

KSZTAŁTOWANIE CYLINDRÓW GRUBOŚCIENNYCH POD DZIAŁANIEM CIŚNIENIA WEWNĘTRZNEGO I ZGINANIA Z WARUNKU CAŁKOWITEGO UPLASTYCZNIENIA W STADIUM ZNISZCZENIA

ZDZISŁAWA KORDAS i WŁADYSŁAW SKRABA (KRAKÓW)

W pracy zajęto się analizą wpływu zginania i siły podłużnej na kształt niekołowego cylindra grubościennego poddanego działaniu stałego ciśnienia wewnętrznego p . Jako kryterium kształtowania przyjęto warunek całkowitego uplastycznienia w stadium zniszczenia (warunek Hubera-Misesa-Hencky'ego).

W zastosowanej metodzie rozwinięto w szereg względem małych parametrów naprężenia, odkształcenia jak również funkcje $a(\vartheta)$ i $b(\vartheta)$ określające kształt cylindra.

Całkowanie równań naprężeniowych na poszczególnych szczelinach przybliżenia oraz wykorzystanie naprężeniowych warunków brzegowych pozwoliło na znalezienie dwóch jakościowo różnych rozwiązań. Mianowicie dla dowolnego stosunku wymiarów cylindra a_{00}/b_{00} uzyskano takie kształty niekołowe, które ulegną zniszczeniu w sensie przyjętego kryterium (wzory (4.1), a ponadto analiza problemu wartości własnych pozwoliła na znalezienie kształtów odpowiadających «zakłóconym» cylindrom kołowym o ustalonym stosunku a_{00}/b_{00} (wzory 4.4).

W p. 4 podano zestawienie wzorów końcowych z dokładnością do drugiego przybliżenia, a w p. 5 przykłady liczbowe.

1. WSTĘP

Przy kształtowaniu konstrukcji, pracujących w zakresie sprężystym, powszechnie stosowanym podejściem jest poszukiwanie tzw. kształtów równomiernej wytrzymałości. Wprawdzie warunek równomiernej wytrzymałości może nie stanowić warunku wystarczającego optymalizacji (np. optymalne ukształtowanie kratownicy dobiera się zazwyczaj dopiero spośród kratownic równomiernej wytrzymałości), może nie stanowić również warunku koniecznego (np. przy warunkach pobocznych związanych ze statecznością), to jednak w wielu przypadkach kształty uzyskane przy wykorzystaniu tego warunku są kształtami optymalnymi.

W zakresie plastycznym odpowiednikiem wyżej wymienionego podejścia jest poszukiwanie kształtów ciał wykazujących całkowite uplastycznienie w stadium zniszczenia, co pozwala w zasadzie na wyeliminowanie obszarów sztywnych bądź sprężystych w konstrukcji — w momencie osiągnięcia przez nią nośności granicznej.

Wprawdzie warunek pełnego uplastycznienia nie zawsze może znaleźć zastosowanie (np. przy czystym zginaniu i czystym skręcaniu każdy przekrój w stanie granicznym jest całkowicie uplastyczniony), to jednak jego wykorzystanie pozwala

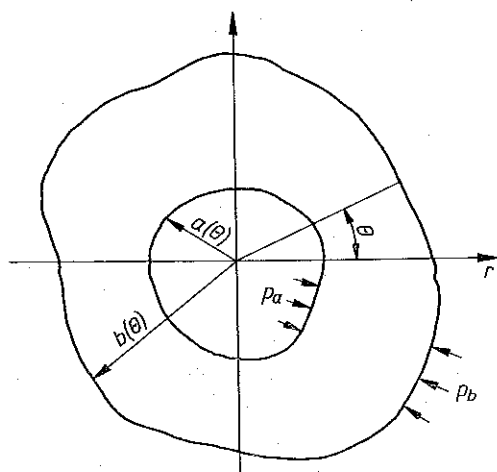
wielokrotnie na uzyskanie rezultatów interesujących ze względów poznawczych, a niekiedy mających znaczenie praktyczne.

Wychodząc zatem z założenia, iż w dobrze i ekonomicznie zaprojektowanej konstrukcji (w stadium jej zniszczenia) powinno ulec uplastycznieniu całe ciało, bądź też możliwie wielki jego podobszar (D. C. DRUCKER i R. T. SHIELD [1 i 2], Z. Mróz [5 i 6]), w pracy niniejszej zajęto się poszukiwaniem niekołowych kształtów przekrojów cylindrów grubościennych pod działaniem ciśnienia wewnętrznego, zginania i rozciągania, które ulegną całkowitemu uplastycznieniu przy wyczerpaniu nośności granicznej.

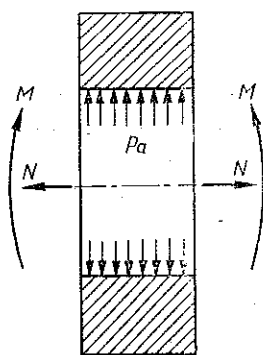
W pracy uwzględnia się, obok ciśnienia wewnętrznego, działanie momentu zginającego oraz siły podłużnej, co jest istotne z punktu widzenia warunków rzeczywistej pracy rurociągu; prowadzi to do wyników jakościowo odmiennych od uzyskanych w pracy [3].

2. ZAŁOŻENIA I RÓWNANIA PODSTAWOWE

Rozważmy cylinder grubościenny o dowolnym dwuspójnym przekroju poprzecznym scharakteryzowanym we współrzędnych biegunowych płaskich r, ϑ funkcjami $a(\vartheta)$ i $b(\vartheta)$ (rys. 1). W przypadku obciążenia stałym ciśnieniem wewnętrznym, stałym momentem zginającym (czyste zginanie, bez siły poprzecznej) i siłą normalną składowe stanu naprężenia będą zależne jedynie od r i ϑ (niezależnie od z).



Rys. 1



Rys. 2

Przy stosunkowo niewielkim zginaniu dla określenia rozkładu naprężeń i odkształceń zastosujemy superpozycję rozwiązania płaskiego stanu odkształcenia elementu cylindra oraz krzywizny i wydłużenia tego elementu (rys. 2). Nie jest to zwykła superpozycja zginania i rozciągania, ponieważ płaskiemu stanowi odkształcenia towarzyszy już pewien moment zginający i pewna siła podłużna.

