie teraz macierzą transformującą przemieszczenia  $\mathbf{q}$  w reakcje całkowite więzów  $\mathbf{Q}$ :

$$(4.14) \quad \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q},$$

gdzie symetryczna macierz  $\mathbf{K}$  wynosi

$$(4.15) \quad \mathbf{K} = c\pi \begin{bmatrix} -\rho_0 \mathbf{r}_{00} & -\rho_0 \mathbf{r}_{0L} \\ \rho_L \mathbf{r}_{L0} & \rho_L \mathbf{r}_{LL} \end{bmatrix}.$$

Wektor wstępnych reakcji  $\mathbf{F}$  obliczamy w podobny sposób przez całkowanie niejednorodnego równania różniczkowego (4.1) z jednorodnymi warunkami początkowymi:

$$(4.16) \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{z}_0 = \mathbf{0} \xrightarrow{NI} \mathbf{z}_L = \{\mathbf{q}_p, \mathbf{Q}_p\}.$$

8×1      4×1      4×1

Ze spełnienia warunków brzegowych (4.3) w odniesieniu do wektorów (4.7) i (4.16) i zależności pomiędzy wektorami wejścia i wyjścia wynikają zależności

$$(4.17) \quad (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L \mathbf{Y}_L) \mathbf{d}_0 = -\mathbf{B}_L \mathbf{z}_L,$$

$$\mathbf{d}_L = \mathbf{Y}_L \mathbf{d}_0 + \mathbf{z}_L,$$

gdzie analogicznie do (4.9) wprowadzimy oznaczenia

$$(4.18) \quad \mathbf{d}_0 = \{\mathbf{\delta}_{0p}, \mathbf{r}_{0p}\}, \quad \mathbf{d}_L = \{\mathbf{\delta}_{Lp}, \mathbf{r}_{Lp}\}.$$

8×1      4×1      4×1      8×1      4×1      4×1

Rozwiązaniem (4.17) są następujące wielkości

$$(4.19) \quad \mathbf{\delta}_{0p} = \mathbf{\delta}_{Lp} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_{0p} = -\mathbf{q}_p^{-1} \mathbf{q}_p, \quad \mathbf{r}_{Lp} = \mathbf{Q}_Q \mathbf{r}_{0p} + \mathbf{Q}_p.$$

W odniesieniu do wielkości całkowitych (4.12) wektor wstępnych reakcji będzie miał postać

$$(4.20) \quad \mathbf{F} = c\pi \begin{bmatrix} -\rho_0 \mathbf{r}_{0p} \\ \rho_L \mathbf{r}_{Lp} \end{bmatrix}.$$

Dla jednolitości opisu w pracy użyto terminu „wektor wstępnych reakcji”, dzięki czemu równanie równowagi elementu skończonego przyjmuje postać

$$(4.21) \quad \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Oczywiście, po przeniesieniu na prawą stronę wektor  $-\mathbf{F}$  będzie wektorem równoważnych sił węzłowych [14].

## 5. PRZYKŁADY LICZBOWE

Przy korzystaniu z równań (4.10)–(4.12) należy określić funkcje  $A$ ,  $B$ ,  $B'$ ,  $R_1^{-1}$ ,  $R_2^{-1}$ ,  $(R_1^{-1})'$ ,  $(R_2^{-1})'$ , odpowiadające danej powierzchni środkowej

$$(5.1) \quad \rho = f(\xi).$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do układu współrzędnych cylindrycznych utożsamiając oś  $\xi$  z osią powierzchni obrotowo-symetrycznej.

### 5.1. Element stożkowy

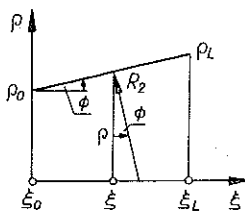
Na rys. 6 pokazano główne oznaczenia. Potrzebne wzory są następujące:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \operatorname{tg} \varphi, & A &= \frac{1}{\cos \varphi}, & B &= \rho, \\ B' &= \operatorname{tg} \varphi, & \frac{1}{R_1} &= 0, & \frac{1}{R_2} &= \frac{\cos \varphi}{\rho}, \\ \left(\frac{1}{R_1}\right)' &= 0, & \left(\frac{1}{R_2}\right)' &= -\frac{\sin \varphi}{\rho^2}. \end{aligned}$$

