

ANALIZA PROBABILISTYCZNA DWÓCH DYSKRETNYCH STOCHASTYCZNYCH MODELI JEDNOSTOPNIOWEJ PRZEKŁADNI ZĘBATEJ O ZEBACH PROSTYCH

MIKOŁAJ M A K S I M I U K (WARSZAWA)

W pracy porównano wyniki jakościowe analizy probabilistycznej dwóch modeli przekładni zębatej, podanych przez L. MÜLLERA [2] i W. NADOLSKIEGO [4]. Wprowadzono i zdefiniowano funkcję losową opisującą błędy podziałki zasadniczej kół zębatych. Ruch modelu przekładni zębatej opisano równaniami różniczkowymi o współczynnikach zależnych od czasu. Równania ruchu rozwiązano w sposób ścisły i podano odpowiednie wzory rekurencyjne dla obliczania wariancji przemieszczania zębów, wariancji prędkości przemieszczenia i funkcji korelacji wzajemnej między tymi wielkościami. Otrzymane wzory są jednak skomplikowane i nadają się praktycznie tylko do analizy numerycznej.

1. WSTĘP

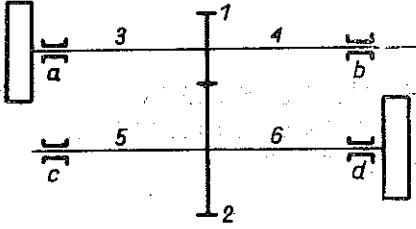
Zagadnienie dynamiki przekładni zębatej jest zagadnieniem niezmiernie złożonym. W celu analizy matematycznej tego zjawiska zbudowano szereg modeli dynamicznych odpowiadających w większym lub mniejszym stopniu rzeczywistości. Wyniki uzyskane przez różnych autorów różnią się zarówno wyborem czynników wpływających na dynamikę przekładni jak i samym postawieniem problemu. Te różnice spowodowane są przede wszystkim złożonością badanego zjawiska sprzecznością dużych trudności nie tylko w matematycznym opisie danego modelu lecz również przy badaniach doświadczalnych.

Wydaje się, że pełne rozwiązanie zagadnienia obciążeń dynamicznych przekładni zębatej wymaga nie tylko rozwiązania równań ruchu odpowiednich układów dynamicznych, ale także analizy probabilistycznej. Przy projektowaniu przekładni zębatych trudno bowiem określić ściśle, jakie będą warunki ich eksploatacji. Przekładnie, szczególnie ogólnego użytku, pracują w bardzo różnorodnych warunkach i przeznaczone są do wykonywania różnorodnych zadań. Te wszystkie czynniki powodują, że większość parametrów przekładni stanowią wielkości losowe, w wyniku czego obciążenia dynamiczne są też wielkościami losowymi. W pracy podjęto próbę określenia charakterystyk probabilistycznych drgań dwóch przyjętych modeli przekładni zębatej.

2. PIERWSZY MODEL PRZEKŁADNI ZĘBATEJ. POSTAWIENIE PROBLEMU

Schemat przekładni zębatej jest pokazany na rys. 1. Zgodnie z [4] jeżeli założymy bardzo małe odkształcenia wałów 3, 4, 5, 6 i ich podparć łożysk a , b , c , d , to dyskretny model przekładni zębatej może być przedstawiony za pomocą dwóch nieodkształ-

calnych brył I, II połączonych sprężyną o sztywności zastępczej $k_z(t)$ i tłumikiem wiskotycznym o tłumieniu zastępczym C_z wzdłuż osi Z^0 (rys. 2).



Rys. 1

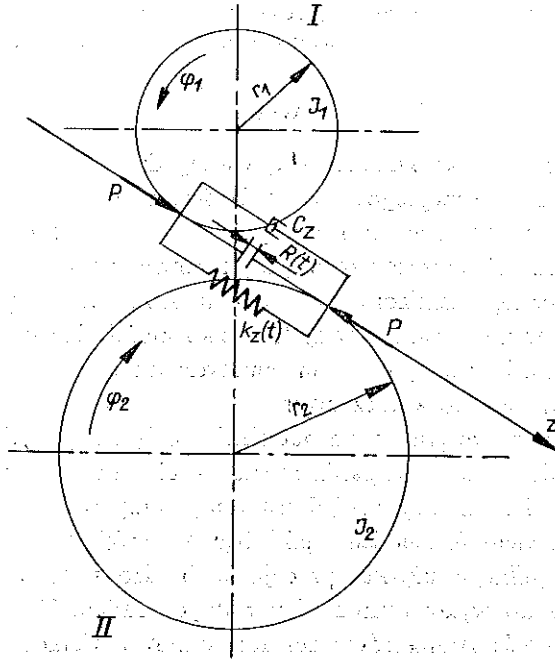
Jeśli założymy, że zęby nie tracą kontaktu, to równanie ruchu względnego modelu dyskretnego przekładni zębatej przyjmuje postać

$$(2.1) \quad m\ddot{Z} + C_z[\dot{Z} - \dot{R}(t)] + k_z(t)[Z - R(t)] = P,$$

gdzie Z oznacza przemieszczenie względne zębów wzdłuż osi Z^0 (rys. 2),

$$Z = r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2,$$

r_1, r_2 odpowiednio promienie zasadnicze zębniaka i koła dużego, φ_1, φ_2 współrzędne kątowe obrotu brył I i II, $R(t)$ funkcję losową opisującą błędy podziałki zasadniczej kół zębatach, J_1 moment bezwładności bryły I względem osi obrotu (rys. 2),



Rys. 2

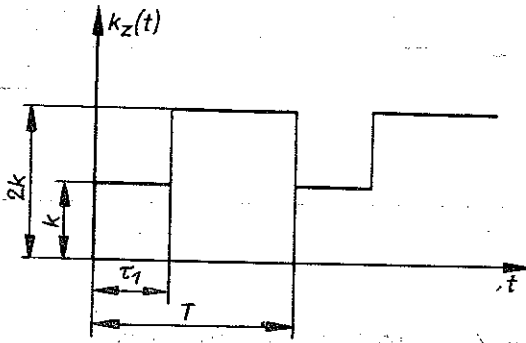
J_2 moment bezwładności bryły II względem osi obrotu, C_z tłumienie zastępcze, P siłę statyczną (zewnętrzna), $k_z(t)$ sztywność zastępczą oraz

$$m = \frac{J_1 J_2}{r_1^2 J_2 + r_2^2 J_1}.$$

W ogólnym przypadku $k_z(t)$ zależy od kąta obrotu kół zębatach, jak i od kształtowania sprężystego zębów, gdyż dla $Z - R(t) \leq 0$, $k_z = 0$, co ma miejsce przy

utracie kontaktu między zębami podczas zazębienia. Zakładając, że ten przypadek nie zachodzi, sztywność zastępczą możemy przyjąć jako okresową funkcję czasu przedstawioną na rys. 3 o okresie

$$(2.2) \quad T = \frac{2}{z_1 \omega_1} = \frac{2}{z_2 \omega_2},$$

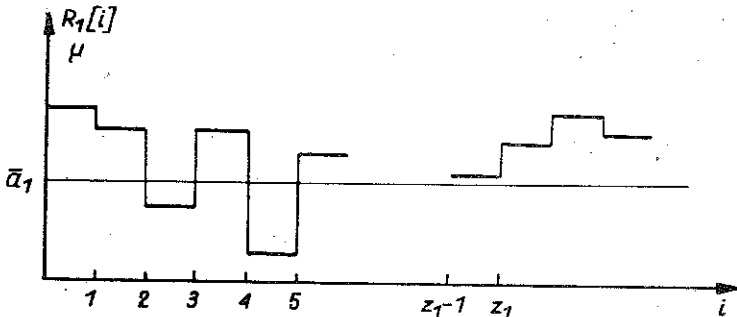


Rys. 3

gdzie z_1, z_2 oznaczają liczbę zębów zębnika i koła dużego oraz ω_1, ω_2 prędkość kątową zębnika i koła dużego. W pracy [4] sztywność zastępczą przyjęto jako krzywą cosinusoidalną.