Stan naprężenia w dowolnym punkcie cylindra określony jest czwórką składowych σ_r , σ_ϑ , σ_z , $\tau_{r\vartheta}$, które są funkcjami r i ϑ . Składowe te spełniają dwa warunki równowagi wewnętrznej we współrzędnych biegunowych:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + 2 \frac{\tau_{r\vartheta}}{r} = 0.$$

Momentowi zginającemu M i sile podłużnej N w przekroju odpowiada pewna krzywizna i wydłużenia osi. Można wykazać, iż odpowiadająca składowa stanu odkształcenia będzie następującą funkcją promienia r i kąta ϑ :

$$(2.2) \quad \varepsilon_z = A + Br \cos \vartheta.$$

Stałe A i B są parametrami charakteryzującymi odpowiednio wydłużenie i krzywiznę osi [7].

Składowe stanu naprężenia, wobec przyjętego kryterium kształtowania, powinny w każdym punkcie spełniać warunek plastyczności. Przyjmijmy tu warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego

$$(2.3) \quad (\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + (\sigma_\vartheta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{r\vartheta}^2 = 2\sigma_0^2,$$

gdzie σ_0 oznacza granicę plastyczności materiału przy jednoosiowym rozciąganiu.

Do powyższych czterech równań dochodzi jeszcze jedno równanie nierozdzielności w postaci (pozostałe są spełnione tożsamościowo)

$$(2.4) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\vartheta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\vartheta})}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \vartheta} = 0$$

oraz, przy założeniu nieściśliwości materiału, prawo zmiany objętości

$$(2.5) \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\vartheta + \varepsilon_z = 0.$$

Ponadto trzy równania prawa zmiany postaci, które mogą być interpretowane jako równania Hencky'ego-Iliuszyna bądź Levy'ego-Misesa,

$$(2.6) \quad \varphi (\sigma_z - \sigma_r) = \varepsilon_z - \varepsilon_r, \quad \varphi (\sigma_\vartheta - \sigma_z) = \varepsilon_\vartheta - \varepsilon_z, \quad 2\varphi \tau_{r\vartheta} = \gamma_{r\vartheta},$$

gdzie φ oznacza moduł zaawansowania odkształceń plastycznych. Rozważany problem będzie opisany układem dziewięciu równań od (2.1) do (2.6) o dziewięciu niewiadomych σ_r , σ_ϑ , σ_z , $\tau_{r\vartheta}$, ε_r , ε_ϑ , ε_z , $\gamma_{r\vartheta}$ i φ .

Wykorzystując dwa pierwsze równania (2.6) oraz związki (2.2) i (2.5) otrzymamy

$$(2.7) \quad \sigma_z = \frac{3}{2\varphi} (A + Br \cos \vartheta) + \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\vartheta).$$

Jeśli wykorzystamy (2.7), to warunek plastyczności (2.3) przyjmie następującą postać:

$$(2.8) \quad \varphi^2 [(\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + 4\tau_{r\vartheta}^2] = \frac{4}{3} \left[\sigma_0^2 \varphi^2 - \frac{9}{4} (A + Br \cos \vartheta)^2 \right].$$

Rozwiązujący problem można więc uważać za pseudo-statycznie wyznaczalny. Po wyrugowaniu naprężenia σ_z z warunku plastyczności otrzymujemy wraz z dwoma warunkami równowagi układ trzech równań (2.1) i (2.8) o niewiadomych σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$.

Warunki brzegowe dla rozpatrywanego cylindra będą miały postać wyprowadzoną w pracy [3]:

na powierzchni wewnętrznej

$$(2.9) \quad a(\vartheta)p_a = -a(\vartheta)\sigma_r(a) + a'(\vartheta)\tau_{r\theta}(a), \quad a'(\vartheta)p_a = -a'(\vartheta)\sigma_\theta(a) + a(\vartheta)\tau_{r\theta}(a);$$

na powierzchni zewnętrznej

$$(2.10) \quad b(\vartheta)p_b = -b(\vartheta)\sigma_r(b) + b'(\vartheta)\tau_{r\theta}(b), \quad b'(\vartheta)p_b = -b'(\vartheta)\sigma_\theta(b) + b(\vartheta)\tau_{r\theta}(b),$$

gdzie $a'(\vartheta)$ i $b'(\vartheta)$ oznaczają pochodne promienia wewnętrznego $a(\vartheta)$ i zewnętrznego $b(\vartheta)$ względem ϑ .

Będziemy poszukiwać rozwiązań w postaci podwójnego szeregu parametrów A i B , które charakteryzują wpływ zginania i rozciągania:

$$(2.11) \quad x(r, \vartheta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x_{ij}(r, \vartheta) A^i B^j = \\ = x_{00} + x_{10}A + x_{01}B + x_{11}AB + x_{20}A^2 + x_{02}B^2 + \dots,$$

gdzie

$$x = \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \varphi, a(\vartheta), b(\vartheta).$$

Wyrazy zerowego przybliżenia funkcji x będą składowymi stanu naprężenia i odkształcenia oraz φ dla cylindra kołowego w płaskim stanie odkształcenia:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \sigma_{r_{00}} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b_{00}}, & \varepsilon_{r_{00}} &= -\frac{C}{r^2}, \\ \sigma_{\theta_{00}} &= \frac{2\sigma_0}{3} + \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b_{00}}, & \varepsilon_{\theta_{00}} &= -\frac{C}{r^2}, \\ \sigma_{z_{00}} &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} + \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b_{00}}, & \varepsilon_{z_{00}} &= 0, \\ \tau_{r\theta_{00}} &= 0, & \gamma_{r\theta_{00}} &= 0, \\ & & \varphi_{00} &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0 r^2} C, \end{aligned}$$

gdzie C oznacza stałą.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU NA POSZCZEGÓLNYCH SZCZEBŁACH PRZYBLIŻENIA

3.1. Szczęble $A^1 B^0$, $A^0 B^1$.

Równania podstawowe i warunki brzegowe na szczęblach $A^1 B^0$ i $A^0 B^1$ mają tutaj taką samą postać jak odpowiednie równania analizowane w pracy [3] (wzory (3.4.)). Różnica istnieje tylko w zapisie wskaźnikowym. Rozwiązania nie będziemy więc tu przytaczać. Ograniczymy się jedynie do podania uzyskanych rezultatów.

