

KONSOLIDACJA PÓLPRZESTRZENI LEPKO-SPRĘŻYSTEJ Z WARUNKAMI BRZEGOWYMI TYPU SZCZEPIONIA

ANNA KUMANIECKA (KRAKÓW)

W pracy podano ściśle rozwiązanie osiowo-symetrycznego problemu konsolidacji półprzestrzeni lepko-sprężystej pod obciążeniem normalnym działającym na brzegu z warunkami brzegowymi typu szczepienia. Zadanie zostało sformułowane i rozwiązane na gruncie trójwymiarowej, liniowej teorii konsolidacji Biota dla różnych przypadków przepuszczalności brzegu półprzestrzeni. Otrzymane rezultaty zilustrowano przykładami liczbowymi.

1. WSTĘP

Wiele prac poświęconych rozwiązaniu zadań brzegowych teorii konsolidacji podjęło zagadnienia mieszanych warunków brzegowych. Jak się wydaje, w literaturze tego przedmiotu, nie rozważono wpływu szczepienia na wielkość osiadań w procesie konsolidacji. Praca niniejsza zawiera analizę stanu deformacji i naprężeń porowatego ośrodka lepko-sprężystego nasyconego cieczą, w którym proces konsolidacji wywołany jest obciążeniem normalnym działającym na brzeg ośrodka przy istnieniu szczepienia w obszarze kontaktu. Zadanie zostało sformułowane i rozwiązane na gruncie trójwymiarowej sprzężonej teorii konsolidacji BIOTA [1] w osiowo-symetrycznym stanie odkształcenia dla różnych przypadków przepuszczalności brzegu półprzestrzeni.

2. SFORMULOWANIE PROBLEMU

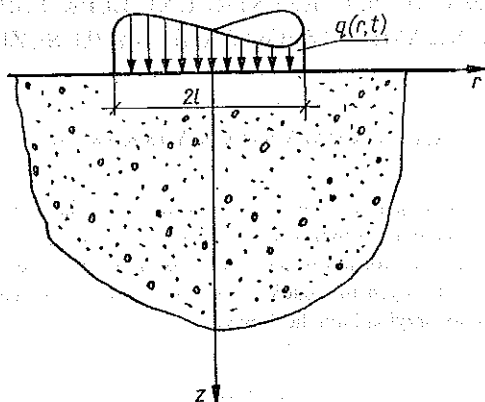
Rozważać będziemy dwufazowy ośrodek odkształcalny złożony z porowatego, jednorodnego, izotropowego szkieletu lepko-sprężystego oraz cieczy przesączającej się przez pory zgodnie z prawem Darcy'ego. Przyjęto, że szkielet ma własności reologiczne zgodne z zasadą dziedziczności Boltzmanna bez starzenia z różnymi własnościami pełzania w procesie odkształcenia postaciowego, objętościowego oraz wywołanego ciśnieniem cieczy w porach. W walcowym układzie współrzędnych $O\varrho\varphi z$ rozpatrujemy półprzestrzeń $z \geq 0$, której gładki brzeg jest obciążony znanym obciążeniem $q(r, t)$ (rys. 1). Podstawę rozważań stanowią będą równania przemieszczeniowe, które w rozpatrywanym przypadku osiowej symetrii mają postać

$$(2.1) \quad N \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + (N+M)\varepsilon, r = Ap, r, \quad N \Delta w + (N+M)\varepsilon, z = Ap, z, \\ \frac{k}{\gamma} \Delta p = \frac{3n}{\alpha_w} \dot{p} + \dot{\varepsilon},$$

gdzie

$$\varepsilon = u, r + \frac{u}{r} + w, z, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

oraz u oznacza przemieszczenie radialne, w przemieszczenie pionowe, p ciśnienie cieczy w porach i N, M, A operatory całkowe Voltery II-go rodzaju [4].



Rys. 1

Warunki brzegowe w rozważanym przez nas zadaniu są następujące:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_z(r, 0, t) &= q(r, t), & \forall r \geq 0, & \quad \forall t \geq 0, \\ u(r, 0, t) &= 0, & 0 \leq r < l, \\ \sigma_{rz}(r, 0, t) &= 0, & r > l \end{aligned}$$

dla ciśnienia porowego przy rozważaniu procesu konsolidacji półprzestrzeni z brzegiem przepuszczalnym

$$(2.2') \quad p(r, 0, t) = 0, \quad \forall r \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

i z brzegiem nieprzepuszczalnym

$$(2.2'') \quad \left. \frac{\partial p(r, z, t)}{\partial z} \right|_z = 0, \quad \forall r \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Warunki regularności w nieskończoności mają postać

$$(2.3) \quad \lim_{Rz \rightarrow \infty} (u, w, p) = 0,$$

gdzie $Rz = \sqrt{z^2 + r^2}$.

