

## WPLYW LEPKICH WŁASNOŚCI MATERIAŁU NA PRZYSTOSOWANIE KONSTRUKCJI

JAGODA M A D E J (WARSZAWA)

Celem przedstawionej pracy jest pokazanie, iż obecność odkształceń lepkich wywołuje różnice ilościowe jak i pewne efekty dodatkowe w stosunku do wyników klasycznej analizy przystosowania konstrukcji sprężysto-plastycznej.

### 1. WSTĘP

Określenia stopnia bezpieczeństwa konstrukcji poddanych zmiennym obciążeniom zajmuje się teoria przystosowania [1 i 2]. Dotychczas brak jednak rezultatów systematycznych badań wpływu pełzania na przystosowanie się konstrukcji lepko-sprężysto-plastycznych, choć pewne zagadnienia z tego zakresu były już studiowane [1, 6 i 7].

Celem przedstawionej pracy jest pokazanie, iż pojawienie się odkształceń lepkich wywołuje różnice ilościowe, jak i pewne efekty dodatkowe w stosunku do wyników klasycznej analizy przystosowania konstrukcji sprężysto-plastycznej. Występujące w takim przypadku zjawiska przeanalizowano na przykładzie lepko-sprężysto-plastycznego pręta o końcach utwierdzonych, poddanego cykлом ogrzewania i chłodzenia.

Jeżeli amplituda zmian temperatury jest dostatecznie mała, to odkształcenia plastyczne w ogóle nie występują. Pojawienie się takich odkształceń powoduje zwykle powstanie naprężeń resztkowych. Ponieważ odkształcenia lepkie występują przy każdych wielkościach naprężeń, przeto powstałe naprężenia resztkowe będą słabnąć. W rezultacie ewentualnie już osiągnięty stan przystosowania zostanie utracony. Fakt ten powoduje, iż w obecności odkształceń lepkich, przystosowanie w sensie klasycznym nie jest już możliwe: następuje zjawisko cyklicznego narastania odkształceń plastycznych lub zmęczenia. W pracy omówiono charakterystyczne studia zachowania się elementu lepko-sprężysto-plastycznego, obliczono przykładowo krytyczną liczbę cykli potrzebną do zniszczenia, przeprowadzono dyskusję zachowania się elementu lepko-sprężysto-plastycznego i elementu sprężysto-plastycznego w zależności od amplitudy temperatury i długości cyklu.

### 2. POJĘCIE PRZYSTOSOWANIA

O konstrukcji mówimy, że przystosowała się do danych obciążeń, jeżeli na dalsze ich zmiany reaguje już czysto sprężystość. Sam fakt przystosowania jest możliwy jedynie wtedy, gdy po pewnym czasie naprężenia resztkowe, powstałe w wyniku

trwałych odkształceń, nałożone na naprężenia sprężyste od obciążeń nie naruszają warunku plastyczności w żadnym punkcie konstrukcji. W przeciwnym razie cykliczne przyrosty odkształceń plastycznych mogą — nawet pomimo niewyczerpania nośności granicznej — doprowadzić do tzw. zniszczenia przyrostowego wskutek nadmiernych przemieszczeń lub, w przypadku przemiennych znaków przyrostów odkształceń trwałych, do zniszczenia w wyniku niskocyklowego zmęczenia materiału.

Ustalone na podstawie badań doświadczalnych kryterium zniszczenia na skutek zmęczenia niskocyklowego ma formę:

$$(2.1) \quad \delta \varepsilon^p N^{1/\nu} = \varepsilon_0,$$

gdzie  $\delta \varepsilon^p$  oznacza amplitudę odkształceń plastycznych,  $\varepsilon_0, \nu$  stałe materiałowe oraz  $N$  liczbę cykli do zniszczenia.

W dotychczasowych pracach z teorii przystosowania fizyczne kryterium (2.1) i wa runek niewystąpienia zniszczenia przyrostowego wskutek narastania odkształceń plastycznych przybliżono warunkiem skończoności pracy plastycznej:

$$(2.2) \quad \int_0^{\infty} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt < \infty.$$

### 3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Przeanalizujemy wpływ odkształceń lepkich na przystosowanie konstrukcji. Dla jasności zilustrowania zjawiska rozpatrzmy prosty przykład pręta obustronnie utwierdzonego, poddanego zmiennemu obciążeniu termicznemu.