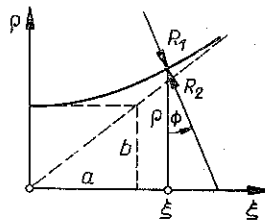
Dla porównania wyników obliczenia wykonano dla elementu cylindrycznego o danych zaczerpniętych z pracy [4]:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0^\circ, & \rho &= R_2 = 15,131 \text{ cm}; & L &= h = 1,0 \text{ cm}; \\ E &= 1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2; & \nu &= 0,3. \end{aligned}$$

W obliczeniach przyjęto dla  $j=2, 10$ . Wyniki podane w tablicy 1 dotyczą górnej lewej ćwiartki macierzy **K**. W pierwszym wierszu podano wyniki uzyskane według proponowanej metody (NI), w drugim według rozwiązań analitycznych (A) podanych w [4], w trzecim wierszu przez przyjęcie wielomianowych funkcji kształtu ( $P$ ). W tym ostatnim przypadku przyjęto liniowe funkcje  $P^{(1)}$  dla przemieszczeń  $u, v$  i trzeciego stopnia wielomian  $P^{(3)}$  dla  $w$ . Wyniki ( $P$ ) uzyskano algorytmem podanym w [10], lecz do obliczeń wzięto równania geometryczne (2.3).



Rys. 6



Rys. 7

Z porównania wynika, że zgodność pomiędzy (NI) i (A) jest bardzo dobra, natomiast aproksymacja przemieszczeń wielomianami daje wyniki coraz gorsze w miarę podwyższania  $j$ . Przy  $j=10$  wartości  $K_{12}$  i  $K_{14}$  uzyskane dla ( $P$ ) różnią się przeszło dwukrotnie od wyników z (NI).

Wyniki (NI) otrzymano przy wykorzystaniu wzorów numerycznego całkowania Rungego Kutty. Okazało się, że przyjęcie 5 kroków numerycznego całkowania daje wyniki, które różnią się w przybliżeniu 0,2% od wyników otrzymanych dla 20 kroków.

### 5.2. Element hiperboidalny

Jako dalszy przykład przyjmijmy element hiperboloidy jednowłokowej o pół osiach  $a, b$  jak zaznaczono na rys. 7. Potrzebne wzory można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \xi^2}, & \rho' &= \frac{a^2}{b^2}, \\
 A &= \sqrt{1 + r'^2}, & B &= \rho, \\
 (5.3) \quad \frac{1}{R_1} &= -\frac{b^4}{a^2} \left( \frac{b^4}{a^4} \rho^2 + \xi^2 \right)^{-3/2}, & \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{\rho A}, \\
 \left( \frac{1}{R_1} \right)' &= 3 \frac{b^4}{a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \left( \frac{b^4}{a^4} \rho^2 + \xi^2 \right)^{-5/2}, \\
 \left( \frac{1}{R_2} \right)' &= -\frac{\rho' A + \rho A'}{R_2^2}, & A' &= \frac{a^2}{b^2} \frac{\rho'}{\rho^2 A} (\rho - \rho' \xi).
 \end{aligned}$$

Obliczenia porównawcze wykonano dla elementu o danych:

$$\begin{aligned}
 a &= 1,0 \text{ cm}; & b &= 3 \text{ cm}; & \xi_0 &= 86,585 \text{ cm}; & \xi_L &= 91,585 \text{ cm}; \\
 \rho_0 &= 50,0 \text{ cm}; & h &= 1,0 \text{ cm}; & E &= 1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2; & \nu &= 0,3; \\
 p_1 &= p_2 = 0; & p_3 &= 1,0 \text{ kp/cm}^2.
 \end{aligned}$$

W tabelicy 2 podano wyniki obliczeń dla  $j=0, 1$  (górną prawą część tabelicy) Obliczenia powtórzone dla elementu stożkowego o danych

$$\varphi = 30^\circ; \quad \xi_0 = 0,0 \text{ cm}; \quad \xi_L = 5,0 \text{ cm}; \quad \rho_0 = 50,0 \text{ cm}$$

i pozostałych danych takich samych, jak dla elementu hiperboloidalnego.