2.1. Określenie funkcji losowej $R(t)$

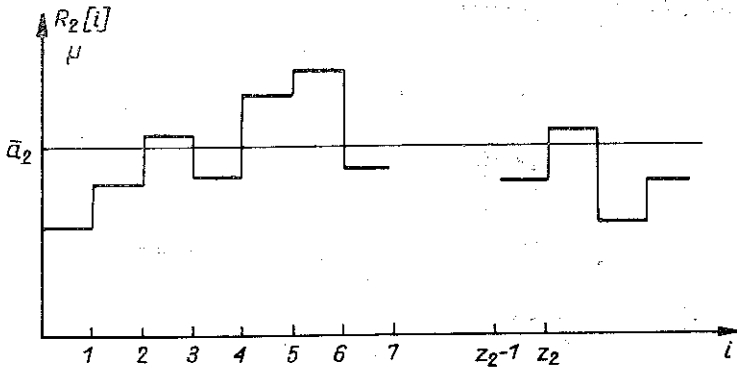
Na podstawie przeprowadzonej analizy statystycznej błędów podziałki zasadniczej kół zębatych [1] funkcję losową opisującą błędy podziałki zasadniczej przyjęto jako 1) normalną o wartości średniej \bar{a} i wariancji σ^2 , 2) okresową o okresie $T_{R_1} = z_1 T$, gdzie z_1 oznacza liczbę zębów w kole zębatym, T okres zazębienia (rys. 3), 3) stacjonarną w szerokim sensie oraz 4) ergodyczną. Jednakże współpraca dwóch kół zębatych zależy od funkcji losowej $R(t)$ będącej różnicą funkcji $R_1(t)$ opisującej błędy podziałki zębnika i funkcji, $R_2(t)$ opisującej błędy podziałki koła dużego oraz odpowiednią kombinacją tych różnic zgodnie z zasadą zazębienia [2]. Sposób określania funkcji $R(t)$ został pokazany na rys. 4—7. Na rys. 4 pokazano wykres



Rys. 4

błądu podziałki zębnika o wartości średniej \bar{a}_1 . Błąd podziałki $R_1[i]$ otrzymano jako różnicę

$$R_1[i] = t_1[i] - t_0,$$



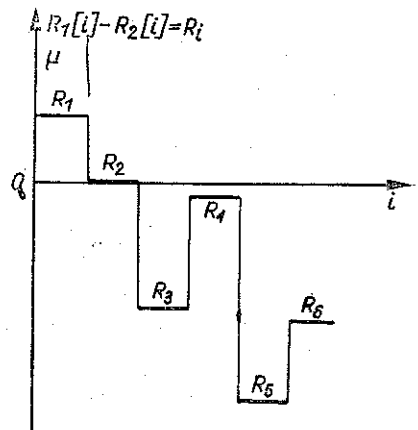
Rys. 5

gdzie t_0 oznacza podziałkę teoretyczną, $t_1[i]$ podziałkę rzeczywistą (zmierzoną) oraz i numer kolejny zęba. Na rys. 5 przedstawiono błąd podziałki koła dużego o wartości średniej \bar{a}_2 .

Na rys. 6 przedstawiono różnicę funkcji $R_1[i]$ i $R_2[i]$. Jest to także funkcja okresowa o okresie

$$T_R = z_1 z_2 T.$$

Na rys. 7 pokazano interesującą nas funkcję $R(t)$, skonstruowaną zgodnie z zasadą zazębienia [2]; jej wykres zależy od tego, czy w zazębieniu są dwie czy jedna para zębów. Jednakże określenie charakterystyk probabilistycznych tak zdefiniowanej funkcji $R(t)$ jest utrudnione. Tę samą funkcję można otrzymać w zupełnie inny sposób, podany na rys. 8—10.



Rys. 6

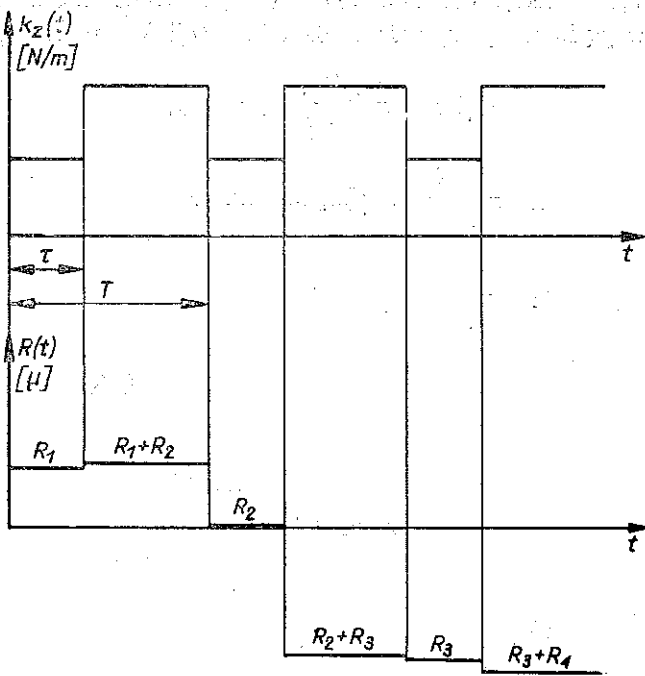
Estymatory funkcji korelacji w okresie T_R funkcji losowych $R'_1[j]$ i $R'_2[j]$ przedstawionych na rys. 8 i 9 możemy obliczyć numerycznie korzystając ze wzoru

$$(2.3) \quad K'_{R'_i}[m] = \frac{1}{2z_i} \sum_{j=1}^{2z_i} R'_i[j] R'_i[j+m] \quad \text{dla } j+m \leq 2z_i$$

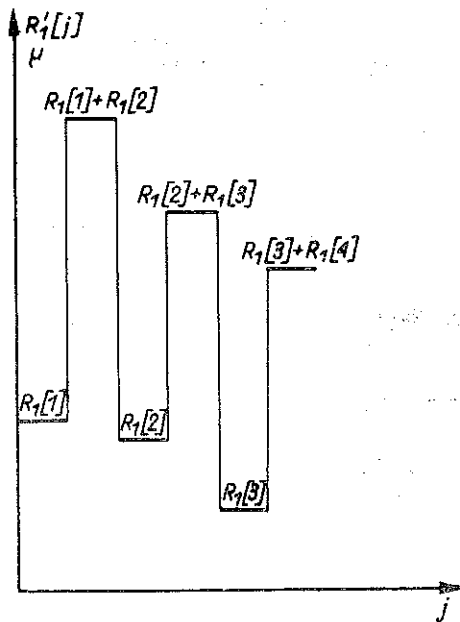
oraz

$$(2.4) \quad K'_{R'_i}[m] = \frac{1}{2z_i} \sum_{j=1}^{2z_i} R'_i[j] R'_i[j+m-2z_i] \quad \text{dla } j+m > 2z_i \quad i=1, 2,$$

gdzie m oznacza „przesunięcie” funkcji, $m=0, 1, 2, \dots, 2z_i$.