Zakładamy, że całkowite odkształcenie jest sumą czterech części: sprężystej, termicznej, lepkiej i plastycznej,

$$(3.1) \quad \varepsilon = \varepsilon^E + \varepsilon^T + \varepsilon^C + \varepsilon^p,$$

gdzie

$$\varepsilon^E(t) = \frac{\sigma(t)}{E}, \quad \varepsilon^T(t) = \alpha \theta(t), \quad \dot{\varepsilon}^C(t) = \eta \sigma(t);$$

$$\dot{\varepsilon}^p = 0, \quad \text{gdy} \quad -\sigma_0 < \sigma < \sigma_0;$$

$$\dot{\varepsilon}^p \geq 0, \quad \text{gdy} \quad \sigma = \sigma_0;$$

$$\dot{\varepsilon}^p \leq 0, \quad \text{gdy} \quad \sigma = -\sigma_0.$$

W warunkach tych  $E$  oznacza moduł Younga,  $\theta(t)$  temperaturę,  $t$  czas,  $\alpha$  współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej oraz  $\eta$  współczynnik lepkości.

Zakładamy ponadto idealną plastyczność materiału, tzn.

$$-\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_0.$$

Przy rozpatrywaniu konstrukcji sprężysto-plastycznej można wyznaczyć współczynnik bezpieczeństwa względem nieprzystosowania, gdy dane są granice zmienności obciążeń, natomiast historia obciążeń nie jest dana jawnie.

Występowanie odkształceń lepkich powoduje konieczność innego sformułowania problemów brzegowych niż dla konstrukcji z materiałów nieczułych na wybór skali czasu. Dlatego rozpatrywane cykliczne obciążenie termiczne  $\theta(t)$  takie, że pręt podgrzewany do temperatury  $\theta^*$ , a następnie chłodzony do zera — jest dane w sposób bezpośredni:

$$(3.2) \quad \theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\theta^* 1(t-nT) - \theta^* 1(t-nT-a)],$$

gdzie  $\theta^*$  oznacza amplitudę zmian temperatury,  $T=a+b$  długość jednego cyklu, przy czym

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 0, \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 0, \end{cases}$$

oraz gdzie  $n$  oznacza liczbę cykli.

Zgodnie z dotychczasowym kryterium na nieprzystosowanie będziemy obliczać wartość funkcjonału (2.2). W tym celu należy wyznaczyć naprężenia i odkształcenia plastyczne w każdym cyklu.

Przyjęto następujące oznaczenia:  $\sigma_I^n(t)$ ,  $\varepsilon_I^n(t)$  są to naprężenia i odkształcenia plastyczne w  $n$ -tym cyklu dla  $(n-1)T \leq t \leq (n-1)T+a$ ,  $\sigma_{II}^n(t)$ ,  $\varepsilon_{II}^n(t)$  naprężenia i odkształcenia plastyczne w  $n$ -tym cyklu dla  $(n-1)T+a \leq t \leq nT$ .

Ze względu na utwierdzenie pręta mamy

$$(3.3) \quad \varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}(t) = 0.$$

Analiza przeprowadzona będzie dla wartości amplitudy temperatury wyznaczonej różnymi funkcjami odkształceń plastycznych. Okaże się, że jedynym przypadkiem, gdy funkcjonał (2.2) przyjmuje wartość skończoną, jest przypadek trywialny  $\varepsilon^p(t) = 0$ . Warunek ten wyznacza więc od razu graniczną wartość amplitudy temperatury  $\theta_{gr}^*$  pozwalającej na przystosowanie. W przeciwnym razie pojawienie się odkształceń plastycznych w obecności odkształceń lepkich powoduje, że całka  $\int_0^t \sigma_{i,j} \dot{\varepsilon}_{i,j}^p dt$  może być dowolnie duża, co oznacza w klasycznej analizie nieprzystosowanie konstrukcji.