Należy zauważyć, iż w rozważanych przybliżeniach zagadnienie sprowadza się do problemu wartości własnych. Istnieją więc dwa możliwe rozwiązania. Mianowicie rozwiązanie zerowe, którego w pracy [3] nie rozważano, oraz rozwiązanie różne od zera. Wpływ momentu zginającego i siły podłużnej uwidoczni się na wyższych szczeblach mimo zerowego rozwiązania w przybliżeniach $A^1 B^0$ i $A^0 B^1$. Końcowe wzory podamy więc, uwzględniając te dwa możliwe rozwiązania.

Warunki na istnienie rozwiązań niezerowych na rozważanych szczeblach przybliżenia dają następujące rezultaty:

Poprawki promienia wewnętrznego i zewnętrznego są następującymi funkcjami kąta ϑ :

$$(3.1) \quad a_{ij}(\vartheta) = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \frac{D_{ij}}{\lambda} \cos \lambda \vartheta, \quad b_{ij}(\vartheta) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \frac{D_{ij}}{\lambda} \cos \lambda \vartheta,$$

gdzie $i=1, j=0$ na szczeblu $A^1 B^0$, $i=0, j=1$ na szczeblu $A^0 B^1$, n jest całkowitą liczbą dodatnią, D_{ij} jest stałą całkowania, λ jest wartością własną określoną równaniem przestępnym:

$$(3.2) \quad \frac{a_{00}}{b_{00}} = e^{\frac{-n\pi}{\sqrt{\lambda^2-1}}}$$

Poprawki składowych stanu naprężenia są funkcjami promienia r i kąta ϑ :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{r_{ij}} = \sigma_{\vartheta_{ij}} = & -\frac{D_{ij}}{r\lambda} \left[\sqrt{\lambda^2-1} \sin \left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) - \right. \\ & \left. - \cos \left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) \right] \cos \lambda \vartheta, \\ \tau_{r\vartheta_{ij}} = & \frac{D_{ij}}{r} \cos \left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) \sin \lambda \vartheta. \end{aligned}$$

Na podstawie przytoczonych powyżej wyników stwierdzamy, iż wpływ zginania i rozciągania na kształty niekołowych cylindrów grubościennych nie uwidocznił się w przybliżeniach $A^1 B^0$ i $A^0 B^1$. Zajmiemy się więc analizą zagadnienia dla wyższych rzędów przybliżenia, mianowicie dla przybliżeń $A^1 B^1$, $A^2 B^0$, $A^0 B^2$. Całkowite rozwiązanie podamy jedynie dla przybliżenia $A^0 B^2$, jest bowiem ono najciekawsze i uwidacznia się w tym przypadku wpływ rozważanych obciążeń na rozwiązanie problemu. Rozwiązania dla przybliżeń $A^1 B^0$ i $A^2 B^0$ uzyskano w sposób podobny jak dla $A^0 B^2$, zatem ograniczymy się tu jedynie do ich uwzględnienia w ostatecznym rozwiązaniu.

3.2. Przybliżenie $A^0 B^2$

3.2.1. *Całkowanie równań podstawowych.* Równania podstawowe dla przybliżenia $A^0 B^2$ mają postać:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r_{02}}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta_{02}}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{r_{02}} - \sigma_{\vartheta_{02}}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\vartheta_{02}}}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial \tau_{r\vartheta_{02}}}{\partial r} + 2\tau_{r\vartheta_{02}}^2 = 0, \\ \sigma_{r_{02}} - \sigma_{\vartheta_{02}} = \frac{\sqrt{3} \sigma_0 r^6 \cos^2 \vartheta}{4C^2} + \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} \tau_{r\vartheta_{01}}. \end{aligned}$$

Wykorzystując wzory (3.3) sprowadzamy powyższy układ równań do jednego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu niejednorodnego — na poprawkę naprężenia stycznego $\tau_{r\vartheta_{02}}$ dla przybliżenia $A^0 B^2$:

$$(3.5) \quad r^2 \frac{\partial^2 \tau_{r\vartheta_{02}}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \tau_{r\vartheta_{02}}}{\partial \vartheta^2} + 3r \frac{\partial \tau_{r\vartheta_{02}}}{\partial r} = \\ = -\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \frac{D_{01}^2 \lambda}{r^2} \left[1 + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \right. \\ \left. + 2\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) \right] \sin 2\lambda\vartheta - \frac{7\sqrt{3} \sigma_0 r^6}{4C^2} \sin 2\vartheta.$$

Rozwiązania powyższego równania poszukujemy w postaci

$$(3.6) \quad \tau_{r\vartheta_{02}} = F_{02}^{(1)}(r) \sin 2\lambda\vartheta + F_{02}^{(2)}(r) \sin 2\vartheta,$$

gdzie $F_{02}^{(1)}(r)$ jest całką ogólną następującego równania różniczkowego zwyczajnego niejednorodnego:

$$(3.7) \quad r^2 F_{02}^{(1)''} + 3r F_{02}^{(1)'} + 4\lambda^2 F_{02}^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \frac{D_{01}^2 \lambda}{r^2} \left[1 + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \right. \\ \left. + 2\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) \right],$$

a $F_{02}^{(2)}(r)$ jest całką ogólną następującego równania różniczkowego, zwyczajnego, niejednorodnego:

$$(3.8) \quad r^2 F_{02}^{(2)''} + 3r F_{02}^{(2)'} + 4F_{02}^{(2)} = -\frac{7\sqrt{3} \sigma_0 r^6}{4C^2}.$$

Rozwiązania równań (3.7) i (3.8) znajdziemy jako sumy rozwiązań ogólnych równań jednorodnych i rozwiązań szczególnych równań niejednorodnych. Rozwiązaniem równania (3.5) będzie funkcja $\tau_{r\vartheta_{02}}(r, \vartheta)$, określająca poprawkę naprężenia stycznego dla przybliżenia $A^0 B^2$ o postaci

$$(3.9) \quad \tau_{r\vartheta_{02}} = \left\{ \frac{C_{02}}{r} \sin \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \frac{D_{02}}{r} \cos \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{8\sigma_0} \frac{D_{01}^2}{\lambda r^2} \left[1 + (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) \right] \right\} \sin 2\lambda\vartheta + \\ + \left\{ \frac{G_{02}}{r} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \frac{H_{02}}{r} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) - \frac{7\sqrt{3} \sigma_0 r^6}{208 C^2} \right\} \sin 2\vartheta,$$

gdzie stałe C_{02} i D_{02} oraz G_{02} i H_{02} są nie oznaczonymi stałymi całkowania. Zostaną one określone z warunków brzegowych dla przybliżenia $A^0 B^2$.