Zakładając, że obciążenie brzegu półprzestrzeni $q(r, t)$ jest funkcją rosnącą w czasie w sposób ciągły od wartości zero do dowolnej skończonej wartości, przyjętą jednorodnie warunki początkowe:

$$(2.4) \quad u(r, z, 0) = w(r, z, 0) = p(r, z, 0) = 0,$$

które spełniają wymagane dla układu równań teorii konsolidacji równania zgodności [4].

3. OGÓLNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Przy budowie rozwiązania ogólnego układu (2.1) zastosowano transformację całkową Hankela względem zmiennej r oraz Laplace'a względem zmiennej t . Wykorzystując znane wzory dla funkcji Bessela, postać operatorów N , M , A , twierdzenie o splocie dla transformacji Laplace'a oraz warunki początkowe (2.4), otrzymamy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \bar{N} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \rho^2 \right) \bar{u} + (\bar{N} + \bar{M}) (-\rho) \bar{\varepsilon} &= -\rho \bar{A} \bar{p}, \\ \bar{N} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \rho^2 \right) \bar{w} + (\bar{N} + \bar{M}) \frac{d}{dz} \bar{\varepsilon} &= \bar{A} \frac{d\bar{p}}{dz}, \\ \frac{k}{\gamma} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \rho^2 \right) \bar{p} &= \frac{3n}{\alpha_w} s \bar{p} + s \bar{\varepsilon}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{u}(\rho, z, s) = \int_0^\infty \int_0^\infty u(r, z, t) r J_1(\rho r) e^{-st} dr dt,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}(\rho, z, s) \\ \bar{p}(\rho, z, s) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \int_0^\infty \begin{bmatrix} w(r, z, t) \\ p(r, z, t) \end{bmatrix} r J_0(\rho r) e^{-st} dr dt,$$

$$\bar{\varepsilon}(\rho, z, s) = \rho \bar{u} + \frac{d\bar{w}}{dz},$$

$$[\bar{N}, \bar{M}, \bar{A}] = \int_0^\infty [N, M, A] e^{-st} dt.$$

Rozwiązanie układu (3.1) uzyskano metodą rozprzężenia równań zaproponowaną przez W. Derskiego, a szeroko omówioną w pracy [4]. Przystępując do rozwiązania układu (3.1) wykonano następujące operacje: pomnożono równanie (3.1)₁ przez ρ , natomiast (3.1)₂ zrózniczkowano względem zmiennej z , a następnie tak przekształcone związki dodano do siebie otrzymując

$$(3.2) \quad (2\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \rho^2 \right) \bar{\varepsilon} = \bar{A} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \rho^2 \right) \bar{p}.$$

Uwzględniając trzecie z równań (3.1) otrzymano równanie różniczkowe rzędu czwartego z niewiadomą funkcją ciśnienia porowego

$$(3.3) \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} - \rho^2 \right)^2 \bar{p} - s \bar{B} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \rho^2 \right) \bar{p} = 0,$$

gdzie dla zwięzłości zapisu wprowadzono następujące oznaczenie:

$$\bar{B} = \frac{\gamma}{k} \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{2\bar{N} + \bar{M}} \right).$$

Rozwiązanie (3.3) z uwzględnieniem (2.3) ma postać:

$$(3.4) \quad \tilde{p} = C_1(\rho, s) e^{-\rho z} + C_2(\rho, s) e^{-mz},$$

gdzie

$$m^2 = \rho^2 + s\bar{B}.$$

Wykorzystując wartość \tilde{p} obliczono $\tilde{\varepsilon}$ z (3.1)₃ i podstawiono do (3.1)₁, (3.1)₂.