#### 4. STAN LEPKO-SPRĘŻYSTY

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy naprężenia są tak małe  $\theta^* \leq \sigma_0/\alpha E$ , że nie powstają odkształcenia plastyczne. Ze względu na utwierdzenie pręta przyrosty odkształceń są zerowe, co po uwzględnieniu związków konstytutywnych (3.1) daje

$$(4.1) \quad \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \eta \sigma(t) = 0.$$

Całką tego równania jest  $\sigma(t) = Ce^{-\eta Et}$ . Z warunku, że dla  $t=0$  nie zdążą się pojawić odkształcenia lepkie, tzn.  $\varepsilon^E(0) + \varepsilon^T(0) = 0$ , wyznaczamy stałą  $C$  i w rezultacie dla  $0 \leq t \leq a$  mamy

$$(4.2) \quad \sigma_I^1(t) = -\alpha \theta^* E e^{-\eta Et}.$$

Dla  $a \leq t \leq a+b=T$  wzór na naprężenie uzyskujemy, dodając odpowiednie translacje wzoru (4.2):

$$(4.3) \quad \sigma_{II}^1(t) = \sigma_I^1(t) - \sigma_I^1(t-a) = \alpha \theta^* E (e^{\eta E a} - 1) e^{-\eta E t}.$$

Naprężenie w  $(n+1)$ -szym cyklu otrzymuje się podobnie:

$$(4.4) \quad \sigma_{II}^{n+1}(t) = \sigma_{II}^n(t) - \sigma_I^1(t-nT),$$

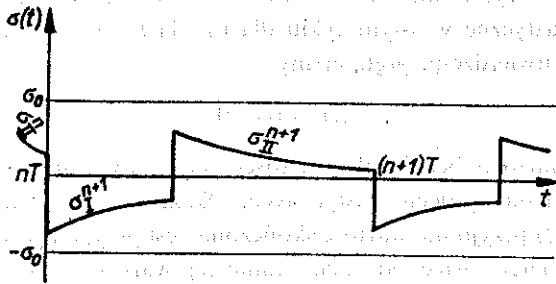
$$\sigma_{II}^{n+1}(t) = \sigma_I^{n+1}(t) - \sigma_I^1(t-nT-a) = \sigma_{II}^n(t) - \sigma_I^1(t-nT) - \sigma_I^1(t-nT-a).$$

Nieznane naprężenie  $\sigma_{II}^n(t)$  uzyskujemy przez rozwinięcie rekurencyjne wzoru na  $\sigma_{II}^{n+1}(t)$ . Po wstawieniu do (4.4) otrzymujemy układ równań na naprężenia w  $(n+1)$ -szym cyklu:

$$(4.5) \quad \sigma_{II}^{n+1}(t) = \alpha \theta^* E \frac{(e^{\eta E a} - 1)(1 - e^{\eta E (n+1)T})}{1 - e^{\eta E T}} e^{-\eta E t},$$

$$\sigma_I^{n+1}(t) = \alpha \theta^* E \left[ \frac{[(e^{\eta E a} - 1)(1 - e^{\eta E nT})]}{1 - e^{\eta E T}} - e^{\eta E nT} \right] e^{-\eta E t}.$$

Wykres pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Wykres naprężenia w  $(n+1)$ -szym cyklu obciążenia dla  $\theta^* \leq \frac{\sigma_0}{\alpha E}$

Dla  $a < b$  otrzymujemy  $|\sigma(nT)| > |\sigma(nT+a)|$ . Wartości funkcji  $|\sigma(nT)|$   $n=1, 2, \dots$  tworzą ciąg malejący. Wynika stąd, że nierówność  $\sigma_0 \geq |\sigma(0)|$  równoważna warunkowi  $\theta^* \leq \frac{\sigma_0}{\alpha E}$  implikuje warunek niepowstawania odkształceń plastycznych.

##### 5. PRZYROSTY ODKSZTAŁCEŃ PLASTYCZNYCH JEDNAKOWEGO ZNAKU

Postępując podobnie jak w przypadku poprzednim dla przedziału temperatury

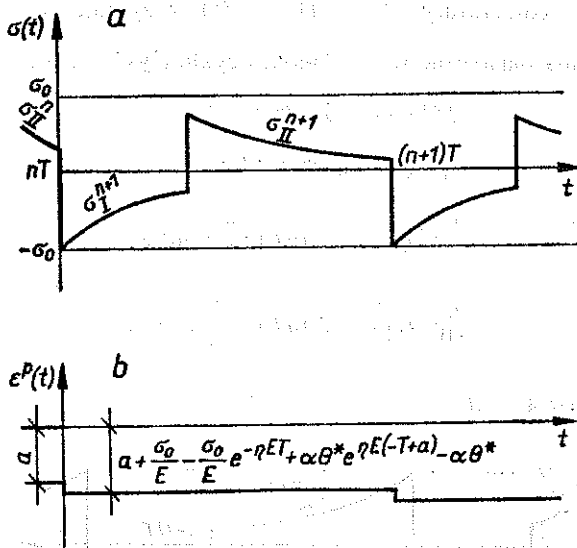
$$\frac{\sigma_0}{\alpha E} \leq \theta^* \leq \frac{\sigma_0}{\alpha E} (1 + e^{-\eta E a})$$