Rys. 7



Rys. 8

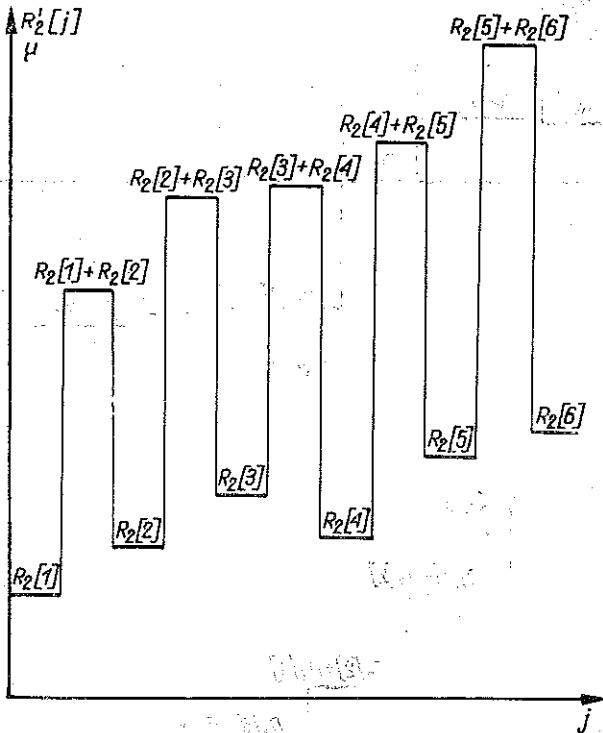
Tak otrzymane funkcje korelacji wygodniej jest przedstawić w postaci szeregu Fouriera (ze względu na parzystość funkcji korelacji jest to szereg cosinusów):

$$(2.5) \quad K_{R_i'}(\tau) = \frac{a_{i0}}{2} + \sum_{k=1}^{2z_i-1} a_{ik} \cos kp_i \tau,$$

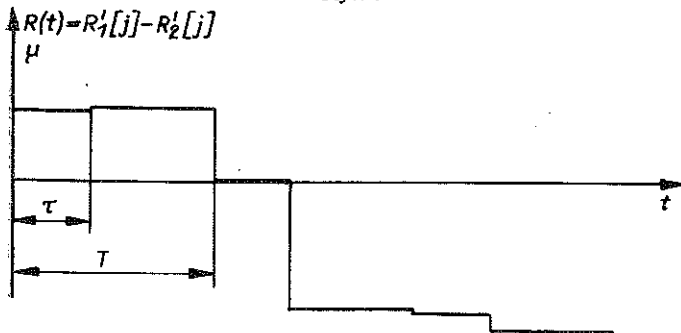
gdzie

$$(2.6) \quad a_{ik} = \frac{1}{2z_i} \sum_{m=0}^{2z_i-1} K_{R_i'}[m] \cos(m\pi k/z_i),$$

$$p_i = \frac{2\pi}{T_{R_i}}, \quad T_{R_i} = z_i T, \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (i=1, 2).$$



Rys. 9



Rys. 10

W takim razie funkcja korelacji funkcji losowej $R(t)$ przy założeniu niezależności funkcji $R_1(t)$ i $R_2(t)$ jest sumą funkcji korelacji $K_{R_1'}(\tau)$ i $K_{R_2'}(\tau)$ i wyraża się wzorem

$$(2.7) \quad K_R(\tau) = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{a_{i0}}{2} + \sum_{k=1}^{2z_i-1} a_{ik} \cos \tau k p_i \right].$$

2.2. Określenie charakterystyk probabilistycznych ruchu modelu przekładni zębatej

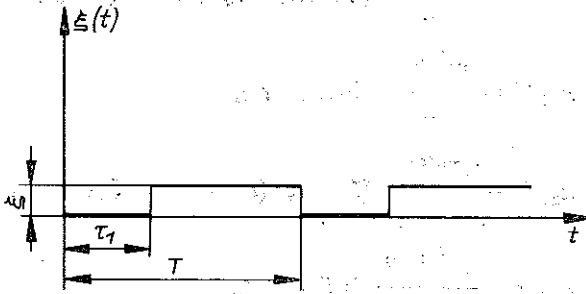
Wprowadzając w równaniu (2.1) następujące oznaczenia:

$$(2.8) \quad k_z(t) = k [1 + \zeta(t)] \quad 2\hbar = \frac{C_z}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega^2 = \frac{P}{m}$$

otrzymamy

$$(2.9) \quad \ddot{Z} + 2\hbar\dot{Z} + \omega_0^2 [1 + \zeta(t)] Z = \omega^2 + \omega_0^2 [1 + \zeta(t)] R(t) + 2\hbar\dot{R}(t).$$

Wykres funkcji $\zeta(t)$ jest pokazany na rys. 11.



Rys. 11

Równanie (2.9) można przedstawić w postaci dwóch równań:

$$(2.10) \quad \ddot{Z} + 2\hbar\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega^2 + \omega_0^2 R(t) + 2\hbar\dot{R}(t) \quad \text{dla} \quad (n-1)T \leq t < (n-1)T + \tau_1,$$

$$(2.11) \quad \ddot{Z} + 2\hbar\dot{Z} + \omega_0^2 [1 + \zeta] Z = \omega^2 + \omega_0^2 (1 + \zeta) R(t) + 2\hbar\dot{R}(t)$$

$$\text{dla} \quad (n-1)T + \tau_1 \leq t < nT \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Rozwiązanie i pochodna rozwiązania układu równań (2.10)–(2.11) muszą spełniać warunki ciągłości dla czasu $t = (n-1)T + \tau_1$ i $t = nT$.

Po oznaczeniu rozwiązania równania (2.10) przez $Z_1(t)$, a rozwiązania równania (2.11) przez $Z_2(t)$ warunki ciągłości mają postać

$$(2.12) \quad Z_1[(n-1)T + \tau_1] = Z_2[(n-1)T + \tau_1],$$

$$\dot{Z}_1[(n-1)T + \tau_1] = \dot{Z}_2[(n-1)T + \tau_1].$$

oraz

$$(2.13) \quad Z_2(nT) = Z_1(nT), \quad \dot{Z}_2(nT) = \dot{Z}_1(nT).$$

Zakładamy, że ruch rozpoczyna się od punktu $t=0$, $\zeta=0$.

Przyjmujemy zerowe warunki początkowe:

$$(2.14) \quad Z_1(t)|_{t=0}=0, \quad \dot{Z}_1(t)|_{t=0}=0.$$

Wobec tego rozwiązanie równania (2.10) ma postać

$$(2.15) \quad Z_1(t) = a_{11}(t)Z_2(t_0) + a_{12}(t)\dot{Z}_2(t_0) + \int_0^t h(t-x)F_1(x)dx.$$

Analogicznie rozwiązanie równania (2.11) można napisać w postaci

$$(2.16) \quad Z_2(t) = a_{21}(t)Z_1(\vartheta) + a_{22}(t)\dot{Z}_1(\vartheta) + \int_0^t p(t-x)F_2(x)dx.$$