Całki ogólne tych równań, po uwzględnieniu (3.4), są następujące:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \tilde{u} &= C_3 e^{-\rho z} + C_1 \frac{\bar{N} + \bar{M}}{2\bar{N}} \bar{B}_1 z e^{-\rho z} - \frac{\rho \bar{A} C_2}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz}, \\ \tilde{w} &= C_4 e^{-\rho z} + C_1 \frac{\bar{N} + \bar{M}}{2\bar{N}} \bar{B}_1 z e^{-\rho z} - \frac{m \bar{A} C_2}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{B}_1 = \frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}}.$$

Wykorzystując związki fizyczne i geometryczne otrzymamy transformaty interesujących nas naprężeń

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}_r &= C_1 \left[(\bar{N} + \bar{M}) \bar{B}_1 z \rho + \frac{\bar{M}(\bar{N} + \bar{M})}{2\bar{N}} \bar{B}_1 - \bar{A} \right] e^{-\rho z} - \\ &\quad - C_2 \frac{2\bar{A}\bar{N}m^2}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz} + C_3 \rho (2\bar{N} + \bar{M}) e^{-\rho z} - C_4 \bar{M} \rho e^{-\rho z}, \\ \tilde{\sigma}_z &= C_1 \left[-(\bar{N} + \bar{M}) \rho z \bar{B}_1 + \frac{\bar{M}\bar{A}}{2\bar{N}} + \frac{3n(2\bar{N} + \bar{M})(\bar{N} + \bar{M})}{\alpha_w 2\bar{N}} \right] e^{-\rho z} + \\ &\quad + C_2 \frac{2\bar{A}\bar{N}\rho^2}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz} + C_3 \bar{M} \rho e^{-\rho z} - C_4 (2\bar{N} + \bar{M}) \rho e^{-\rho z}, \\ \tilde{\sigma}_{rz} &= C_1 (\bar{N} + \bar{M}) \bar{B}_1 \frac{1 - \rho z}{2} e^{-\rho z} + \frac{2\bar{A}\bar{N}m\rho}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} C_2 e^{-mz} - \\ &\quad - C_3 N \rho e^{-\rho z} - C_4 \bar{N} \rho e^{-\rho z}. \end{aligned}$$

W wyniku przyjętej metody rozprężenia układu równań został podniesiony rząd równania filtracji z drugiego na czwarty. W związkach (3.5) i (3.6) występują cztery współczynniki C_1, C_2, C_3, C_4 , do wyznaczenia których potrzebne są cztery relacje. Trzech spośród nich dostarczą warunki brzegowe (2.2), a czwartą otrzymujemy uwzględniając fakt podniesienia rzędu równania filtracji. Otrzymane więc rozwiązanie (3.4) musi spełniać równanie (3.1)₃. Stąd uzyskujemy poszukiwany związek

$$(3.7) \quad 2\bar{N}\rho(C_3 - C_4) + \left[\frac{3n}{\alpha_w} (3\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right] C_1 = 0.$$

Przystępując do uwzględnienia warunków brzegowych rozważmy w pierwszej kolejności półprzestrzeń z brzegiem $z=0$ przepuszczalnym. W tym przypadku obowiązują warunki (2.2)–(2.2'). Wykonując na nich transformacje Laplace'a i Hankela otrzymujemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & C_1 \left[\frac{\bar{M}\bar{A}}{2\bar{N}} + \frac{3n}{\alpha_w} \frac{(2\bar{N}+\bar{M})(\bar{N}+\bar{M})}{2\bar{N}} \right] + C_2 \frac{2\bar{A}\bar{N}\rho^2}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})} + \\ & + C_3 \bar{M}\rho - (2\bar{N}+\bar{M})\rho C_4 = \bar{q}(\rho, s), \\ & \int_0^\infty \left[C_3 - \frac{\rho\bar{A}C_2}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})} \right] J_1(\rho r) \rho \, d\rho = 0 \quad \text{dla } r < l, \\ & \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} C_1(\bar{N}+\bar{M})\bar{B}_1 + \frac{2\bar{A}\bar{N}m\rho}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})} - \rho\bar{N}(C_3+C_4) \right] \rho J_1(\rho r) \, d\rho = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{dla } r > l, \\ & C_1 + C_2 = 0. \end{aligned}$$