otrzymujemy wzory na naprężenia w  $(n+1)$ -szym cyklu obciążenia (rys. 2. a):

$$(5.1) \quad \sigma_I^{n+1}(t) = -\sigma_0 e^{\eta E (nT-t)},$$

$$\sigma_{II}^{n+1}(t) = [-\sigma_0 e^{\eta E nT} + \alpha \theta^* E e^{\eta E (nT+a)}] e^{-\eta E t}.$$

Wynika z tego, iż materiał uplastycznia się tylko w chwilach  $t=nT$ ,  $n=1, 2, \dots$ . Natomiast w punktach  $t=nTa+a$  naprężenia są mniejsze od  $\sigma_0$ .



Rys. 2. a) naprężenia i b) odpowiadające im odkształcenie plastyczne w  $(n+1)$ -szym cyklu obciążenia dla  $\frac{\sigma_0}{\alpha E} \leq \theta^* \leq \frac{\sigma_0}{\alpha E} (1 + e^{-nEa})$

Można, korzystając ze wzoru (5.1) oraz z warunku zamocowania pręta  $\varepsilon=0$  wyliczyć odkształcenia plastyczne w  $(n=1)$ -szym cyklu (rys. 2b).

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{n+1}(t) &= -\left[ \frac{-\sigma_0}{E} e^{nE(nT-t)} + \alpha\theta^* + \varepsilon^c(nT) + \frac{\sigma_0}{E} e^{nE(nT-t)} - \frac{\sigma_0}{E} \right] = \\ (5.2) \qquad \qquad \qquad &= -\varepsilon^c(nT) + \frac{\sigma_0}{E} - \alpha\theta^*, \end{aligned}$$

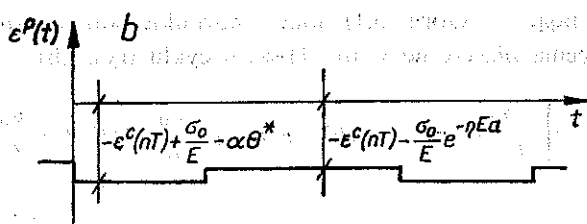
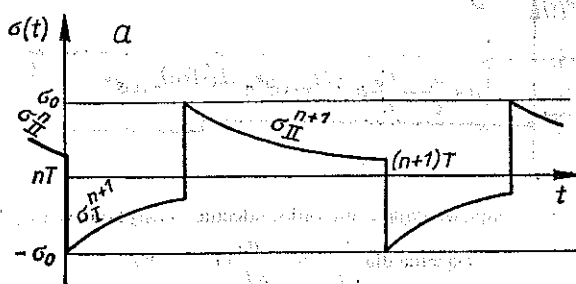
$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{n+1}(t) &= -\left[ \frac{-\sigma_0}{E} e^{nE(nT-t)} + \alpha\theta^* e^{nE(nT+a-t)} + \varepsilon^c(nT) + \frac{\sigma_0}{E} e^{nE(nT-t)} - \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. - \frac{\sigma_0}{E} - \alpha\theta^* e^{nE(nT+a-t)} + \alpha\theta^* \right] = -\varepsilon^c(nT) + \frac{\sigma_0}{E} - \alpha\theta^*. \end{aligned}$$

W każdym punkcie  $t=nT$ ,  $n=1, 2, \dots$ , dysypuje się stała wartość pracy plastycznej (por. dodatek). Wynika stąd, że kryterium adaptacji w sensie ograniczonej pracy plastycznej nie jest w tym przypadku spełnione. Ze względu na stałość znaku przyrostów odkształceń plastycznych można przypadek ten przez analogię do klasycznej analizy nazwać zniszczeniem przyrostowym, choć w rzeczywistości, ze względu na zamocowanie pręta, przemieszczenia całkowite są równe zero. Zostanie wykazane dalej, że zjawisko to nie występuje w pręcie sprężysto-plastycznym, gdy brak jest odkształceń lepkich.