Całkując dwa pierwsze równania układu (3.4) otrzymamy poprawki naprężenia promieniowego i obwodowego, jako funkcje promienia i kąta o postaci:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r_{02}} = & \left\{ \frac{C_{02} - D_{02} \sqrt{4\lambda^2 - 1}}{2\lambda r} \sin \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \right. \\
 & + \frac{C_{02} \sqrt{4\lambda^2 - 1} + D_{02}}{2\lambda r} \cos \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) - \\
 & - \frac{\sqrt{3}}{8\sigma_0} \frac{D_{01}^2}{\lambda^2 r^2} \left[2\lambda^2 + (3\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) - \right. \\
 & \left. \left. - (2\lambda^2 - 1) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) \right] \right\} \cos 2\lambda\vartheta + \\
 & + \left\{ \frac{G_{02} - H_{02} \sqrt{3}}{2r} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \frac{G_{02} \sqrt{3} + H_{02}}{2r} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{\sqrt{3} \sigma_0 r^6}{104C^2} \right\} \cos 2\vartheta + \frac{\sqrt{3}}{8\sigma_0} \frac{D_{01}^2}{\lambda^2 r^2} \left[\lambda^2 + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \right. \\
 & \left. + \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) \right] - \frac{\sqrt{3} \sigma_0 r^6}{48C^2} + K_{02}, \\
 (3.10) \\
 \sigma_{\vartheta_{02}} = & \left\{ \frac{C_{02} - D_{02} \sqrt{4\lambda^2 - 1}}{2\lambda r} \sin \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \right. \\
 & + \frac{C_{02} \sqrt{4\lambda^2 - 1} + D_{02}}{2\lambda r} \cos \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) - \\
 & - \frac{\sqrt{3}}{8\sigma_0} \frac{D_{01}^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda^2 r^2} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) - \right. \\
 & \left. \left. - (2\lambda^2 - 1) \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) \right] \right\} \cos 2\lambda\vartheta + \\
 & + \left\{ \frac{G_{02} - H_{02} \sqrt{3}}{2r} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \frac{G_{02} \sqrt{3} + H_{02}}{2r} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{7\sqrt{3} \sigma_0 r^6}{52C^2} \right\} \cos 2\vartheta - \frac{\sqrt{3}}{8\sigma_0} \frac{D_{01}^2}{\lambda^2 r^2} \left[\lambda^2 + (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) + \right. \\
 & \left. + \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_{00}} \right) \right] - \frac{7\sqrt{3} \sigma_0 r^6}{48C^2} + K_{02},
 \end{aligned}$$

gdzie K_{02} jest dowolną stałą całkowania, którą dalej przyjęto za równą zero.

3.2.2. Wykorzystanie warunków brzegowych dla przybliżenia $A^0 B^2$. Warunki brzegowe (2.9) i (2.10) rozwijamy w podwójny szereg parametrów A i B wg schematu podanego w pracy [3].

Dla przybliżenia $A^0 B^2$ dają układ czterech równań:
na powierzchni wewnętrznej

$$(3.11) \quad \begin{aligned} a'_{01} \tau_{r\vartheta_{01}}|_{a_{00}} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{a_{01}^2}{a_{00}} - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} a_{02} - a_{00} a_{01} \frac{\partial \sigma_{r01}}{\partial r} \Big|_{a_{00}} - \\ - a_{00} \sigma_{r02}|_{a_{00}} - a_{01} \sigma_{r01}|_{a_{00}} = 0, \\ a_{01} \tau_{r\vartheta_{01}}|_{a_{00}} + a_{00} a_{01} \frac{\partial \tau_{r\vartheta_{01}}}{\partial r} \Big|_{a_{00}} + a_{00} \tau_{r\vartheta_{02}}|_{a_{00}} - \\ - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{a_{01} a'_{01}}{a_{00}} - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} a'_{02} - a'_{01} \sigma_{\vartheta_{01}}|_{a_{00}} = 0; \end{aligned}$$

na powierzchni zewnętrznej

$$(3.12) \quad \begin{aligned} b'_{01} \tau_{r\vartheta_{01}}|_{b_{00}} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{b_{01}^2}{b_{00}} - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} b_{02} - b_{00} b_{01} \frac{\partial \sigma_{r01}}{\partial r} \Big|_{b_{00}} - \\ - b_{00} \sigma_{r02}|_{b_{00}} - b_{01} \sigma_{r01}|_{b_{00}} = 0, \\ b_{01} \tau_{r\vartheta_{01}}|_{b_{00}} + b_{00} b_{01} \frac{\partial \tau_{r\vartheta_{01}}}{\partial r} \Big|_{b_{00}} + b_{00} \tau_{r\vartheta_{02}}|_{b_{00}} - \\ - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{b_{01} b'_{01}}{b_{00}} - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} b'_{02} - b'_{01} \sigma_{\vartheta_{01}}|_{b_{00}} = 0. \end{aligned}$$

Z pierwszego równania układu (3.11) wyliczamy poprawkę promienia wewnętrznego $a_{02} = a_{02}(\vartheta)$; z pierwszego równania układu (3.12) wyliczamy poprawkę promienia zewnętrznego $b_{02} = b_{02}(\vartheta)$. Dwa pozostałe równania układów (3.11) i (3.12), ponieważ muszą być spełnione dla każdego ϑ (wobec określonych składowych stanu naprężenia funkcjami (3.3), (3.9), (3.10)), dają następujący układ czterech równań na stałe całkowania C_{02} , D_{02} oraz G_{02} , H_{02} :

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \sqrt{4\lambda^2 - 1} \left[D_{02} \sin \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}} \right) - C_{02} \cos \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}} \right) \right] = 0, \\ \sqrt{4\lambda^2 - 1} C_{02} = 0, \\ H_{02} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}} \right) - G_{02} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}} \right) - \frac{3\sigma_0 a_{00}^7}{208 C^2} = 0, \\ G_{02} - \frac{3\sigma_0 b_{00}^7}{208 C^2} = 0. \end{aligned}$$

Z drugiego równania układu (3.13) wynika, że $C_{02} = 0$ ($\sqrt{4\lambda^2 - 1} \neq 0$ dla λ całkowitych).