Warunki (3.8)₁, (3.8)₄ i (3.7) pozwalają wyrazić niewiadome C_1 , C_3 , C_4 przy pomocy C_2 w następujący sposób:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} C_1 &= -C_2, \\ C_3 &= -\frac{1}{2\bar{N}\rho} \bar{q}(\rho, s) + \frac{1}{\rho} C_2 \left[\frac{3n}{\alpha_w} \frac{(2\bar{N}+\bar{M})}{2\bar{N}} + \frac{\bar{A}}{2\bar{N}} + \frac{\bar{A}\rho^2}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})} \right], \\ C_4 &= -\frac{\bar{q}(\rho, s)}{2\bar{N}\rho} - \frac{1}{2\rho} \left[\frac{3n}{\alpha_w} - \frac{2\bar{A}\rho^2}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})} \right] C_2. \end{aligned}$$

Pozostałe warunki brzegowe prowadzą do układu dualnych równań całkowych z niewiadomą C_2 :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{2\bar{N}} \left\{ \bar{q}(\rho, s) - \frac{k}{\gamma} (2\bar{N}+\bar{M})\bar{B} C_2 \right\} J_1(\rho r) \, d\rho = 0 \quad \text{dla } r < l, \\ & \int_0^\infty \left\{ \bar{q}(\rho, s) - C_2 \left[\bar{B}_1(\bar{N}+\bar{M}) - \frac{2\bar{A}\rho\bar{N}(m-\rho)}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})} \right] \right\} \rho J_1(\rho r) \, d\rho = 0, \quad \text{dla } r > l. \end{aligned}$$

Podstawiając

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \Phi_1(\rho, s) &= \rho \left\{ \bar{q}(\rho, s) - C_2 \left[\bar{B}_1(\bar{N}+\bar{M}) - \frac{2\bar{A}\rho\bar{N}(m-\rho)}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})} \right] \right\}, \\ G_1(\rho, s) &= 1 - \frac{\bar{A}m(m+\rho)}{\bar{B}_1(\bar{N}+\bar{M})(m+\rho)^2 - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N}+\bar{M}} \rho(m+\rho)}, \\ f(r, s) &= \frac{\bar{N}}{2\bar{N}+\bar{M}} \int_0^\infty \bar{q}(\rho, s) \cdot G_1(\rho, s) J_1(\rho r) \, d\rho. \end{aligned}$$

Układ równań (3.10) ma postać:

$$(3.12) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} \Phi_1(\rho, s) \left[1 - \frac{\frac{\bar{A}\bar{N}s\bar{B}}{2\bar{N}+\bar{M}}}{(m+\rho)^2 \bar{B}_1(\bar{N}+\bar{M}) - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N}+\bar{M}} \rho(m+\rho)} \right] J_1(\rho r) d\rho = f(r, s) \quad \text{dla } r < l,$$

$$\int_0^{\infty} \Phi_1(\rho, s) J_1(\rho r) d\rho = 0 \quad \text{dla } r > l.$$

Wprowadzając zmianę zmiennych

$$(3.13) \quad r = lu, \quad \rho = l^{-1}v$$

oraz podstawienie

$$(3.14) \quad \mathcal{L}_1(v, s) = \frac{1}{v} \left[1 - \frac{s\bar{B}\bar{A}\bar{N}l^2}{(2\bar{N}+\bar{M}) \left[(m+v)^2 \bar{B}_1(\bar{N}+\bar{M}) - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N}+\bar{M}} v(m+v) \right]} \right]$$

układ (3.12) można przedstawić w następujący sposób:

$$(3.15) \quad \int_0^{\infty} \Phi_1(v, s) \mathcal{L}_1(v, s) J_1(uv) dv = f(u, s), \quad u < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \Phi_1(v, s) J_1(uv) dv = 0, \quad u > 1.$$

Tak więc mieszany warunek (2.2)₂ został sprowadzony do układu dualnych równań całkowych z funkcjami Bessela rzędu pierwszego. Postępując analogicznie w przypadku wyznaczania stanu odkształceń i naprężeń półprzestrzeni z brzegiem nieprzepuszczalnym, tzn. wykorzystując warunki (2.2)₁, (2.2)₂, (2.2') otrzymujemy następujący układ dualnych równań całkowych:

$$(3.16) \quad \int_0^{\infty} \Phi_2(v, s) \mathcal{L}_2(v, s) J_1(uv) dv = f(u, s), \quad u < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \Phi_2(v, s) J_1(uv) dv = 0, \quad u > 1,$$

gdzie

$$(3.17) \quad \Phi_2(v, s) = \frac{v}{l} \left\{ \tilde{q}(v, s) - C_2 \left[\frac{m}{v} (\bar{N} + \bar{M}) \bar{B}_1 - \frac{2\bar{A}\bar{N}v(m+v)}{s\bar{B}(2\bar{N}+\bar{M})} \right] \right\},$$