## 6. PRZYROSTY ODKSZTAŁCEŃ PLASTYCZNYCH PRZEMIENNEGO ZNAKU

Dla przedziału temperatury  $\theta^* \geq \frac{\sigma_0}{\alpha E} (1 + e^{-nEa})$  otrzymujemy wzory na naprężenia i odkształcenia plastyczne w  $(n+1)$ -szym cyklu (rys. 3 a, b):

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \sigma_I^{n+1}(t) &= -\sigma_0 e^{nE(nT-t)}, \\ \sigma_{II}^{n+1}(t) &= \sigma_0 e^{nE(nT+a-t)}, \\ \varepsilon_I^{n+1} &= -\varepsilon^c(nT) \frac{\sigma_0}{E} - \alpha\theta^*, \\ \varepsilon_{II}^{n+1}(t) &= -\varepsilon^c(nT) - \frac{\sigma_0}{E} e^{-nEa}. \end{aligned}$$



Rys. 3. a) naprężenia i b) odpowiadające im odkształcenie plastyczne w  $(n+1)$ -szym cyklu obciążenia dla  $\theta^* \geq \frac{\sigma_0}{\alpha E} (1 + e^{-nEa})$

W tym przypadku materiał uplastycznia się w chwilach  $t=nT$  i  $t=nT+a$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  Energia plastyczna dyspowana może po dostatecznie wielu cyklach stać się «dowolnie wielka». Ze względu na zmienny znak przyrostów plastycznych nastąpi zniszczenie na skutek zmęczenia niskocyklowego.

Przy założeniu  $a=b$  przyrosty te będą symetryczne. Można więc, korzystając ze wzoru (2.1) obliczyć liczbę cykli poprzedzających zniszczenie:

$$N = [\varepsilon_0 (\delta\varepsilon^p)^{-1}]^{\nu} = \left[ \frac{\varepsilon_0}{\alpha\theta^* - \frac{\sigma_0}{E} (1 + e^{-nEa})} \right]^{\nu}$$

Dla ilustracji obliczono liczbę cykli do zniszczenia w zależności od współczynnika lepkości i długości cyklu temperatury przyjmując:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 0,22, & \theta^* &= 300^\circ, \\ \nu &= 2, & E &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2, \\ \sigma_0 &= 2500 \text{ kG/cm}^2, & k &= \eta \frac{T}{2} \text{ cm}^2/\text{kG}, \\ \alpha &= 12 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

Tablica 1. Liczba cykli temperatury potrzebna do zniszczenia

$k \text{ cm}^2/\text{kG}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$	$10^{-11}$	$\rightarrow 0$
$N$	9444	23194	31286	32435	32555	32567	32568

Z tablicy wynika, że własności lepkie materiału zmniejszają wytrzymałość na znaczenie niskocyklowe. Współczynnik  $k$  zależy nie tylko od parametru  $\eta$  określającego własności pełzania materiału, ale również od długości cyklu temperatury. Jest to naturalne, ponieważ w zależności czy cykle są szybkie, czy wolne — własności lepkie mają krótszy lub dłuższy czas do zmanifestowania się.