Pierwsze równanie (3.13) może być spełnione, gdy $D_{02} = 0$ lub gdy

$$(3.14) \quad \sin \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}} \right) = 0.$$

Stąd

$$(3.15) \quad \frac{a_{00}}{b_{00}} = e^{\frac{n\pi}{\sqrt{4\lambda^2 - 1}}},$$

gdzie $n=1, 2, 3, 4, \dots$, $\lambda=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ (zapewnia to iż funkcja (3.9) ma okres 2π).

Wzór (3.15) określa tak jak wzór (3.2) ten sam ciąg stosunków «niezakłóconych» wymiarów cylindra, które ulegną zniszczeniu w sensie przyjętego kryterium.

Dwa pozostałe równania (3.13) dają możliwość wyznaczenia stałych całkowania H_{02} oraz G_{02} :

$$(3.16) \quad G_{02} = -\frac{3\sigma_0 b_{00}^7}{208C^2}, \quad H_{02} = \frac{3\sigma_0 b_{00}^7}{208C^2} \frac{\cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) - \left(\frac{a_{00}}{b_{00}}\right)^7}{\sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right)}.$$

Należy zwrócić uwagę, iż problem różni się tu jakościowo od analizowanego w pracy [3]. Przy kształtowaniu niekołowych cylindrów grubościennych, poddanych działaniu jedynie ciśnienia wewnętrznego, zerowe rozwiązanie (bez problemu wartości własnych) nie dawały żadnych efektów, mianowicie cylindry pozostawały kołowe. Jedynie bowiem cylindry odbiegające od kołowych o odpowiednio dobranym stosunku a_{00}/b_{00} (wynikającym z analizy problemu wartości własnych) mogły ulec zniszczeniu w sensie przyjętego kryterium.

W analizowanym w tej pracy problemie wpływ zginania i rozciągania uwidacznia się między innymi tym, iż zerowe rozwiązania (bez problemu wartości własnych) pozwolą na uzyskanie dla dowolnych stosunków a_{00}/b_{00} takich kształtów niekołowych, które ulegną całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia. Stałe G_{02} , H_{02} mogą być bowiem niezerowe dla dowolnych stosunków a_{00}/b_{00} . Zatem bez analizy problemu wartości własnych ($D_{02}=0$, $D_{01}=0$) otrzymujemy interesujące nas rozwiązania. Niezależnie od tych rozwiązań analiza problemu wartości własnych daje rozwiązania dla ustalonych stosunków a_{00}/b_{00} określonych wzorem (3.2).

Poprawki promienia wewnętrznego na rozpatrywanym szczelbu $A^0 B^2$ są więc określone różnymi funkcjami kąta ϑ :

dla dowolnego stosunku a_{00}/b_{00}

$$(3.17) \quad a_{02}(\vartheta) = \frac{a_{00}^7}{32C^2} + \left\{ \frac{3a_{00}^7}{208C^2} + \frac{3\sqrt{3} a_{00}^7}{832C^2 \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right)} \left[\sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) - \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) + \left(\frac{b_{00}}{a_{00}}\right)^7 \right] \right\} \cos 2\vartheta,$$

$$(3.17) \quad b_{02}(\vartheta) = \frac{b_{00}^7}{32C^2} + \left\{ \frac{3b_{00}^7}{208C^2} + \frac{3\sqrt{3}b_{00}^7}{832C^2 \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right)} \left[\sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) - \left(\frac{a_{00}}{b_{00}}\right)^7 \right] \right\} \cos 2\vartheta; \\ \text{[c.d]}$$

dla ustalonego stosunku określonego wzorem (3.2)

$$(3.18) \quad a_{02}(\vartheta) = -\frac{3}{8\sigma_0^2} \frac{D_{01}^2}{a_{00}} \sin^2 \lambda\vartheta + \frac{a_{00}^7}{32C^2} + \\ + \left\{ \frac{3a_{00}^7}{208C^2} + \frac{3\sqrt{3}a_{00}^7}{832C^2 \sin\left(-n\pi \sqrt{\frac{3}{\lambda^2-1}}\right)} \left[\sqrt{3} \sin\left(-n\pi \sqrt{\frac{3}{\lambda^2-1}}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos\left(-n\pi \sqrt{\frac{3}{\lambda^2-1}}\right) + \left(\frac{b_{00}}{a_{00}}\right)^7 \right] \right\} \cos 2\vartheta, \\ b_{02}(\vartheta) = -\frac{3}{8\sigma_0^2} \frac{D_{01}^2}{b_{00}} \sin^2 \lambda\vartheta + \frac{b_{00}^7}{32C^2} + \\ + \left\{ \frac{3b_{00}^7}{208C^2} + \frac{3\sqrt{3}b_{00}^7}{832C^2 \sin\left(-n\pi \sqrt{\frac{3}{\lambda^2-1}}\right)} \left[\sqrt{3} \sin\left(-n\pi \sqrt{\frac{3}{\lambda^2-1}}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos\left(-n\pi \sqrt{\frac{3}{\lambda^2-1}}\right) - \left(\frac{a_{00}^7}{b_{00}}\right)^7 \right] \right\} \cos 2\vartheta.$$

Poprawki składowych stanu naprężenia na szczęblu $A^0 B^2$, wobec dwóch jakościowo różnych rozwiązań, będą określone wzorami (3.9) i (3.10) z podstawieniem $C_{02}=D_{02}=0$ i (3.13) (ważne dla każdego stosunku a_{00}/b_{00}), lub z podstawieniem $C_{02}=0$, (3.15) i (3.16) (dla ustalonego stosunku a_{00}/b_{00} , problem wartości własnych). Odpowiednich wzorów nie będziemy tu podawać, mają bowiem dość rozbudowaną postać.

4. ZESTAWIENIE KOŃCOWYCH WZORÓW

Wykorzystując wzory (2.11), (2.12) oraz wyniki uzyskane z rozwiązania problemu na poszczególnych szczęblach przybliżenia ($A^0 B^1$, $A^1 B^0$, $A^1 B^1$, $A^2 B^0$, $A^0 B^2$) otrzymamy końcowe wzory określające poprawki promieni kształtowanego cylindra grubościennego oraz składowe stanu naprężenia z dokładnością do drugiego przybliżenia. Jak już wspomniano równolegle podamy dwa jakościowo różne rozwiązania.