$$f(u, s) = \frac{\bar{N}}{2\bar{N}+\bar{M}} \int_0^{\infty} \tilde{q}(v, s) G_2(v, s) J_1(uv) dv,$$

$$(3.17) \quad \text{[cd.]} \quad G_2(v, s) = 1 - \frac{\bar{A}s\bar{B}(m+2v)}{\bar{B}_1(\bar{N}+\bar{M})m(m+v)^2 - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N}+\bar{M}}v^2(m+v)},$$

$$\mathcal{L}_2(v, s) = \frac{1}{v} \left[1 - \frac{\bar{A}\bar{N}s\bar{B}}{(2\bar{N}+\bar{M}) \left[m(m+v)^2 \bar{B}_1(\bar{N}+\bar{M}) - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N}+\bar{M}}v^2(m+v) \right]} \right].$$

Rozwiązanie układów dualnych równań (3.15) i (3.16) może być dyskutowane wspólnie

$$(3.18) \quad \int_0^{\infty} \mathcal{L}(v, s) \Phi(v, s) J_1(uv) dv = f(u, s), \quad u < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \Phi(v, s) J_1(uv) dv = 0, \quad u > 1,$$

gdzie

$$(3.19) \quad \mathcal{L}(v, s) = \begin{cases} \mathcal{L}_1(v, s) & \text{dla brzegu przepuszczalnego,} \\ \mathcal{L}_2(v, s) & \text{dla brzegu nieprzepuszczalnego,} \end{cases}$$

$$\Phi(v, s) = \begin{cases} \Phi_1(v, s) & \text{dla brzegu przepuszczalnego,} \\ \Phi_2(v, s) & \text{dla brzegu nieprzepuszczalnego.} \end{cases}$$

Do rozwiązania układu (3.18) zastosujemy metodę Uflanda-Lebidiewa [8]. Poszukiwać będziemy niewiadomej funkcji

$$(3.20) \quad \Phi(v, s) = v \int_0^1 \varphi(\xi, s) \sin v\xi d\xi.$$

Wstawiając (3.20) do (3.18) po przekształceniach i wykorzystaniu własności całki Webera-Schafheitlina stwierdzamy, że równanie (3.18)₂ jest spełnione tożsamościowo. Równanie (3.18)₁ daje się sprowadzić do równania Schlömilcha, którego rozwiązanie ma postać

$$(3.21) \quad \varphi(u, s) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi(\xi, s) K(u, \xi, s) d\xi = \frac{1}{u} F(u, s),$$

gdzie

$$K(u, \xi, s) = \bar{H}(\xi - u, s) - \bar{H}(\xi + u, s),$$

$$(3.22) \quad H(\xi \mp u, s) = \int_0^{\infty} M(v, s) \cos v(\xi \mp u) dv,$$

$$M(v, s) = \begin{cases} M_1(v, s) & \text{dla brzegu przepuszczalnego,} \\ M_2(v, s) & \text{dla brzegu nieprzepuszczalnego,} \end{cases}$$

$$(3.22) \quad M_1(v, s) = \frac{s\bar{B}\bar{A}\bar{N}I^2}{(2\bar{N}+\bar{M}) \left[(m+v)^2 \bar{B}_1(\bar{N}+\bar{M}) - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N}+\bar{M}} v(m+v) \right]},$$

$$M_2(v, s) = \frac{s\bar{B}\bar{A}\bar{N}I^2}{(2\bar{N}+\bar{M}) \left[(m+v)m\bar{B}_1(\bar{N}+\bar{M}) - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N}+\bar{M}} v(m+v) \right]},$$

$$v\mathcal{L}(v, s) = 1 - M(v, s),$$

$$F(u, s) = \frac{2}{\pi} \left[f_1(0, s) + u \int_0^{\pi/2} f_1'(u \sin \theta, s) d\theta \right],$$

$$f_1(u, s) = uf(u, s).$$

Równanie (3.21) jest równaniem Fredholma drugiego rodzaju z jądrem ciągłym i ograniczonym co wynika z (3.22)₂. Wykorzystując symetrię jądra $K(u, \xi, s)$ oraz nieparzystość $\varphi(u, s)$ równanie (3.21) przedstawimy w postaci

$$(3.23) \quad \varphi(u, s) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\xi, s) H(\xi - u, s) d\xi = \frac{1}{u} F(u, s).$$