#### 7. MATERIAŁ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY

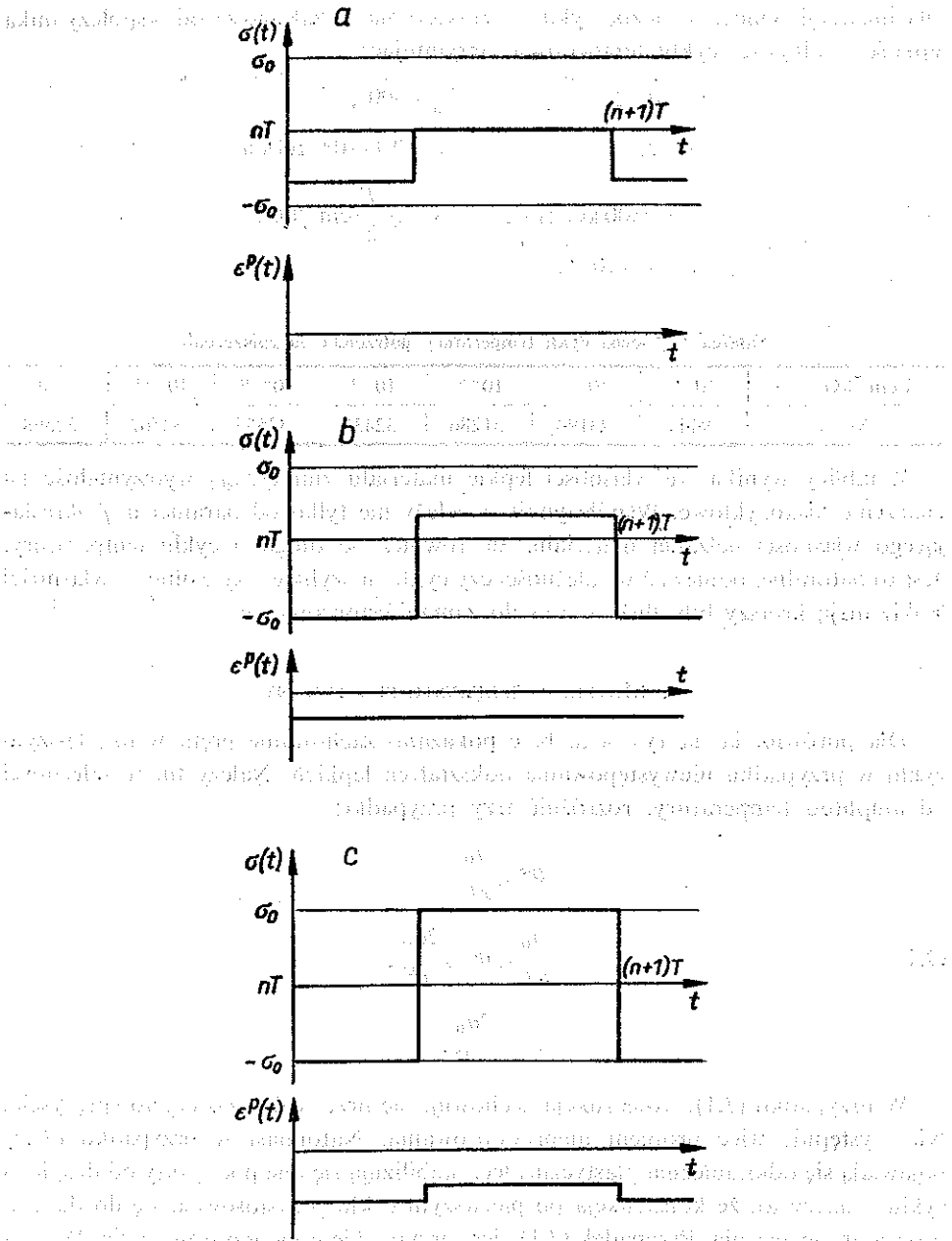
Dla porównania na rys. 4 a, b, c pokazano zachowanie pręta w  $(n+1)$ -szym cyklu w przypadku niewystępowania odkształceń lepkich. Należy tu, w zależności od amplitud temperatury, rozróżnić trzy przypadki:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \theta^* &\leq \frac{\sigma_0}{\alpha E}, \\ \frac{\sigma_0}{\alpha E} &\leq \theta^* \leq \frac{2\sigma_0}{\alpha E}, \\ \theta^* &\geq \frac{2\sigma_0}{\alpha E}. \end{aligned}$$

W przypadku  $(7.1)_1$  konstrukcja zachowuje się przez cały czas czysto sprężystie. Nie występuje więc problem nieprzystosowania. Natomiast w przypadku  $(7.1)_2$  pojawiają się odkształcenia plastyczne, lecz stabilizują się one począwszy od drugiego cyklu. Znaczący to, że konstrukcja po pierwszym cyklu przystosowała się do danego programu obciążenia. Przypadek  $(7.1)_3$  jest przypadkiem nieprzystosowania. W każdym cyklu pojawiają się przyrosty naprężeń plastycznych przeciwnego znaku, co prowadzi do zmęczenia niskocyklowego.