We wzorach (2.15) i (2.16) wprowadzono oznaczenia:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} t_0 &= (n-1)T, & \vartheta &= (n-1)T + \tau_1, \\ a_{11}(t) &= \frac{e^{-\tilde{h}(t-t_0)}}{\lambda} [\lambda \cos \lambda(t-t_0) + \tilde{h} \sin \lambda(t-t_0)], \\ a_{12}(t) &= \frac{e^{-\tilde{h}(t-t_0)}}{\lambda} \sin \lambda(t-t_0), \\ a_{21}(t) &= \frac{e^{-\tilde{h}(t-\vartheta)}}{\zeta_0} [\zeta_0 \cos \zeta_0(t-\vartheta) + \tilde{h} \sin \zeta_0(t-\vartheta)], \\ a_{22}(t) &= \frac{e^{-\tilde{h}(t-\vartheta)}}{\zeta_0} \sin \zeta_0(t-\vartheta), \\ h(t-x) &= \frac{1}{\lambda} e^{-\tilde{h}(t-x)} \sin \lambda(t-x) H(t-x), \\ p(t-x) &= \frac{1}{\zeta_0} e^{-\tilde{h}(t-x)} \sin \zeta_0(t-x) H(t-x), \\ H(t-x) &= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } (t-x) \leq 0, \\ 1, & \text{jeżeli } (t-x) > 0, \end{cases} \\ \lambda^2 &= \omega_0^2 - \tilde{h}^2, & \zeta_0^2 &= \omega_0^2(1+\zeta) - \tilde{h}^2, \\ F_1(x) &= \omega^2 + \omega_0^2 R(x) + 2\tilde{h}\dot{R}(x), \\ F_2(x) &= \omega^2 + \omega_0^2(1+\zeta)R(x) + 2\tilde{h}\dot{R}(x). \end{aligned}$$

Symbolem $H(t-x)$ oznaczono funkcję Heaviside'a. Pochodna rozwiązania równania (2.10) wynosi

$$(2.18) \quad \dot{Z}_1(t) = b_{11}(t)Z_2(t_0) + b_{12}(t)\dot{Z}_2(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} h(t-x)F_1(x)dx,$$

gdzie

$$(2.19) \quad b_{11}(t) = \frac{e^{-\tilde{h}(t-t_0)}}{\lambda} (\tilde{h}^2 + \lambda^2) \sin \lambda(t-t_0),$$

$$b_{12}(t) = \frac{e^{-\tilde{h}(t-t_0)}}{\lambda} [\lambda(t-t_0) - \tilde{h} \sin \lambda(t-t_0)].$$

Podobnie pochodna rozwiązania równania (2.11) ma postać

$$(2.20) \quad \dot{Z}_2(t) = b_{21}(t) Z_1(\vartheta) + b_{22}(t) \dot{Z}_1(\vartheta) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} p(t-x) F_2(x) dx,$$

gdzie oznaczono

$$(2.21) \quad b_{21}(t) = -\frac{e^{-\tilde{h}(t-\vartheta)}}{\zeta_0} (\tilde{h}^2 + \zeta_0^2) \sin \zeta_0(t-\vartheta),$$

$$b_{22}(t) = \frac{e^{-h(t-\vartheta)}}{\zeta_0} [\zeta_0 \cos \zeta_0(t-\vartheta) - \tilde{h} \sin \zeta_0(t-\vartheta)].$$

Funkcja autokorelacji rozwiązania (2.15) wynosi

$$(2.22) \quad K_{Z_{11}}(t_1, t_2) = E[Z_1(t_1) - EZ_1(t)] * [Z_1(t_2) - EZ_1(t_2)],$$

gdzie E oznacza operator wartości oczekiwanej.

Podstawiając (2.15) do (2.22) i dokonując odpowiednich przekształceń otrzymamy

$$(2.23) \quad K_{Z_{11}}(t_1, t_2) = a_{11}(t_1) a_{11}(t_2) \sigma_{Z_2}^2(t_0) + a_{12}(t_2) a_{12}(t_1) \sigma_{Z_2}^2(t_0) +$$

$$+ [a_{11}(t_1) a_{12}(t_2) + a_{12}(t_1) a_{11}(t_2)] K_{Z_2 Z_2}(t_0, t_0) +$$

$$+ a_{11}(t_1) \int_{t_0}^{t_2} h(t_2-x) K_{Z_2 F_1}(t_0, x) dx + a_{11}(t_2) \int_{t_0}^{t_1} h(t_1-x) K_{Z_2 F_1}(t_0, x) dx +$$

$$+ a_{12}(t_1) \int_{t_0}^{t_2} h(t_2-x) K_{Z_2 F_1}(t_0, x) dx + a_{12}(t_2) \int_{t_0}^{t_1} h(t_1-x) K_{Z_2 F_1}(t_0, x) dx +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} h(t_1-x) h(t_2-y) K_{F_{11}}(y-x) dx dy.$$

Analogicznie otrzymujemy funkcję autokorelacji rozwiązania (2.16):

$$(2.24) \quad K_{Z_{22}}(t_1, t_2) = a_{21}(t_1) a_{21}(t_2) \sigma_{Z_1}^2(\vartheta) + a_{22}(t_1) a_{22}(t_2) \sigma_{Z_1}^2(\vartheta) +$$

$$+ [a_{21}(t_1) a_{22}(t_2) + a_{22}(t_1) a_{21}(t_2)] K_{Z_1 Z_1}(\vartheta, \vartheta) +$$

$$+ a_{21}(t_1) \int_{\vartheta}^{t_2} p(t_2-x) K_{Z_1 F_2}(\vartheta, x) dx + a_{22}(t_2) \int_{\vartheta}^{t_1} p(t_1-x) K_{Z_1 F_2}(\vartheta, x) dx +$$

$$+ a_{22}(t_1) \int_{\vartheta}^{t_2} p(t_2-x) K_{Z_1 F_2}(\vartheta, x) dx + a_{22}(t_2) \int_{\vartheta}^{t_1} p(t_1-x) K_{Z_1 F_2}(\vartheta, x) dx +$$

$$+ \int_{\vartheta}^{t_1} \int_{\vartheta}^{t_2} p(t_1-x) p(t_2-y) K_{F_{22}}(y-x) dx dy.$$

Funkcje autokorelacji pochodnych rozwiązania (2.18) i (2.20) są następujące:

$$\begin{aligned}
 (2.25) \quad K_{Z_{11}}(t_1, t_2) = & b_{11}(t_1)b_{11}(t_2)\sigma_{Z_2}^2(t_0) + b_{12}(t_1)b_{12}(t_2)\sigma_{Z_2}^2(t_0) + \\
 & + [b_{11}(t_1)b_{12}(t_2) + b_{12}(t_1)b_{11}(t_2)]K_{Z_2Z_2}(t_0, t_0) + \\
 & + b_{11}(t_1) \int_{t_0}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} h(t-x)|_{t_2} K_{Z_2F_1}(t_0, x) dx + \\
 & + b_{11}(t_2) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} h(t-x)|_{t_1} K_{Z_2F_1}(t_0, x) dx + \\
 & + b_{12}(t_1) \int_{t_0}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} h(t-x)|_{t_1} K_{Z_2F_1}(t_0, x) dx + \\
 & + b_{12}(t_2) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} h(t-x)|_{t_2} K_{Z_2F_1}(t_0, x) dx + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} h(t-x)|_{t_1} \frac{\partial}{\partial t} h(t-y)|_{t_2} K_{F_{11}}(y-x) dx dy,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.26) \quad K_{Z_{22}}(t_1, t_2) = & b_{21}(t_1)b_{22}(t_2)\sigma_{Z_1}^2(\vartheta) + b_{22}(t_1)b_{22}(t_2)\sigma_{Z_1}^2(\vartheta) + \\
 & + [b_{21}(t_1)b_{22}(t_2) + b_{21}(t_2)b_{22}(t_1)]K_{Z_1Z_1}(\vartheta, \vartheta) + \\
 & + b_{21}(t_1) \int_{\vartheta}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} p(t-x)|_{t_2} K_{Z_1F_2}(\vartheta, x) dx + \\
 & + b_{21}(t_2) \int_{\vartheta}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} p(t-x)|_{t_1} K_{Z_1F_2}(\vartheta, x) dx + \\
 & + b_{22}(t_1) \int_{\vartheta}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} p(t-x)|_{t_2} K_{Z_1F_2}(\vartheta, x) dx + \\
 & + b_{22}(t_2) \int_{\vartheta}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} p(t-x)|_{t_1} K_{Z_1F_2}(\vartheta, x) dx + \\
 & + \int_{\vartheta}^{t_1} \int_{\vartheta}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} p(t-x)|_{t_1} \frac{\partial}{\partial t} p(t-y)|_{t_2} K_{F_{22}}(y-x) dx dy.
 \end{aligned}$$