Wyniki dla elementu stożkowego przytoczono w lewej dolnej części tabelicy 2. Różnią się one od wyników dla elementu hiperboloidalnego dopiero na 4-tym miejscu znaczącym, co dobrze świadczy o aproksymacji powierzchni zakrzywionej powierzchnią stożkową.

#### UWAGI KOŃCOWE

W pracy podano metodę oraz algorytm obliczania macierzy elementu o dowolnym kształcie obrotowo-symetrycznym. Algorytm można łatwo uogólnić na zmienną grubość ścianki elementu oraz na materiał ortotropowy lub o niejednorodności zmiennej wzdłuż południka.

Podana metoda jest w zasadzie metodą wstrzeliwania i obok szeregu zalet [5] jej wadą jest niestabilność przy przekroczeniu krytycznej długości elementu  $L_{kr}$ . Długość ta wynika z zasięgu strefy efektu brzegowego i może być oszacowana np. według propozycji A. KALNINSA [3]:

$$(6.1) \quad L_{kr} \approx 5 \frac{\sqrt{R_{\min} h}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}},$$

gdzie  $L \leq L_{kr}$  należy odmierzać wzdłuż tworzącej elementu.

Oszacowanie (6.1) może być przydatne w powłokach, w których wyraźnie występuje efekt brzegowy i traci na znaczeniu w powłokach mało wyniosłych, gdzie efekt brzegowy w ogóle nie występuje.

Tablica 1

$j=2$			
5,2252	1,8050	-5,1436	8,4178
$10^7$	$10^5$	$10^5$	$10^4$
5,2252	1,8053	-5,1455	8,4285
$10^7$	$10^5$	$10^5$	$10^4$
5,2343	1,7228	-5,1872	8,6161
$10^7$	$10^5$	$10^5$	$10^4$
	1,8505	2,0187	-3,3290
	$10^7$	$10^5$	$10^4$
	1,8570	1,9748	-3,1099
	$10^7$	$10^5$	$10^4$
	1,8602	2,1127	-3,4251
	$10^7$	$10^5$	$10^4$
		5,2502	2,6168
		$10^7$	$10^4$
		5,2529	2,6182
		$10^7$	$10^4$
		5,2504	2,6168
		$10^7$	$10^4$
			1,7435
			$10^7$
			1,7441
			$10^7$
			1,7435
			$10^7$
$j=10$			
5,2828	1,7648	-4,3954	3,7909
$10^7$	$10^6$	$10^5$	$10^4$
5,2828	1,7648	-4,3841	3,7850
$10^7$	$10^6$	$10^5$	$10^4$
5,7899	8,6142	-5,3983	8,2642
$10^7$	$10^5$	$10^5$	$10^4$
	2,4570	9,8140	-1,4614
	$10^5$	$10^5$	$10^5$
	2,4570	9,8134	-1,4612
	$10^6$	$10^5$	$10^5$
	2,5906	1,0842	-1,7524
	$10^5$	$10^6$	$10^5$
		5,7177	2,7118
		$10^7$	$10^7$
		5,7178	2,7118
		$10^7$	$10^7$
		5,7194	2,7125
		$10^7$	$10^7$
			1,7922
			$10^7$
			1,7922
			$10^7$
			1,7930
			$10^7$