Liczba cykli poprzedzających zniszczenie wynosi

$$N = [\varepsilon_0 (\delta \varepsilon^p)^{-1}]^\nu = \left( \frac{\varepsilon_0}{\alpha \theta^* - \frac{2\sigma_0}{E}} \right)^\nu.$$



Rys. 4. Naprężenia i odkształcenia plastyczne w  $(n+1)$ -szym cyklu obciążenia dla pręta sprężysto-plastycznego przy różnych amplitudach temperatury: a)  $\theta^* \leq \frac{\sigma_0}{\alpha E}$ , b)  $\frac{\sigma_0}{\alpha E} \leq \theta^* \leq \frac{2\sigma_0}{\alpha E}$ , c)  $\theta^* > \frac{2\sigma_0}{\alpha E}$

Przyjmując wartości parametrów  $\nu$ ,  $\sigma_0$ ,  $\theta^*$ ,  $\alpha$ ,  $E$ ,  $\varepsilon_0$  jak w punkcie 6, otrzymano  $N = 32568$  cykli.



## 8. WNIOSKI

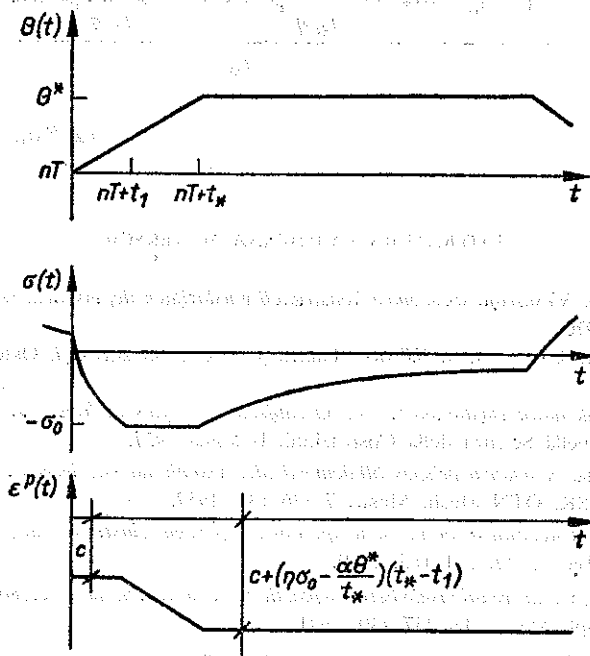
Pojawienie się odkształceń lepkich przy dowolnie małych naprężeniach w istotny sposób wpływa na zachowanie pręta. Przede wszystkim zmienia się zakres zmian temperatury (lub obciążeń) pozwalających na przystosowanie. W przypadku klasycznym graniczną wielkością amplitudy temperatury jest  $\theta_{gr}^* = 2\sigma_0/\alpha E$ , natomiast przy pojawieniu się odkształceń lepkich  $\theta_{gr}' = \sigma_0/\alpha E$  jest równoważna warunkowi niepojawienia się odkształceń plastycznych.

Ponadto odkształcenia lepkie mogą spowodować dla  $\frac{\sigma_0}{\alpha E} \leq \theta^* \leq \frac{\sigma_0}{\alpha E} (1 + e^{-\eta E \sigma})$  zniszczenie przyrostowe. Zjawiska tego nie obserwujemy w ujęciu klasycznym.

W przypadku zmęczenia niskocyklowego (punkt 6 i przypadek (7.1)<sub>3</sub>) niszcząca liczba cykli zależy nie tylko od wielkości współczynnika lepkości  $\eta$ , ale również od tego, czy cykle są szybkie, czy wolne. W granicznym przypadku dla  $\eta T \rightarrow 0$  (tzn. gdy są pomijane własności lepkie lub gdy cykle są tak szybkie, że własności te nie nadążają się rozwinąć) — otrzymujemy wyniki identyczne z wynikami klasycznej analizy.

Natomiast przy  $\eta a \rightarrow \infty$  przypadek omówiony w punkcie 5 nie będzie się realizował.

Analizując wyniki podane w punktach 5, 6 spostrzegamy, że pojawienie się odkształceń plastycznych w obecności odkształceń lepkich prowadzi zawsze do nieograniczonego wzrostu plastycznej energii dysypowanej. Jest to spowodowane relaksacją naprężeń resztkowych. Nasuwa się wniosek, że klasyczne kryterium przystosowania w sensie 2 jest niewystarczające w przypadku odkształceń lepkich.