Znajdując stąd $\varphi(\xi, s)$ a następnie z (3.20) $\Phi(v, s)$ układ równań całkowych zostanie rozwiązany. Skomplikowana postać jądra równania (3.23) nie pozwala uzyskać rozwiązania ściślego w postaci zamkniętej. Możemy jednak dokonać analizy własności rozwiązania, zarówno bowiem jądro $H(\xi - u, s)$ równania (3.23) jak i $\frac{1}{u} F(u, s)$ są funkcjami ciągłymi i całkowalnymi z kwadratem. Stąd możemy wnosić o regularności funkcji $\varphi(u, s)$. Najefektywniejszą metodą rozwiązania równań wydaje się być metoda ortogonalizacji. Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$(3.24) \quad \varphi(u, s) = \sum_{n=0}^N a_n(s) P_n(u),$$

gdzie $P_n(u)$ jest układem zupełnym funkcji ortogonalnych na przedziale $\langle -1, 1 \rangle$, a

$$\varphi(u, s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(u, s).$$

Podstawiając (3.21) do (3.23) i mnożąc równość (3.23) kolejno przez $P_i(u)$ dla $i = 1, 2, \dots, N$, całkując względem u w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ otrzymujemy układ równań liniowych algebraicznych z niewiadomymi współczynnikami $a_n(s)$ w postaci

$$(3.25) \quad \sum_{n=0}^N A_{mn}(s) a_n(s) = B_m(s),$$

gdzie

$$A_{ij}(s) = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(\xi, u, s) P_i(\xi) P_j(u) du d\xi \quad \text{dla } i \neq j,$$

$$A_{kk}(s) = \int_{-1}^1 P_i^2(u) du - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(\xi, u, s) P_k(\xi) P_k(u) du d\xi \quad \text{dla } i=j,$$

$$B_m(s) = \int_{-1}^1 \frac{1}{u} F(u, s) P_n(u) du.$$

Wzory Cramera pozwalają efektywnie obliczyć współczynniki $a_n(s)$. W rozważanym zadaniu interesujące są rozkłady naprężeń stycznych w obszarze obciążenia brzegu półprzestrzeni i osiadanie brzegu półprzestrzeni.

Wykorzystując (3.18)₂ dla $u < 1$ wyznaczyć można transformatę Laplace'a rozkładu naprężeń σ_{rz} na części brzegu półprzestrzeni pozostającej pod obciążeniem. Ma ona postać:

$$(3.26) \quad \bar{\sigma}_{rz}(u, 0, s) \Big|_{u < 1} = \int_0^{\infty} u \left[\int_0^1 \varphi(\xi, s) \sin v\xi d\xi \right] J_1(uv) dv = \\ = - \frac{d}{du} \int_0^{\infty} \left[\int_0^1 \varphi(\xi, s) \sin v\xi d\xi \right] J_0'(uv) dv = - \frac{d}{du} \int_u^1 \frac{\varphi'(\xi, s)}{\sqrt{\xi^2 - u^2}} d\xi,$$

gdzie $\varphi(\xi, s)$ jest rozwiązaniem równania (3.23).

Z otrzymanych rezultatów wynika, że naprężenia $\sigma_{rz}(u, 0, s)$ są funkcjami słaboosobliwymi w punkcie $(1, 0, s)$, tzn. na końcu przedziału obciążenia.

Korzystając z (3.2)₂ dla $z=0$ mamy

$$(3.27) \quad \tilde{w}(\rho, 0, s) = C_4 \frac{\bar{A}C_2 m}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})}.$$

Podstawiając wyrażenia otrzymane z (3.9)₃ za C_4 i otrzymane z (3.11)₁ za C_2 w przypadku rozważań dotyczących półprzestrzeni z brzegiem przepuszczalnym po zmianie zmiennych wg (3.13) i podstawieniu za $\Phi(v, s)$ wg (3.20) mamy

$$(3.28) \quad \tilde{w}(v, 0, s) = \frac{-\bar{q}(v, s) (2\bar{N} + \bar{M}) \bar{B} \frac{k}{\gamma}}{2\bar{N}vI^{-1} \left[\bar{B}_1(\bar{N} + \bar{M}) - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \frac{v}{m+v} \right]} + \\ + \frac{I^2 \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{2\bar{A}}{2\bar{N} + \bar{M}} \frac{\bar{B}}{m+v} \right) \int_0^1 \varphi(\xi, s) \sin v\xi d\xi}{2v \left[\bar{B}_1(\bar{N} + \bar{M}) - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \frac{v}{m+v} \right]}.$$

gdzie $\varphi(\xi, s)$ jest rozwiązaniem (3.23).