We wzorach (2.23)–(2.25) przyjęto następujące oznaczenia:

$K_{Z_2Z_2}(t_0, t_0)$ funkcja korelacji pomiędzy pochodną rozwiązania a rozwiązaniem równania (2.11) dla $t=t_0$,

$K_{Z_2F_1}(t_0, x)$ funkcja korelacji pomiędzy rozwiązaniem równania (2.11) dla $t=t_0$ a zaburzeniem $F_1(x)$,

$K_{Z_2 F_1}(t_0, x)$ funkcja korelacji pomiędzy pochodną rozwiązania równania (2.11) dla $t=t_0$ a zaburzeniem $F_1(x)$,

$K_{F_{11}}(y-x)$ funkcja korelacji zaburzenia; jest ona określona następującym wzorem:

$$(2.27) \quad K_{F_{11}}(y-x) = \sum_{i=1}^2 \left\{ 4\tilde{h}^2 p_i^2 \sum_{k=1}^{2x_i-1} a_{ik} k^2 \cos kp_i(y-x) + \omega_0^4 \left[\frac{a_{i0}}{2} + \sum_{k=1}^{2x_i-1} a_{ik} \cos kp_i(y-x) \right] \right\},$$

$\sigma_{Z_2}^2(t_0)$ wariancja rozwiązania równania (2.11) dla $t=t_0$,

$\sigma_{Z_2'}^2(t_0)$ wariancja pochodnej rozwiązania równania (2.11) dla $t=t_0$,

$\sigma_{Z_1}^2(\vartheta)$ wariancja rozwiązania równania (2.10) dla $t=\vartheta$

$\sigma_{Z_1'}^2$ wariancja pochodnej rozwiązania równania (2.10) dla $t=\vartheta$,

$K_{Z_1 F_2}(\vartheta, x)$ funkcja korelacji pomiędzy rozwiązaniem równania (2.10) dla $t=\vartheta$ a zaburzeniem $F_2(x)$,

$K_{Z_1'} F_2(\vartheta, x)$ funkcja korelacji pomiędzy pochodną rozwiązania równania (2.10) dla $t=\vartheta$ a zaburzeniem $F_2(x)$,

$K_{Z_1 Z_1}(\vartheta, \vartheta)$ funkcja korelacji pomiędzy pochodną rozwiązania a rozwiązaniem równania (2.10) dla $t=\vartheta$,

$K_{F_{22}}(y-x)$ funkcja korelacji zaburzenia $F_2(t)$; określana jest wzorem:

$$(2.28) \quad K_{F_{22}}(y-x) = \sum_{i=1}^2 \left\{ 4\tilde{h}^2 p_i^2 \sum_{k=1}^{2x_i-1} a_{ik} k^2 \cos kp_i(y-x) + \omega_0^4 (1+\zeta)^2 \left[\frac{a_{i0}}{2} + \sum_{k=1}^{2x_i-1} a_{ik} \cos kp_i(y-x) \right] \right\}.$$

Podstawiając we wzorach (2.23)–(2.26) $t_1=t_2=t$, otrzymamy odpowiednie formuły dla obliczenia wariancji rozwiązania równania (2.1) i jego pochodnej.

W celu ułatwienia znalezienia wzorów rekurencyjnych na obliczanie wariancji rozwiązania równania (2.1) i jego pochodnej — będziemy obliczali wartości interesujących nas funkcji dla czasu:

$$t = (n-1)T + \tau_1 \quad \text{oraz} \quad t = nT, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Wówczas stałe a i b są niezależne od czasu i wynoszą odpowiednio:

$$(2.29) \quad a_{11} = \frac{e^{-\tilde{h}\tau_1}}{\lambda} [\lambda \cos \lambda\tau_1 + \tilde{h} \sin \lambda\tau_1],$$

$$a_{12} = \frac{e^{-\tilde{h}\tau_1}}{\lambda} \sin \lambda\tau_1,$$

$$a_{21} = \frac{e^{-\tilde{h}(T-\tau_1)}}{\zeta_0} [\zeta_0 \cos \zeta_0(T-\tau_1) + \tilde{h} \sin \zeta_0(T-\tau_1)],$$

$$(2.29) \quad \begin{aligned} a_{22} &= \frac{e^{-\tilde{h}(T-\tau_1)}}{\zeta_0} \sin \zeta_0 (T-\tau_1), \\ b_{11} &= -\frac{e^{-\tilde{h}\tau_1}}{\lambda} (\tilde{h}^2 + \lambda^2) \sin \lambda \tau_1, \\ b_{12} &= \frac{e^{-\tilde{h}\tau_1}}{\lambda} [\lambda \cos \lambda \tau_1 - \tilde{h} \sin \lambda \tau_1], \\ b_{21} &= -\frac{e^{-\tilde{h}(T-\tau_1)}}{\zeta_0} (\tilde{h}^2 + \zeta_0^2) \sin \zeta_0 (T-\tau_1), \\ b_{22} &= \frac{e^{-\tilde{h}(T-\tau_1)}}{\zeta_0} [\zeta_0 \cos \zeta_0 (T-\tau_1) - \tilde{h} \sin \zeta_0 (T-\tau_1)]. \end{aligned}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \sigma_n^T &= \sigma_{Z_1}^2 [(n-1)T + \tau], & \eta_n^T &= \sigma_{Z_1}^2 [(n-1)T + \tau_1], \\ \sigma_n^T &= \sigma_{Z_2}^2 (nT), & \eta_n^T &= \sigma_{Z_2}^2 (nT), \\ K_n^{ij}(T, y) &= K_{Z_i F_j}(nT, y), & M_n^{ij}(T, y) &= K_{Z_i F_j}(nT, y), \\ K_n^{ij}(\tau, y) &= K_{Z_i F_j}[(n-1)T + \tau_1, y], & M_n^{ij}(\tau, y) &= K_{Z_i F_j}[(n-1)T + \tau_1, y], \\ A_1 &= a_{11}, & A_2 &= a_{12}, & a_1 &= a_{21}, & a_2 &= a_{22}, \\ B_1 &= b_{11}, & B_2 &= b_{12}, & b_1 &= b_{21}, & b_2 &= b_{22}, \\ \int_{n-1}^{\tau} \varphi(\tau, x) dx &= \int_{(n-1)T}^{(n-1)T + \tau_1} \varphi[(n-1)T + \tau_1, x] dx, \\ \int_{\tau}^n \varphi(T, x) dx &= \int_{(n-1)T + \tau_1}^{nT} \varphi(nT, x) dx. \end{aligned}$$