Tablica 2

$j=0$	K					F								
6,0513	0,0000	$10^0$	-7,8141	$10^5$	7,5691	$10^5$	-6,1447	$10^7$	0,0000	$10^0$	-8,3577	$10^5$	-7,9758	$10^5$
$10^7$	2,2760	$10^7$	0,0000	$10^0$	0,0000	$10^0$	0,0000	$10^0$	0,0000	$10^0$	0,0000	$10^0$	0,0000	$10^0$
6,0511			2,0560	$10^6$	-5,4482	$10^6$	9,4896	$10^5$	0,0000	$10^0$	-1,7657	$10^6$	-5,2703	$10^6$
$10^7$														
0,0000	2,2759	$10^7$			2,0309	$10^7$	-9,1605	$10^5$	0,0000	$10^0$	5,1725	$10^6$	1,0113	$10^7$
$10^0$														
-7,8163	0,0000	$10^0$	2,0558	$10^6$			6,2574	$10^7$	0,0000	$10^0$	1,0020	$10^6$	9,5907	$10^5$
$10^5$														
7,5716	0,0000	$10^0$	-5,4477	$10^6$	2,0308	$10^7$			2,0343	$10^7$	0,0000	$10^0$	0,0000	$10^0$
$10^5$														
-6,1445	0,0000	$10^0$	9,4922	$10^5$	-9,1636	$10^5$	6,2571	$10^7$	2,0342	$10^7$	2,0536	$10^6$	5,5500	$10^6$
$10^7$														
0,0000	0,0000	$10^0$	0,0000	$10^0$	0,0000	$10^0$	0,0000	$10^0$	2,0342	$10^7$			2,1063	$10^7$
$10^0$														
-8,3600	0,0000	$10^0$	-1,7655	$10^6$	5,1720	$10^6$	1,0022	$10^6$	0,0000	$10^0$	2,0534	$10^6$		
$10^5$														
-7,9786	0,0000	$10^0$	-5,2698	$10^6$	1,0113	$10^7$	9,5938	$10^5$	0,0000	$10^0$	5,5496	$10^6$	2,1062	$10^7$
$10^5$														
-2,7190	0,0000	$10^0$	-9,1421	$10^2$	8,7677	$10^2$	3,2798	$10^1$	0,0000	$10^0$	-9,4213	$10^2$	-9,0690	$10^2$
$10^1$														
-2,7202	0,0000	$10^0$	-9,1426	$10^2$	8,7685	$10^2$	3,2812	$10^1$	0,0000	$10^0$	-9,4218	$10^2$	-9,0699	$10^2$
$10^1$														

Tablica 2 cd.

$j=1$	K							F
3,0268 $10^7$	1,7850 $10^5$	-3,8823 $10^5$	3,7526 $10^5$	-3,0663 $10^7$	-1,0718 $10^6$	-4,1498 $10^5$	-3,9535 $10^6$	
	1,1493 $10^7$	1,1112 $10^5$	-9,2687 $10^4$	1,1581 $10^6$	-1,0681 $10^7$	5,4271 $10^4$	6,6501 $10^4$	
3,0266 $10^7$		1,0303 $10^6$	-2,7266 $10^6$	4,7121 $10^6$	5,5827 $10^4$	8,8540 $10^6$	-2,6366 $10^6$	
1,7852 $10^6$	1,1493 $10^7$		1,0163 $10^3$	-4,5419 $10^6$	-6,7187 $10^4$	2,5876 $10^6$	5,0549 $10^6$	
-3,8834 $10^5$	1,1112 $10^5$	1,0301 $10^6$		3,1289 $10^7$	-5,2984 $10^3$	4,9813 $10^5$	4,7583 $10^5$	
3,7538 $10^5$	-9,2691 $10^4$	-2,7264 $10^6$	1,0162 $10^7$		1,0288 $10^7$	1,1147 $10^5$	9,5810 $10^4$	
-3,0661 $10^7$	1,1582 $10^6$	4,7134 $10^5$	-4,5434 $10^5$	3,1288 $10^7$		1,0288 $10^6$	2,7775 $10^6$	
-1,0718 $10^6$	-1,0681 $10^7$	5,5832 $10^4$	-6,7195 $10^4$	-5,2838 $10^3$	1,0287 $10^7$		1,0540 $10^7$	
-4,1509 $10^5$	5,4275 $10^4$	-8,8527 $10^5$	2,5873 $10^6$	4,9826 $10^5$	1,1148 $10^5$	1,0286 $10^6$		
-3,9549 $10^5$	6,6509 $10^4$	-2,6363 $10^6$	5,0547 $10^6$	4,7599 $10^4$	9,5817 $10^4$	2,7773 $10^6$	1,539 $10^7$	
-1,3470 $10^1$	2,7538 $10^6$	-4,5712 $10^2$	4,3821 $10^2$	1,6256 $10^1$	2,8271 $10^6$	-4,7107 $10^2$	-4,5327 $10^2$	
-1,3476 $10^1$	2,7553 $10^6$	-4,5714 $10^2$	4,3825 $10^2$	1,6264 $10^1$	2,8277 $10^6$	-4,7110 $10^2$	-4,5332 $10^2$	



W przypadku  $L > L_{kr}$  należy zmniejszyć długość elementu, bądź też stosować inne metody rozwiązywania dwupunktowego zagadnienia brzegowego, np. metodę wielosegmentową [3].