Rys. 5. Wykres obciążenia termicznego i odpowiadające mu naprężenie oraz odkształcenie plastyczne w pierwszej fazie  $(n+1)$ -szego cyklu w przypadku temperatury narastającej do wartości  $\theta^*$  w sposób liniowy

## DODATEK

Wzrost energii plastycznej  $D$  dysypowanej w chwili  $t = nT$ ,  $n = 1, 2, \dots$  można wyliczyć, zakładając, że dany program obciążenia jest zrealizowany jako przejście graniczne, gdy  $t_* \rightarrow 0$  temperatury narastającej w sposób liniowy aż do wartości  $\theta^*$  (rys. 5). Z odpowiednich wykresów [8] wyznaczamy pracę plastyczną dysypowaną na odcinku  $\langle nT + t_1, nT + t_* \rangle$ :

$$D_{\langle nT+t_1, nT+t_* \rangle} = \int_{nT+t_1}^{nT+t_*} \sigma(t) \dot{\epsilon}^p(t) dt = \int_{nT+t_1}^{nT+t_*} (-\sigma_0) \left( \eta \sigma_0 - \frac{\alpha \theta^*}{t_*} \right) dt =$$

$$= -\eta \sigma_0^2 (t_* - t_1) + \frac{\alpha \theta^*}{t_*} (t_* - t_1),$$

$$D = \lim_{t_* \rightarrow 0} D_{\langle nT+t_1, nT+t_* \rangle} = \lim_{t_* \rightarrow 0} \left[ -\eta \sigma_0^2 (t_* - t_1) + \frac{\alpha \theta^*}{t_*} (t_* - t_1) \right] =$$

$$= \alpha \theta^* \sigma_0 \left( 1 - \lim_{t_* \rightarrow 0} \frac{t_1}{t_*} \right) = \alpha \theta^* \sigma_0 - \alpha \theta^* \sigma_0 \lim_{t_* \rightarrow 0} \times$$

$$\frac{-\frac{1}{\eta E} \ln \left( \frac{-\sigma_0 + \frac{\alpha \theta^*}{t_* \eta}}{-\sigma_0 e^{\eta E (t_* - T)} - \frac{\alpha \theta^*}{t_* \eta} e^{\eta E (t_* + a - T)} + \frac{\alpha \theta^*}{t_* \eta} e^{\eta E (2t_* + a - T)} + \frac{\alpha \theta^*}{t_* \eta} \right)}{t_*} =$$

$$= \alpha \theta^* \sigma_0 - \frac{\sigma_0^2}{E} (1 + e^{-\eta E T}).$$

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. A. GOCHFELD, *Niesuścająca sposobność konstrukcji v uslovijach tieplosmien*, Izd. Masszynostrojenije, Moskwa 1970.
2. A. SAWCZUK, M. JANAS i J. A. KÖNIG, *Analiza plastyczna konstrukcji*, Ossolineum, Wrocław 1972.
3. W. PRAGER, *Shakedown elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature*, Sym. sur la Plasticita' nella Scienza della Costruzioni, Bologna 1957.
4. W. I. ROZENBLUM, *K analizu prisposobljajemosti nieravnomierno nagrietych uprugo-plastičeskich tieł*, Izv. An SSSR, OTN Mech. Masz., 7 136-138, 1957.
5. J. A. KÖNIG, *A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 17, 161-165, 1969.
6. A. R. S. PONTIER, *On the relationship between plastic shakedown and the repeated loading of creeping structures*, J. Appl. Mech., 38, 437-440, 1971.
7. A. R. S. PONTIER, *Deformation, displacement and work bounds for structures in a state of creep and subject to variable loading*, J. Appl. Mech., 39, 4, 953-958, 1972.
8. J. MADEJ, *Analiza przystosowania pręta sprężysto-lepko-plastycznego*, Prace IPPT, Warszawa 1976.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА НА ПРИСПОСОБЛЕНИЕ  
КОНСТРУКЦИИ

Целью представленной работы является показать, что присутствие вязких деформаций вызывает так количественные различия, как и некоторые дополнительные эффекты по отношению к результатам классического анализа приспособления упруго-пластической конструкции.

SUMMARY

INFLUENCE OF VISCOUS PROPERTIES OF MATERIAL ON SHAKEDOWN  
OF STRUCTURES

The aim of the paper is to show that the presence of the viscous strains causes the quantitative differences and certain additional effects with respect to the results of the classic analysis of shakedown of elastic-plastic structures.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 czerwca 1977 r.*

---