Dla półprzestrzeni z brzegiem nieprzepuszczalnym związek określający transformatę przemieszczenia brzegu ma postać

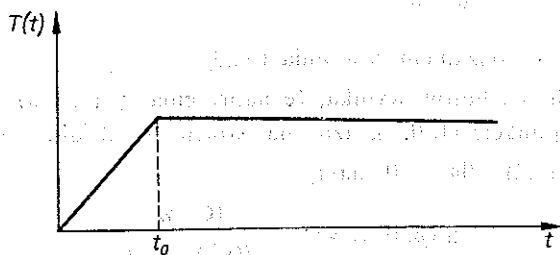
$$(3.29) \quad \tilde{w}(v, 0, s) = \frac{-\tilde{q}(v, s) \frac{m}{v} (2\bar{N} + \bar{M}) \bar{B} \frac{k}{\gamma}}{2\bar{N}v l^{-1} \left[\frac{m}{v} (\bar{N} + \bar{M}) \bar{B}_1 - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \frac{v}{m+v} \right]} + \frac{\left(\frac{3n}{\alpha_w} \cdot \frac{m}{v} + \frac{2\bar{A}}{2\bar{N} + \bar{M}} \frac{v}{m+v} \right) l^2 \int_0^1 \varphi(\xi, s) \sin v\xi d\xi}{2v \left[\bar{B}_1 (\bar{N} + \bar{M}) \frac{m}{v} - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \frac{v}{m+v} \right]}$$

4. PRZYKŁAD LICZBOWY

Dla pełnej analizy rozważanych zadań wykonano przykład liczbowy, w którym przyjęto obciążenie brzegu obszaru w postaci

$$q(r, t) = T(t) q_0(r),$$

gdzie $T(t)$ przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2

Przyjęta postać funkcji $T(t)$ z wystarczającą dla zastosowań dokładnością aproksymuje rzeczywisty przebieg przyłożenia obciążenia na grunt. t_0 jest czasem, w którym zostaje przyłożone całkowite obciążenie. W obliczeniach przyjęto $t_0 = 1, 15, 30, 100$ dni. Parametry charakteryzujące własności fizyczne ośrodka zaczerpnięto z prac [7, 9]. Mają one charakter orientacyjny i aproksymują jedynie własności pewnej grupy gruntów gliniastych.

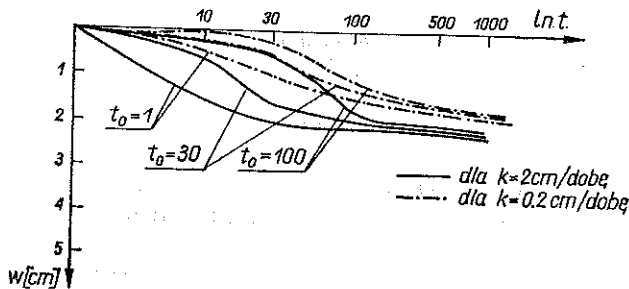
Przykład liczbowy podano dla szkieletu sprężystego. Uwzględnienie reologii ośrodka w przykładach liczbowych nie przedstawia merytorycznych trudności. Do obliczenia retransformat Laplace'a i Hankela zastosowano metodę wielomianów interpolacyjnych podaną w pracach [5, 6]. Rozwiązanie równania całkowego uzyskano metodą ortogonalizacji przyjmując jako układ funkcji $\{P_n(u)\}$ układ wielomianów Legendre'a.

Parametry charakteryzujące własności ośrodka przyjęto następujące: $l=500$ cm, $n=0,4$, $A=20$ kG/cm², $M=83,33$ kG/cm², $N=125$ kG/cm², $\alpha_w=6 \cdot 10^4$ kG/cm², $k=2 \cdot 10^{-1}$ cm/dobę, $k=2$ cm/dobę, $q_0=1$ kG/cm².