Element stożkowy z p. 5.1. został zastosowany do obliczania podstawy wysokiego komina [1]. Element włączono do programu MES ułożonego według [13] w języku ALGOL-1204. Obliczenia dla 26 elementów stożkowych i pretowych wykonano na EMC Odra-1204 tylko przy wykorzystaniu pamięci operacyjnej i pojemności 16K.

Prace zostały wykonane w Ośrodku ETO Politechniki Krakowskiej.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. GUMIŃSKI, J. KRUPIŃSKI, A. MŁODZIANOWSKI, Z. WASZCZYŻYN, *Komputeryzacja obliczania sił wewnętrznych w podstawie wysokiego komina*, XXI Konferencja Naukowa KILiW i KN PZITB, Krynica 1975, Materiały t. 1, 131-141.
2. R. E. JONES, D. R. STROME, *Direct stiffness method analysis of shells of revolution utilizing curves elements*, AIAA J., 9, 4, 1519-1525, 1966.
3. A. KALNINS, *Analysis of shells of revolution subjected to symmetrical and nonsymmetrical loads*, J. Appl. Mech., 3, 31, 467-476, 1964.
4. A. A. LAKIS, *Cylindrical finite element for analysis of cylindrical structures*, Dept. Mech. Engng, Mc Gill Univ., R. No 70-2, Montreal, Canada, Nov. 1969.
5. G. H. MEYER, *Initial value methods for boundary value problems*, Academic Press, New York-Toronto 1973.
6. R. R. MEYER, M. B. HARMON, *Conical segment method for analysing open crown shells of revolution for edge loading*, AIAA J., 4, 1, 886-891, 1963.
7. K. MOSZYŃSKI, *Rozwiązanie równań różniczkowych zwyczajnych na maszynach cyfrowych*, WNT, Warszawa 1971.
8. A. MŁODZIANOWSKI, Z. WASZCZYŻYN, *Komputeryzacja obliczania stateczności ram przy obciążeniu śledzącym*, XX Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Materiały t. 1, 163-172.
9. G. C. PARDOEN, *Static, vibration and buckling analysis of axisymmetric circular plates using finite elements*, Int. J. Computers and Structures, 2, 3, 355-373, 1973.
10. J. H. PERCY, Th. H. T. PIAN, S. KLEIN, D. R. NAVARATNA, *Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution*, AIAA J., 11, 3, 2138-2145, 1965.
11. E. P. POPOV, J. PENZIEN, ZUNG-AU LU, *Finite element solution for axisymmetrical shells*, Proc. ASCE, EM5, 90, 119-145, 1964.
12. J. L. SANDERS, *An improved first-approximation theory for thin shells*, NASA TR R-24, 1959.
13. J. SZMELTER i in., *Programy metody elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1973.
14. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, tłum. polskie Arkady, Warszawa 1972.

#### Резюме

#### ТОЧНЫЙ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ

Дается численный метод расчета матрицы жесткости и выходных реакций. Основывается на метод базисной матрицы при интегрировании канонической системы уравнений оболочки. Эта система выведена из уравнений линейной теории Сандерса тонких оболочек. Представ-

ленный метод совсем не использует понятия функции формы, причем число степеней свободы узла всегда равно четырем, а точность решения зависит только от длины элемента (в случае оболочек с граничным эффектом) и применяемых формул численного интегрирования. Как численные примеры рассчитаны матрицы конического и гиперболидального элементов.

#### SUMMARY

#### EXACT ROTATIONALLY-SYMMETRIC ELEMENT FOR THIN ELASTIC SHELL

The numerical method for computation of the stiffness matrix and the initial reactions of structure is presented. For integration of the canonical system of the shell equations the basis matrix method was applied. This system of equations was derived from the linear Sanders theory of thin shells.

In the method presented the conception of the shape function is not used at all, the number of freedom for the node always equals four and the accuracy of the solution depends solely on the element length (in a case of shell with boundary effect) and on the formulae used for the numerical computation.

As the numerical examples the matrices of conical and hyperboloidal elements were calculated.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
OŚRODEK ELEKTRONICZNYCH TECHNIK OBLICZENIOWYCH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 13 maja 1976 r.*