Wzory dla obliczenia wariancji i funkcji korelacji po wprowadzeniu oznaczeń (2.30) mają postać:

$$(2.31) \quad \begin{aligned} \sigma_n^T &= A_1^2 \sigma_{n-1}^T + A_2^2 \eta_{n-1}^T + 2A_1 \int_{n-1}^{\tau} h(\tau, y) K_{n-1}^{21}(T, y) dy + \\ &+ 2A_2 \int_{n-1}^{\tau} h(\tau, y) M_{n-1}^{21}(T, y) + 2A_1 A_2 M_{n-1}^{22}(T, T) + \\ &+ \int_{n-1}^{\tau} \int_{n-1}^{\tau} h(\tau, x) h(\tau, y) K_{F_{11}}(y-x) dx dy, \end{aligned}$$

gdzie

$$K_{n-1}^{21}(T, y) = a_1 K_{n-1}^{11}(\tau, y) + a_2 M_{n-1}^{11}(\tau, y) + \int_{\tau}^{n-1} p(T, x) K_{F_{21}}(y-x) dx,$$

$$M_{n-1}^{21}(T, y) = b_1 K_{n-1}^{11}(\tau, y) + b_2 M_{n-1}^{11}(\tau, y) + \int_{\tau}^{n-1} r(T, x) K_{F_{21}}(y-x) dx,$$

$$\begin{aligned} M_{n-1}^{22}(T, T) = & b_1 a_1 \sigma_{n-1}^{\tau} + b_2 a_2 \eta_{n-1}^{\tau} + a_1 \int_{\tau}^{n-1} r(T, y) K_{n-1}^{12}(\tau, y) dy + \\ & + a_2 \int_{\tau}^{n-1} r(T, y) M_{n-1}^{12}(\tau, y) dy + b_1 \int_{\tau}^{n-1} p(T, y) K_{n-1}^{12}(\tau, y) dy + \\ & + b_2 \int_{\tau}^{n-1} p(T, y) M_{n-1}^{12}(\tau, y) dy + [a_1 b_2 + a_2 b_1] M_{n-1}^{11}(\tau, \tau) + \\ & + \int_{\tau}^{n-1} \int_{\tau}^{n-1} r(T, x) p(T, y) K_{F_{22}}(y-x) dx dy, \end{aligned}$$

$$K_{n-1}^{11}(\tau, y) = A_1 K_{n-2}^{21}(T, y) + A_2 M_{n-2}^{21}(T, y) + \int_{n-2}^{\tau} h(\tau, x) K_{F_{11}}(y-x) dx,$$

$$M_{n-1}^{11}(\tau, y) = B_1 K_{n-2}^{21}(T, y) + B_2 M_{n-2}^{21}(T, y) + \int_{n-2}^{\tau} g(\tau, x) K_{F_{11}}(y-x) dx,$$

$$K_{n-1}^{12}(\tau, y) = A_1 K_{n-2}^{22}(T, y) + A_2 M_{n-2}^{22}(T, y) + \int_{n-2}^{\tau} h(\tau, x) K_{F_{11}}(y-x) dx,$$

$$M_{n-1}^{12}(\tau, y) = B_1 K_{n-2}^{22}(T, y) + B_2 M_{n-2}^{22}(T, y) + \int_{n-2}^{\tau} g(\tau, x) K_{F_{12}}(y-x) dx,$$

$$\begin{aligned} M_{n-1}^{11}(\tau, \tau) = & A_1 B_1 \sigma_{n-2}^{\tau} + A_2 B_2 \eta_{n-2}^{\tau} + A_1 \int_{n-2}^{\tau} g(\tau, y) K_{n-2}^{21}(T, y) dy + \\ & + A_2 \int_{n-2}^{\tau} g(\tau, y) M_{n-1}^{21}(T, y) dy + B_1 \int_{n-2}^{\tau} h(\tau, y) K_{n-2}^{21}(T, y) dy + \\ & + B_2 \int_{n-2}^{\tau} h(\tau, y) M_{n-2}^{21}(T, y) dy + [A_1 B_2 + A_2 B_1] M_{n-2}^{22}(T, T) + \\ & + \int_{n-2}^{\tau} \int_{n-2}^{\tau} g(\tau, x) h(\tau, y) K_{F_{11}}(y-x) dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_n^{\tau} = & B_1^2 \sigma_{n-1}^{\tau} + B_2^2 \eta_{n-1}^{\tau} + 2B_1 \int_{n-1}^{\tau} g(\tau, y) K_{n-1}^{21}(T, y) dy + \\ & + 2B_2 \int_{n-1}^{\tau} g(\tau, y) M_{n-1}^{21}(T, y) dy + 2B_1 B_2 M_{n-1}^{22}(T, T) + \\ & + \int_{n-1}^{\tau} \int_{n-1}^{\tau} g(\tau, x) g(\tau, y) K_{F_{11}}(y-x) dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n^T &= a_1^2 \sigma_n^r + a_2^2 \eta_n^r + 2a_1 \int_{\tau}^n p(T, y) K_n^{12}(\tau, y) dy + 2a_2 \int_{\tau}^n p(T, y) M_n^{12}(\tau, y) dy + \\ &\quad + 2a_1 a_2 M_n^{11}(\tau, \tau) + \int_{\tau}^n \int_{\tau}^n p(T, x) p(T, y) K_{F_{21}}(y-x) dx dy, \\ \eta_n^T &= b_1^2 \sigma_n^r + b_2^2 \eta_n^r + 2b \int_{\tau}^n r(T, y) K_n^{12}(\tau, y) dy + 2b \int_{\tau}^n r(T, y) M_n^{12}(\tau, y) dy + \\ &\quad + 2b_1 b_2 M_n^{11}(\tau, \tau) + \int_{\tau}^n \int_{\tau}^n r(T, x) r(T, y) K_{F_{22}}(y-x) dx dy. \end{aligned}$$

Całki występujące we wzorach (2.31) są następujące:

$$\begin{aligned} (2.32) \quad \int_{n-1}^{\tau} h(\tau, y) K_{n-1}^{21}(T, y) dy &= (a_1 A_1 + a_2 B_1) \int_{n-1}^{\tau} h(\tau, y) K_{n-1}^{21}(T, y) dy + \\ &\quad + (a_1 A_2 + a_2 B_2) \int_{n-1}^{\tau} h(\tau, y) M_{n-1}^{21}(T, y) dy + \\ &\quad + a_1 \int_{n-1}^{\tau} \int_{n-1}^{\tau} h(\tau, y) h(\tau, x) K_{F_{11}}(y-x) dx dy + \\ &\quad + a_2 \int_{n-1}^{\tau} \int_{n-2}^{\tau} h(\tau, y) g(\tau, x) K_{F_{11}}(y-x) dx dy + \\ &\quad + \int_{n-1}^{\tau} \int_{\tau}^{n-1} h(\tau, y) p(T, x) K_{F_{21}}(y-x) dx dy, \\ \int_{n-1}^{\tau} h(\tau, y) M_{n-1}^{21}(T, y) dy &= (b_1 A_1 + b_2 B_1) \int_{n-1}^{\tau} h(\tau, y) K_{n-2}^{21}(T, y) dy + \\ &\quad + (b_1 A_2 + b_2 B_2) \int_{n-1}^{\tau} h(\tau, y) M_{n-2}^{21}(T, y) dy + \\ &\quad + b_1 \int_{n-1}^{\tau} \int_{n-2}^{\tau} h(\tau, y) h(\tau, x) K_{F_{11}}(y-x) dx dy + \\ &\quad + b_2 \int_{n-1}^{\tau} \int_{n-2}^{\tau} h(\tau, y) g(\tau, x) K_{F_{11}}(y-x) dx dy + \\ &\quad + \int_{n-1}^{\tau} \int_{\tau}^{n-1} h(\tau, y) r(T, x) K_{F_{21}}(y-x) dx dy, \\ \int_{\tau}^{n-1} p(T, y) K_{n-1}^{12}(\tau, y) dy &= (a_1 A_1 + b_1 A_2) \int_{\tau}^{n-1} p(T, y) K_{n-1}^{12}(\tau, y) dy + \\ &\quad + (a_2 A_1 + b_2 A_2) \int_{\tau}^{n-1} p(T, y) M_{n-2}^{12}(\tau, y) dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.32) \quad & \int_{\tau}^{n-1} p(T, y) M_{n-1}^{12}(\tau, y) dy = (a_1 B_1 + b_1 B_2) \int_{\tau}^{n-1} p(T, y) K_{n-1}^{12}(\tau, y) dy + \\
 & + (a_2 B_1 + b_2 B_2) \int_{\tau}^{n-1} p(T, y) M_{n-2}^{12}(\tau, y) dy + \\
 & + B_1 \int_{\tau}^{n-1} \int_{\tau}^{n-2} p(T, y) p(T, x) K_{F_{22}}(y-x) dx dy + \\
 & + B_2 \int_{\tau}^{n-1} \int_{\tau}^{n-2} p(T, y) r(T, x) K_{F_{22}}(y-x) dx dy + \\
 & + \int_{\tau}^{n-1} \int_{\tau}^{\tau} p(T, y) h(\tau, x) K_{F_{12}}(y-x) dx dy,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$g(\tau, x) = \frac{\partial}{\partial t} h(t, x)|_{\tau}, \quad r(\tau, x) = \frac{\partial}{\partial t} p(t, x)|_{\tau},$$