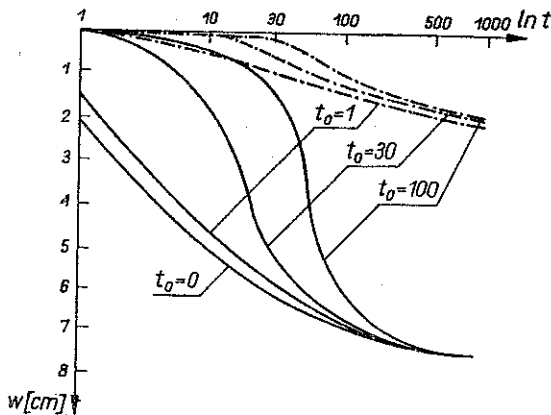
Obliczenia wykonano na komputerze CYBER 72. Otrzymane rezultaty zostały zilustrowane na wykresach. Sporządzone zostały wykresy obrazujące przemieszczenie brzegu półprzestrzeni dla różnych prędkości obciążenia i różnych współczynników filtracji.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Otrzymane rezultaty jakościowe i prezentowany przykład liczbowy pozwoliły porównać wartości przemieszczeń brzegu półprzestrzeni z wynikami podanymi w pracy [3], gdzie przyjęto jednorodny warunek brzegowy dla naprężeń stycznych.



Rys. 3. Wykres przemieszczeń brzegu półprzestrzeni dla różnych współczynników filtracji dla $r=0$; brzeg przepuszczalny



Rys. 4. --- przemieszczenia brzegu półprzestrzeni bez uwzględnienia ściepienia, — przemieszczenia brzegu półprzestrzeni z uwzględnieniem ściepienia. Wykres przemieszczeń brzegu półprzestrzeni dla różnych prędkości obciążenia $r=0$, $k=0,2$ cm/dobę, brzeg przepuszczalny

Miało to na celu analizę wpływu ściepienia na przemieszczenia brzegu półprzestrzeni. Różnice ilościowe obrazuje Rys. 4. Widoczne jest znaczne zmniejszenie przemieszczeń brzegu w przypadku rozważania zadania ze ściepieniem.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. A. BIOT, *General theory of three-dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., 12, 1941.
2. W. DERSKI, *On application of dual integral equations in theory of consolidation* [in Polish], I Symp. Reologii, Wrocław 1966.
3. J. GASZYŃSKI, G. SZEFER, *Consolidation of a viscoelastic halfspace under axial-symmetrical load*, Studia Geotechniki, 1974.
4. J. GASZYŃSKI, G. SZEFER, *Consolidation of viscoelastic halfspace loaded by a concentrated force* [in Polish] Rozpr. Inżyn., 23, 3, 1975.
5. V. I. KRYLOW, L. G. KRUGLIKOWA, *Handbook of numerical harmonic analysis* [in Russian], Izd. Nauka and Technika, Mińsk 1968.
6. V. I. KRYLOW, N. S. SKOBIA, *Handbook of numerical inversion of the Laplace's transform* [in Russian], Izd. Nauka and Technika, Mińsk 1968.
7. S. R. MESTCHIAN, *Creeping of clay soils* [in Russian], Izd. Akadem. Nauk, ASSR Erevan 1967.
8. J. S. UFLAND, *Integral transforms in problems of theory of elasticity* [in Russian], Leningrad 1968.
9. J. U. K. ZARETSKY, *Theory of soil consolidation* [in Russian], Moscow 1967.

Резюме

КОНСОЛИДАЦИЯ ВЯЗКО-УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА СЦЕПЛЕНИЯ

В работе дается точное решение осесимметричной задачи консолидации вязко-упругого полупространства под нормальной нагрузкой действующей на границе с граничными условиями типа сцепления. Задача сформулирована и решена на грунте трехмерной, линейной теории консолидации Биота для разных случаев проницаемости границы полупространства. Полученные результаты иллюстрируются числовыми примерами.

SUMMARY

CONSOLIDATION OF VISCOELASTIC HALFSPACE WITH BOUNDARY CONDITIONS OF COHESIVE TYPE

The exact solution of axially-symmetric problem of consolidation of visco-elastic halfspace subject to normal load acting on the boundary with boundary conditions of cohesive type is presented. The problem was formulated and solved on the ground of the three-dimensional linear Biot's theory of consolidation for different cases of permeability of the boundary of the halfspace. The results obtained are illustrated by numerical examples.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 maja 1977 r.