4.1. Dla dowolnego stosunku a_{00}/b_{00} promienie wewnętrzny i zewnętrzny kształtowanego przekroju cylindra, który całkowicie zostanie uplastyczniony w stadium zniszczenia, są następującymi funkcjami kąta ϑ :

$$\begin{aligned}
 a(\vartheta) &= a_{00} + \frac{3a_{00}^5 \alpha^2}{32} + \frac{a_{00}^6 \alpha \beta}{8} \cos \vartheta + \frac{a_{00}^7 \beta^2}{32} + \\
 &+ \frac{\beta^2}{832} \left[21a_{00}^7 + \frac{3\sqrt{3}}{\sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right)} \left[b_{00}^7 - a_{00}^7 \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) \right] \right] \cos 2\vartheta + \dots, \\
 (4.1) \\
 b(\vartheta) &= b_{00} + \frac{3b_{00}^5 \alpha^2}{32} + \frac{b_{00}^7 \alpha \beta}{8} \cos \vartheta + \frac{b_{00}^7 \beta^2}{32} + \\
 &+ \frac{\beta^2}{832} \left[21b_{00}^7 - \frac{3\sqrt{3}}{\sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right)} \left[a_{00}^7 - b_{00}^7 \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) \right] \right] \cos 2\vartheta + \dots,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.2) \quad \alpha = \frac{A}{C}, \quad \beta = \frac{B}{C}$$

są nowymi parametrami.

Składowe stanu naprężenia z dokładnością do drugiego przybliżenia określone są następującymi funkcjami kąta ϑ i promienia r :

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(r, \vartheta) &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b_{00}} - \frac{\sqrt{3} \sigma_0 \alpha^2 r^4}{16} - \frac{\sqrt{3} \sigma_0 \alpha \beta r^5}{12} \cos \vartheta - \frac{\sqrt{3} \sigma_0 \beta^2 r^6}{48} - \\
 &- \left[\frac{3\sigma_0 b_{00}^7}{416r \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right)} \left\{ 1 + \left(\frac{a_{00}}{b_{00}}\right)^7 \left[\sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) \right] \right\} + \frac{\sqrt{3} \sigma_0 r^6}{104} \right] \beta^2 \cos 2\vartheta + \dots, \\
 (4.3) \\
 \sigma_\vartheta(r, \vartheta) &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} + \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b_{00}} - \frac{5\sqrt{3} \sigma_0 \alpha^2 r^4}{16} - \frac{7\sqrt{3} \sigma_0 \alpha \beta r^5}{12} \cos \vartheta - \\
 &- \frac{7\sqrt{3} \sigma_0 \beta^2 r^6}{48} - \left[\frac{3\sigma_0 b_{00}^7}{416r \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right)} \left\{ 1 + \left(\frac{a_{00}}{b_{00}}\right)^7 \left[\sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \cos\left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}}\right) \right] \right\} + \frac{7\sqrt{3} \sigma_0 r^6}{52} \right] \beta^2 \cos 2\vartheta + \dots,
 \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad \tau_{r\theta}(r, \vartheta) = -\frac{\sqrt{3} \sigma_0 \alpha \beta r^5}{12} \sin \vartheta - \left[\frac{7\sqrt{3} \sigma_0 r^6}{208} + \frac{3\sigma_0 b_{00}^7}{208r \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}} \right)} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \left(\frac{a_{00}}{b_{00}} \right)^7 \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{a_{00}}{b_{00}} \right) \right] \right] \beta^2 \sin 2\vartheta + \dots$$

4.2. Dla ustalonego stosunku

$$(4.4) \quad \frac{a_{00}}{b_{00}} = e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}}$$

funkcje określające promienie kształtowanego cylindra z dokładnością do drugiego przybliżenia mają postać:

$$(4.5) \quad \bar{a}(\vartheta) = \bar{a}(\vartheta) + (-1)^{n+1} \frac{\xi + \eta}{\lambda} \alpha \cos \lambda \vartheta - \frac{(\xi + \eta)^2}{2a_{00}} \alpha^2 \sin^2 \lambda \vartheta + \dots, \\ \bar{b}(\vartheta) = \bar{b}(\vartheta) - \frac{\xi + \eta}{\lambda} \alpha \cos \lambda \vartheta - \frac{(\xi + \eta)^2}{2b_{00}} \alpha^2 \sin^2 \lambda \vartheta + \dots,$$

gdzie $\bar{a}(\vartheta)$ i $\bar{b}(\vartheta)$ określone są wzorami (4.1) z podstawieniem (4.4) oraz

$$(4.6) \quad \xi = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} D_{10} C, \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} D_{01} C.$$

Parametry α , β , ξ , η są nowymi parametrami charakteryzującymi niekołowość cylindra oraz wpływ zginania i rozciągania.

Funkcje określające składowe stanu naprężenia w tym przypadku uzyskamy ze wzorów (3.40) z pracy [3] i z podstawienia $\bar{\alpha} = (\xi + \eta) \alpha$ oraz ze wzorów (4.3) tej pracy i z podstawienia (4.4). Odpowiednich wzorów nie będziemy tu przytaczać, mają bowiem dość rozbudowaną postać. Wykorzystamy je przy sporządzeniu wykresów naprężeń w kilku przekrojach analizowanego niżej przykładu.

5. PRZYKŁADY LICZBOWE

Wykorzystując wyprowadzone wzory podamy dwa przykłady liczbowe, tzn. określimy takie kształty cylindrów grubościennych, które mogą ulec pełnemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia pod działaniem stałego ciśnienia wewnętrznego zginania i rozciągania oraz rozkład naprężeń w niektórych przekrojach ścianek cylindrów.

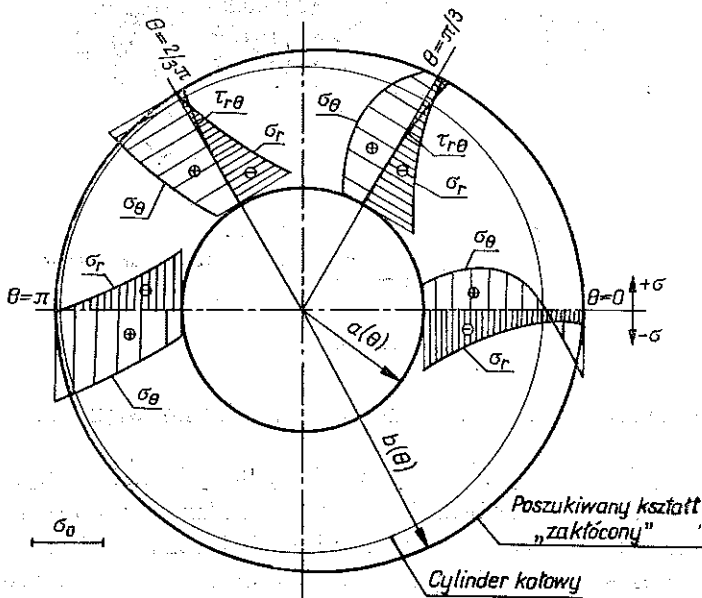
Przykład 1. Przyjmujemy $a_{00} = 0,5$, $b_{00} = 1$, $\alpha = \beta = 0,75$. Korzystając ze wzorów (4.1) uzyskujemy następujące funkcje $a(\vartheta)$ i $b(\vartheta)$, określające niekołowy kształt cylindra:

$$(5.1) \quad a(\vartheta) = 0,5018 + 0,0011 \cos \vartheta - 0,0036 \cos 2\vartheta + \dots, \\ b(\vartheta) = 1,0703 + 0,0703 \cos \vartheta + 0,0128 \cos 2\vartheta + \dots$$

Znaleziony kształt jak również rozkład naprężeń określony wzorami (4.3) w przekrojach $\vartheta=0, \pi/3, \pi/2/3, \pi$ pokazano na rys. 3.

Przykład 2. Jakościowo różne rozwiązanie uzyskamy ze wzorów (4.4). Mianowicie, przyjmując $b_{00}=1, \lambda=3, n=1$, ze wzoru (3.2) wyliczamy $a_{00}=0,3294$ (zerowe przybliżenie promienia wewnętrznego). Dla parametrów $\alpha=\beta=0,75$ oraz $\xi=\eta=0,03$ kształt «zakłócony» określony jest następującymi funkcjami kąta ϑ :

$$(5.2) \quad \begin{aligned} a(\vartheta) &= 0,3294 + 0,0002 \cos \vartheta - 0,0037 \cos 2\vartheta + \\ &\quad + 0,0200 \cos 3\vartheta - 0,0055 \sin^2 3\vartheta + \dots, \\ b(\vartheta) &= 1,0703 + 0,0703 \cos \vartheta + 0,0155 \cos 2\vartheta - \\ &\quad - 0,0200 \cos 3\vartheta - 0,0018 \sin^2 3\vartheta + \dots \end{aligned}$$

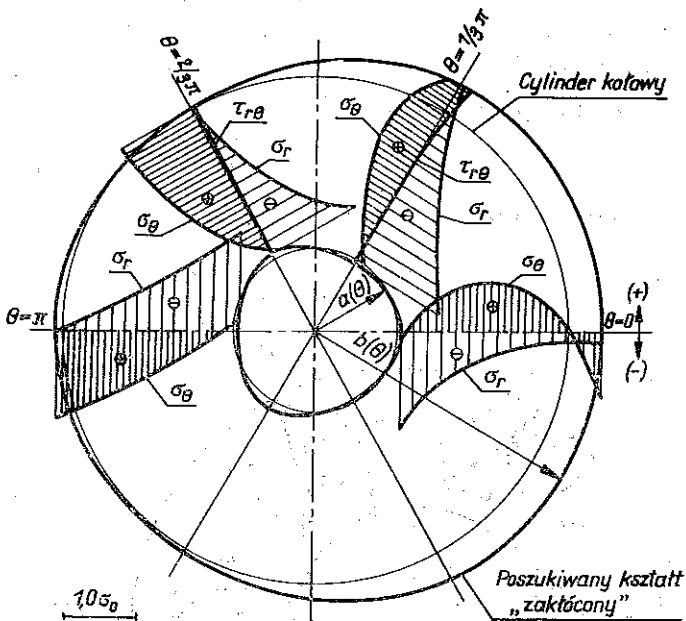


Rys. 3

Znaleziony «zakłócony» kształt jak również rozkład naprężeń w przekrojach $\vartheta=0, \pi/3, \pi/2/3, \pi$ pokazano na rys. 4.

Wpływ zginania i rozciągania scharakteryzowany jest parametrami α i β . Uwidacznia się on jak widać z przykładów przesunięciem osi obojętnej przekrojów, pogrubieniem ścianek, zwiększeniem przekrojów i wymiarów zewnętrznych cylindrów. W przedstawionych powyżej przykładach przyjęto dość duże wartości parametrów α i β — celem uwidocznienia jakościowego wpływu zginania i rozciągania, mimo gorszej zbieżności metody małego parametru. Rozwiązanie równań odkształceniowych oraz wyliczenie sił wewnętrznych (momentu zginającego i siły podłużnej N) dla danych parametrów α i β pozwoliłoby ocenić ilościowy wpływ zginania i rozciągania na kształt cylindrów grubościennych. Analiza taka wymaga ogromnego

nakładu pracy i wykracza poza zakres niniejszego opracowania. Z całkowania równań naprężeniowych uzyskano więc jakościowe rozwiązanie postawionego zagadnienia.



Rys. 4

6. DALSZE WARIANTY NIEJEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZANIA

W p. 2 przyjęliśmy rozwiązanie klasyczne (2.12) dla cylindra kołowego w płaskim stanie odkształcenia, jako przybliżenie zerowe dla badanego problemu obciążenia złożonego. Jednakże, jak wykazano w pracy [3], obok rozwiązania podstawowego istnieją inne, niekołowe kształty przekrojów cylindrów, podlegających pełnemu uplastycznieniu przy płaskim stanie odkształcenia. Określono je jako rozwiązanie problemu wartości własnych; w wyniku znaleziono zakłócenia kształtu cylindrów kołowych o pewnych ustalonych stosunkach promieni a_{00}/b_{00} .

Przyjmując odpowiednie, ogólniejsze rozwiązanie jako przybliżenie zerowe w tej pracy, możemy określić kolejne zakłócenia wywołane parametrami A i B i uzyskać jeszcze jedną rodzinę rozwiązań badanego problemu cylindrów pod jednoczesnym działaniem ciśnienia wewnętrznego, momentu zginającego i siły podłużnej.