$$\begin{aligned}
 (2.33) \quad K_{F_{12}}(y-x) = & \sum_{i=1}^2 \left\{ 4\bar{h}^2 p_i^2 \sum_{k=1}^{2z_i-1} a_{ik} k^2 \cos kp_i(y-x) + \right. \\
 & + \omega_0^4 (1+\zeta)^2 \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2z_i-1} a_{ik} \cos kp_i(y-x) \right] + \\
 & \left. + 2\bar{h} p_i \omega_0^2 (2+\zeta) \sum_{k=1}^{2z_i-1} a_{ik} k \sin kp_i(y-x) \right\},
 \end{aligned}$$

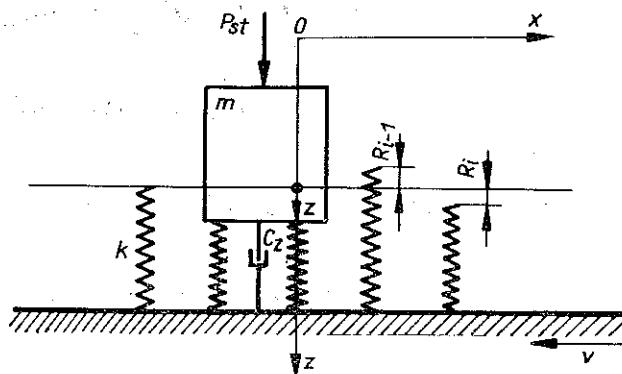
$$K_{F_{21}}(y-x) = K_{F_{12}}(x-y).$$

3. MODEL PRZEKŁADNI. II. POSTAWIENIE PROBLEMU

Weźmy pod uwagę model przekładni zaproponowany w pracy [2]. Przyjmijmy następujące założenia: 1) zęby w czasie współpracy nie tracą kontaktu (nie odrywają się); 2) pomija się błędy cykliczne w tym błąd kąta przyporu; 3) pomija się fakt wcześniejszego lub przedłużonego zazębienia (dopuszcza się nagłe ugięcie sprężyny); 4) istnieje tłumienie wiskotyczne w łożyskach i w filmie olejowym; tłumienie to dotyczy tylko ruchu bryły. Tak przyjęty model ilustruje rys. 12.

Przyjmujemy dwie strefy działania sił:

I: W ząbieniu jest tylko jedna para zębów (na rys. 12 masa opiera się na jednej sprężynie).



Rys. 12

Czas ząbienia w pierwszej strefie wynosi

$$(3.1) \quad t_I = (2 - \varepsilon) T,$$

gdzie ε oznacza wskaźnik przyporu, $1 < \varepsilon < 2$ oraz gdzie T jest okresem ząbień (rys. 3).

II: W ząbieniu są dwie pary zębów (na rys. 12 bryła o masie m opiera się na dwóch sprężynach). Czas ząbienia w drugiej strefie wynosi

$$(3.2) \quad t_{II} = (\varepsilon - 1) T.$$

Dla strefy I równanie ruchu bryły o masie m wzdłuż osi Z ma postać

$$(3.3) \quad m\ddot{Z} + C_z\dot{Z} + k(Z \pm R_{i-1}) = P,$$

a dla strefy II

$$(3.4) \quad m\ddot{Z} + C_z\dot{Z} + k(Z \pm R_{i-1}) + k(Z \pm R_i) = P$$

lub

$$(3.5) \quad m\ddot{Z} + C_z\dot{Z} + 2kZ \pm k(R_{i-1} + R_i) = P.$$

Ogólnie równania (3.3) — (3.5) można napisać w postaci

$$(3.6) \quad m\ddot{Z} + C_z\dot{Z} + k_z(t)Z = P + kR(t).$$

Porównując wzór (3.6) ze wzorem (2.1) okazuje się, że wyrażenia (2.1) nie da się w ogólnym przypadku sprowadzić do wyrażenia (3.5), czyli jest to po prostu inny układ dynamiczny. Po wprowadzeniu oznaczeń określonych wzorem (2.8) równanie (3.6) przyjmuje postać:

$$(3.7) \quad \ddot{Z} + 2\tilde{h}\dot{Z} + \omega_0^2 [1 + \zeta(t)]Z = \omega^2 + \omega_0^2 R(t).$$

W obu przypadkach, tj. dla modelu I i modelu II, dla $\varepsilon \in (1, 2)$ wartość ζ (rys. 11) przyjmuje wartość jeden. Równanie (3.7) można przedstawić w postaci dwóch równań dla odpowiednich przedziałów czasu analogicznie do równania (2.9). Zachowując warunki ciągłości określone wzorem (2.12) i (2.13) otrzymamy rozwiązanie równania (3.7) w postaci określonej wzorami (2.15) i (2.16). Należy zaznaczyć, że we wzorach tych

$$(3.8) \quad F_1 = F_2 = \omega^2 + \omega_0^2 R(t).$$

Dalej, rozpatrując zagadnienie dla czasu $t = (n-1)T + \tau_1$ i $t = nT$, $n = 1, 2, 3, \dots$, wariancję i odpowiednie funkcje korelacji rozwiązania i pochodnej, rozwiązania równania (3.7) określimy wzorami (2.22) — (2.32), gdzie należy tylko podstawić:

$$(3.9) \quad K_{F_{11}}(y-x) = K_{F_{22}}(y-x) = K_{F_{12}}(y-x) = K_{F_{21}}(y-x) = \\ = \omega_0^4 \sum_{i=1}^2 \left[\frac{a_{i0}}{2} + \sum_{k=1}^{2z_i-1} a_{ik} \cos kp_i(y-x) \right].$$

We wzorach (2.22)-(2.32) występuje szereg całek podwójnych. Ze względu na ograniczony czas obliczeń maszyny cyfrowej oraz kumulowania się błędów przy obliczaniu numerycznym, całki te obliczono analitycznie [1]. W ten sposób zamiast numerycznego obliczania całek mamy do czynienia z obliczaniem wartości funkcji. W dalszej części pracy przeprowadzono porównawcze obliczenia dla obu modeli przy tych samych parametrach przekładni.

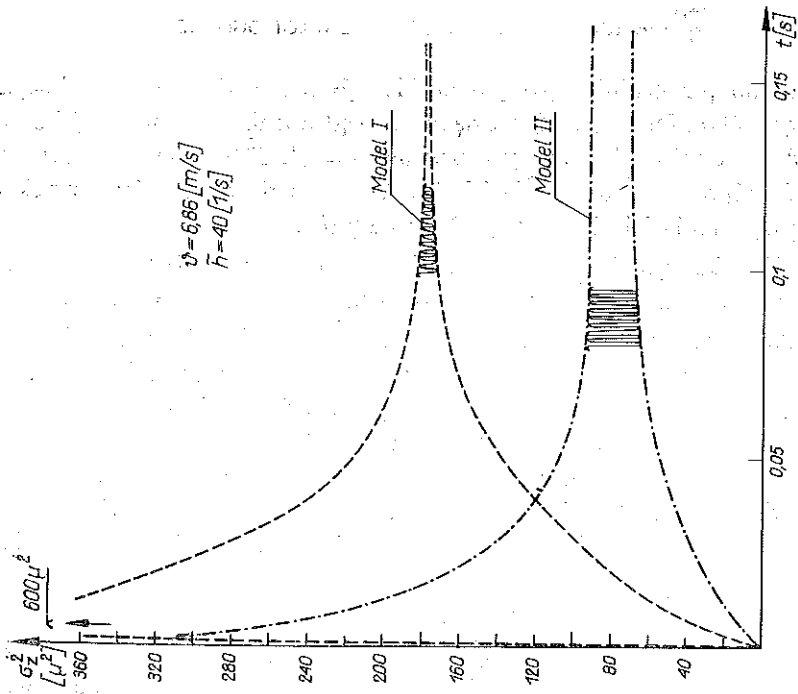
4. OBLICZENIA NUMERYCZNE. UWAGI OGÓLNE

Rozpatrzono przekładnię zębatą o liczbie zębów $z_1 = 17$, $z_2 = 43$ i obciążeniu jednostkowym $Q = 1$ [N/mm²]. Ze względu na błąd podziałki zasadniczej koła wykonano w 8 klasie DIN. Liczba przyporu wynosi $\varepsilon = 1,4$. Obliczenia przeprowadzono dla prędkości obwodowej kół $V = 6,86$ [m/s]. Rezonans główny dla danej przekładni występuje przy prędkości obwodowej około 48 [m/s].

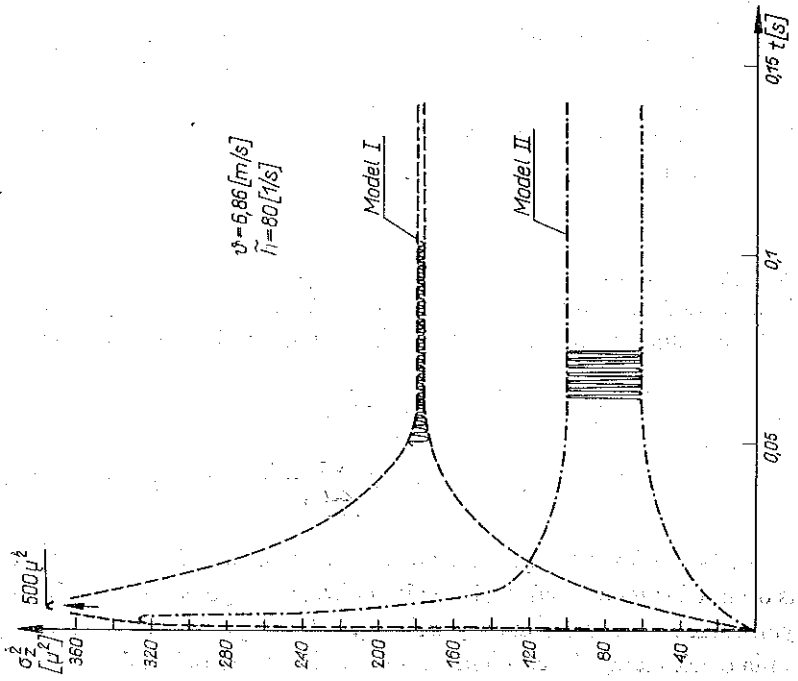
Na rys. 13 pokazano obwiednie wariancji przemieszczenia zębów przy tłumieniu $h = 40$ [1/s] dla modelu I i II, a na rys. 14 — przy tłumieniu $h = 80$ [1/s].

Z rysunków tych wynika, że proces przemieszczania się zębów (drgań) nie jest procesem stacjonarnym. Po upływie pewnego czasu w obu przypadkach wariancja nie jest wielkością stałą, a ma charakter oscylacyjny. Zwiększenie tłumienia powoduje szybsze ustalanie się amplitudy zmian wariancji wokół pewnych stałych wartości, które nie zależą od wielkości tłumienia. Przy zwiększonym tłumieniu można zauważyć ciekawe zjawisko zwiększenia się amplitudy zmian wariancji dla modelu II, natomiast dla modelu I amplituda ta praktycznie nie zmienia się. Może to być związane z faktem, że prędkość obrotowa kół w rozpatrywanym przypadku jest w przybliżeniu równa siódmej podharmonicznej drgań układu.

Należy zauważyć, że parametry układu zostały dobrane zgodnie z przesłankami konstrukcyjnymi przekładni [3], natomiast tłumienie przyjęto w sposób dowolny.



Rys. 13



Rys. 14

Wynika to stąd, że w spotykanej literaturze nie określono wielkości tłumienia dla rozpatrywanych modeli i dopiero weryfikacja doświadczalna uzyskanych wyników może służyć do liczbowego określenia tego współczynnika.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. MAKSIMIUK, *Analiza dynamiczna dyskretnego stochastycznego modelu jednostopniowej przekładni zębatej*, Rozprawa doktorska 1975, Biblioteka PW.
2. L. MÜLLER, *Nowy model dynamiczny przekładni walcowej o zębach prostych*, Przegl. Mech., 21, 1974.
3. L. MÜLLER, *Przekładnie zębate — obliczenia wytrzymałościowe*, WNT, Warszawa 1972.
4. W. NADOLSKI, *Modelowanie dynamiczne przekładni zębatych jednostopniowych*, Prace IPPT, 14/1972.

Резюме

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КОЛЕСАМИ С ПРЯМЫМИ ЗУБЬЯМИ

В работе сравнены результаты пробабилистического анализа двух стохастических моделей зубчатой передачи. Введена и определена случайная функция, которая описывает погрешность основного шага зацепления зубчатой передачи. Движение динамической модели описано дифференциальным уравнением, коэффициенты которого зависят от времени. Уравнение движения решено точно и представлены соответствующие рекуррентные формулы для определения дисперсии перемещения зубьев, дисперсии скорости перемещения и корреляционной функции этих величин. На основе этих формул вычислена дисперсия перемещения зубьев и результаты представлены на чертеже,

SUMMARY

PROBABILISTIC ANALYSIS OF TWO DISCRETE MODELS OF CYLINDRICAL GEAR WITH STRAIGHT BEVEL TEETH

This paper deals with probabilistic analysis of the results for two discrete models of cylindrical gear with stright bevels teeth. A random function describing the base pitch errors of the toothed wheels was introduced. A motion of the gear model is described by the system of differential equations with time-dependent coefficients. The closedform solution of the equations of motion is obtained and the corresponding recurrent formulae for evaluation of the variance of displacement and displacement rate of the teeth as well as the correlations function of these two quantities are derived. On the basis of the formulae presented the variance of the displacement has been calculated for both models and the results are shown on the diagrams.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT PODSTAW BUDOWY MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1976 r.