Jeżeli przyjmiemy jako zerowe przybliżenie $\sigma_{r_{00}}$, $\sigma_{\theta_{00}}$, $\tau_{r_{\theta_{00}}}$ rozważanego problemu obciążenia złożonego — funkcje (3.40) z pracy [3], to rozwinięty warunek plastyczności dla poszczególnych rzędów przybliżenia — będzie miał następującą postać:

dla przybliżenia $A^1 B^0$

$$(6.1) \quad (\sigma_{r_{10}} - \sigma_{\theta_{10}})(\sigma_{r_{00}} - \sigma_{\theta_{00}}) + 4\tau_{r_{\theta_{00}}}\tau_{r_{\theta_{10}}} = 0,$$

dla przybliżenia $A^0 B^1$

$$(6.2) \quad (\sigma_{r_{01}} - \sigma_{\vartheta_{01}})(\sigma_{r_{00}} - \sigma_{\vartheta_{00}}) + 4\tau_{r\vartheta_{00}} \tau_{r\vartheta_{01}} = 0,$$

dla przybliżenia $A^1 B^1$

$$(6.3) \quad (\sigma_{r_{10}} - \sigma_{\vartheta_{10}})(\sigma_{r_{01}} - \sigma_{\vartheta_{01}}) + (\sigma_{r_{00}} - \sigma_{\vartheta_{00}})(\sigma_{r_{11}} - \sigma_{\vartheta_{11}}) + 4\tau_{r\vartheta_{10}} \tau_{r\vartheta_{01}} + 4\tau_{r\vartheta_{00}} \tau_{r\vartheta_{11}} = -\frac{3}{\varphi_{00}^2} r \cos \vartheta,$$

gdzie $\varphi_{00}(r, \vartheta)$ jest funkcją zaawansowania odkształceń plastycznych dla rozwiązanego w pracy [3] problemu, którą należy określić, analizując równania odkształceniowe

dla przybliżenia $A^2 B^0$

$$(6.4) \quad (\sigma_{r_{10}} - \sigma_{\vartheta_{10}})^2 + 2(\sigma_{r_{00}} - \sigma_{\vartheta_{00}})(\sigma_{r_{20}} - \sigma_{\vartheta_{20}}) + 4\tau_{r\vartheta_{10}}^2 + 8\tau_{r\vartheta_{00}} \tau_{r\vartheta_{20}} = -\frac{3}{\varphi_{00}^2},$$

dla przybliżenia $A^0 B^2$

$$(6.5) \quad (\sigma_{r_{01}} - \sigma_{\vartheta_{01}})^2 + 2(\sigma_{r_{00}} - \sigma_{\vartheta_{00}})(\sigma_{r_{02}} - \sigma_{\vartheta_{02}}) + 4\tau_{r\vartheta_{01}}^2 + 8\tau_{r\vartheta_{00}} \tau_{r\vartheta_{02}} = -\frac{3}{\varphi_{00}^2} r^2 \cos^2 \vartheta.$$

Do każdego z równań (6.1)–(6.5) należy dołączyć dwa warunki równowagi, które dla poszczególnych przybliżeń będą miały postać (2.1).

Podstawionego powyżej problemu nie będziemy jednak w niniejszej pracy analizować, wymagałoby to bowiem dużego nakładu pracy, a uzyskane rezultaty prawdopodobnie nie będą miały praktycznego znaczenia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. C. DRUECKER, R. T. SHIELD, *Design for minimum weight*, Proc. 9-th Intern. Congr. Appl. Mech., 5, Brussels, 212–222, 1956.
2. D. C. DRUECKER, R. T. SHIELD, *Bounds on minimum weight design*, Quart. Appl. Math., 3, 15, 269–281, 1957.
3. Z. KORDAŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Kształtowanie niekołowych cylindrów grubościennych wykazujących pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Rozpr. Inżyn., 18, 3, 1970.
4. Z. KORDAŚ, *Kształtowanie rurociągu o zmiennej średnicy wykazującego pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Rozpr. Inżyn., 21, 4, 1973.
5. Z. MRÓZ, *On a problem of minimum weight design*, Quart. Appl. Math., 19, 3, 127–135, 1961.
6. Z. MRÓZ, *Limit analysis of plastic structures subject to boundary variations*, Arch. Mech. Stos., 15, 1, 1963.
7. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1973.

Резюме

ФОРМИРОВАНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ИЗГИБА ИЗ УСЛОВИЯ ПРИВЕДЕНИЯ В ПОЛНОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ В СТАДИИ РАЗРУШЕНИЯ

В работе занимаются анализом влияния изгиба и продольной силы на форму некрутового толстостенного цилиндра подвергнутого влиянию постоянного внутреннего давления p . За критерий формирования принято условие приведения в полное пластическое состояние в стадии разрушения (условие Губера-Мизеса-Генки).

В примененном методе разлагались, в ряд малых параметров, напряжения деформации, а также функции $a(\vartheta)$ и $b(\vartheta)$, определяющие форму цилиндра. Интегрирование уравнений напряжений на отдельных этапах приближения, а также использование граничных условий напряжений позволили получить два качественно разных решения. А именно для произвольного соотношения размеров цилиндра a_{00}/b_{00} получены такие некруговые формы, которые разрушатся с точки зрения принятого критерия (формулы 4.1) «а кроме этого анализ проблемы собственных значений позволил найти формы отвечающие „нарушенным” круговым цилиндрам с определенным соотношением a_{00}/b_{00} (формулы 4.4).

В п. 4 представлен перечень окончательных формул с точностью до второго приближения, а в п. 5 представлены численные примеры,

SUMMARY

SHAPING OF THICK-WALLED CYLINDERS SUBJECT TO INTERNAL PRESSURE AND BENDING UNDER THE CONDITION OF FULL PLASTICIZATION AT THE STAGE OF COLLAPSE

In the paper is done the analysis of an influence of bending and normal force on the shape of non circular thick-walled cylinder under a constant internal pressure p .

As the shaping criterion the condition of the full plasticization at the stage of collapse was taken.

In the applied method stresses, deformations as well as $a(\vartheta)$ and $b(\vartheta)$ functions determining the shape of the cylinder were developed into series of small parameters.

Integration of the stress equations at the consecutive degrees of approximation and the use of the stress boundary conditions permitted to obtain two quantitatively different solutions. Namely, for an arbitrary ratio of cylinder radii a_{00}/b_{00} such noncircular shapes were found which collapse in the sense of taken criterium (Eqs. 4.1), and moreover the eigen-values analysis permitted obtaining the families of shapes of "perturbed" circular cylinders for certain evaluated ratios a_{00}/b_{00} (Eqs. 4.4).

In Sect. 4 the final formulae with the accuracy to the second degree of approximation, and in a Sect. 5 the numerical examples are given.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 31 marca 1976 r.

ВСТУП

ВСТУП