

ANALIZA POLA PRZEMIESZCZEŃ I NAPRĘŻEŃ W WARSTWOWEJ PÓLPRZESTRZENI LEPKOSPĘŻYSTEJ PRZY ZASTOSOWANIU METODY PRZYROSTOWEJ

BOŻENA B U D K O W S K A (GDAŃSK)

W niniejszej pracy przeprowadzono analizę lepkospężystej półprzestrzeni wielowarstwowej. Związek między objętościowymi składowymi naprężenia i odkształcenia jest sprężysty, a składowe dewiatora naprężenia i odkształcenia są związane równaniem konstytutywnym, odpowiadającym standardowemu modelowi lepkospężystemu. Wyprowadzono związki naprężenie-odkształcenie dla zagadnienia osiowo-symetrycznego. Do obliczenia różnych zagadnień praktycznych zastosowano metodę elementów skończonych. Do określenia wartości przemieszczeń w czasie wykorzystano macierzową postać (3.13) równania lepkospężystości. Równanie podstawowe rozwiązano metodą iteracji na każdym kroku czasowym. Następnie wyprowadzono równanie macierzowe (3.16) w celu obliczenia naprężeń. Przygotowano program obliczeń i przedstawiono wyniki numeryczne dla prze-liczonego przykładu.

1. WSTĘP

Prowadzone od szeregu lat badania w celu właściwego określenia zależności naprężenia — odkształcenie — czas w ośrodkach jednorodnych [1, 4, 7, 8, 11, 16, 18, 19, 24, 26 i 27] oraz warstwowych [2, 3, 12 i 28] dostarczają bogatego materiału doświadczalnego. Zachowanie się gruntów i asfaltów w czasie zależy od wielu czynników takich, jak rodzaj materiału, historia naprężenia i obciążenia, temperatura i inne. Określając własności reologiczne ośrodka przyjmuje się zazwyczaj pewien model reologiczny złożony z układu sprężyn i tłumików [17, 20 i 23].

W niniejszym artykule rozpatrzono warstwowy ośrodek, w którym każda z warstw reprezentowana jest przez model standardowy. Równanie funkcji naprężenie—odkształcenie podane jest najpierw w formie ogólnej przy zastosowaniu zapisu tensorowego, a następnie wykorzystano procedurę typową dla metody elementów skończonych [5, 6, 13, 22, 25 i 29] i podano równanie obciążenie—przemieszczenie w postaci macierzowej dla dowolnej warstwy. Względem zmiennych czasowych zastosowano metodę różnic skończonych. Mając na uwadze spotykane najczęściej przypadki obciążenia rozpatrzono zagadnienie warstwowej półprzestrzeni osiowo-symetrycznej. Dla przedstawionego zagadnienia opracowano program w języku ALGOL na ODRĘ 1204. Podano wyniki przykładu liczbowego otrzymanego za pomocą tego programu.

2. CHARAKTERYSTYKA OŚRODKA WARSTWOWEGO ORAZ RÓWNIANIE
NAPRĘŻENIE-ODKSZTAŁCENIE DLA PROBLEMU OSIOWO-SYMETRYCZNEGO

Rozpatrujemy półprzestrzeń warstwową o parametrach materiałowych niezmiennych w czasie i w przestrzeni, w odniesieniu do każdej z warstw. Zakładamy następnie, że związek między tensorami kulistymi naprężenia i odkształcenia jest wg [2, 20] sprężysty,

$$(2.1) \quad \delta_j^i = \frac{E}{3(1-2\nu)} \delta_j^i \varepsilon_i^i,$$

gdzie E oznacza moduł Younga, ν współczynnik Poissona, δ_j^i deltę Kroneckera, δ_j^i tensor kulisty naprężenia oraz ε_i^i tensor kulisty odkształcenia.

Dewiatory naprężenia i odkształcenia związane są zależnością charakterystyczną dla modelu standardowego:

$$(2.2) \quad \bar{\sigma}_j^i = \frac{Q_1(D)}{P_1(D)} \left(\varepsilon_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i \varepsilon_r^r \right),$$

gdzie $\bar{\sigma}_j^i$ oznacza dewiator naprężenia, $\left(\varepsilon_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i \varepsilon_r^r \right)$ dewiator odkształcenia, $Q_1(D)$, $P_1(D)$ oznaczają pewne różniczkowe operatory, $D = \partial/\partial t$ oraz gdzie

$$(2.3) \quad \sigma_j^i = \bar{\sigma}_j^i + \delta_j^i.$$

Dla modelu standardowego (rys. 1) zgodnie z [20] operatory $Q_1(D)$ i $P_1(D)$ przedstawiają się następująco:

$$(2.4) \quad Q_1(D) = 2 \left(G + \eta \frac{d}{dt} \right),$$

$$P_1(D) = 1 + \tau \frac{d}{dt},$$

gdzie G jest modulem odkształcenia postaciowego oraz

$$(2.5) \quad 2\eta = \frac{\eta_1 (\dot{E} + E_1)}{E_1},$$

$$(2.6) \quad \tau = \frac{\eta_1}{E_1}.$$

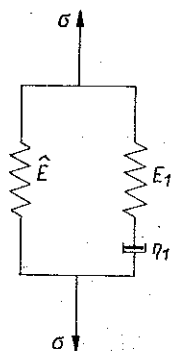
Celem otrzymania równań dla problemu osiowo-symetrycznego przyjmujemy walcowy układ współrzędnych, w którym położenie punktu jest opisane za pomocą wektora-promienia wodzącego \mathbf{R} w sposób następujący:

$$(2.7) \quad \mathbf{R} = X^1 \cos X^2 \mathbf{i}_1 + X^1 \sin X^2 \mathbf{i}_2 + X^3 \mathbf{i}_3,$$

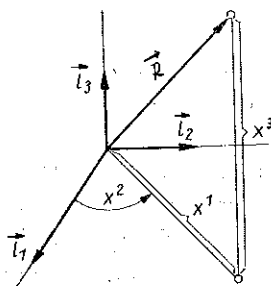
gdzie $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ są wersorami w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Dla równania (2.7) wektory podstawowe $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ przyjmują postać

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \cos X^2 \mathbf{i}_1 + \sin X^2 \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{g}_2 &= -X^1 \sin X^2 \mathbf{i}_1 + X^1 \cos X^2 \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$



Rys. 1



Rys. 2

Tensor metryczny walcowego układu współrzędnych X^1, X^2, X^3 przedstawiamy za pomocą następującej tablicy:

$$(2.9) \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (X^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tensor odkształcenia wg teorii liniowej ma postać

$$(2.10) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i}),$$

gdzie $u_{i|j}$ oznacza pochodną kowariantną składowej u_i wektora przemieszczenia \mathbf{u}

W zagadnieniu osiowo-symetrycznym w walcowym układzie współrzędnych wektor przemieszczenia \mathbf{u} przedstawiamy w następującej postaci:

$$(2.11) \quad \mathbf{u} = u^1 \mathbf{g}_1 + u^3 \mathbf{g}_3.$$

Po podstawieniu (2.11) do (2.10) składowe tensora odkształcenia można przedstawić za pomocą następującej tablicy:

$$(2.12) \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) - \Gamma_{12}^2 u_2 & \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \text{sym} & u_{2,2} - \Gamma_{22}^1 u_1 & \frac{1}{2} (u_{2,3} + u_{3,2}) \\ & & u_{3,3} \end{pmatrix},$$

gdzie przecinek oznacza zwykle różniczkowanie odpowiednio względem zmiennych X^1, X^2 , lub X^3 , Γ jest symbolem Christoffela II rodzaju. Przedstawiając wzory (2.1),

(2.2), (2.3) w zależności od składowych tensorów kowariantnych naprężenia i kontrawariantnych odkształcenia, otrzymujemy równanie opisujące zagadnienie lepko-sprężystego ośrodka w problemie osiowo-symetrycznym w postaci

$$(2.13) \quad \sigma^{ik} = \left\{ \frac{Q_1(D)}{P_1(D)} \left[g^{ir} g^{ks} - \frac{1}{3} g^{ik} g^{rs} \right] + \frac{E}{3(1-2\nu)} g^{ik} g^{rs} \right\} \varepsilon_{rs},$$

$$i, r, k, s = 1, 2, 3.$$

3. NUMERYCZNE UJĘCIE WARSTWOWEJ PÓLPRZESTRZENI DLA PRZYPADKU OSIOWO-SYMETRYCZNEGO

Mając na uwadze numeryczne sformułowanie zagadnienia dokonujemy dyskretyzacji półprzestrzeni. Dzielimy ją mianowicie na torusy o przekroju trójkątnym. Ze względu na osiową symetrię rozpatrujemy zagadnienia płaskie, w którym każdy trójkąt ma objętość torusa. Funkcja kształtu wg [5, 6 i 29] jest liniową kombinacją współrzędnych punktów węzłowych trójkąta i, j, k . Przemieszczenie punktów węzłowych opisane jest za pomocą wektora $\{u\}_e$ związanego z danym elementem e , który przedstawiamy w postaci:

$$(3.1) \quad \{u\}_e = \begin{Bmatrix} u^1(i) \\ u^3(i) \\ u^1(j) \\ u^3(j) \\ u^1(k) \\ u^3(k) \end{Bmatrix}.$$

Macierz odkształcenia $[B]$ otrzymuje się z połączenia (3.1) i (2.12). Wektor odkształcenia $\{\varepsilon\}_e$ związany z elementem e o składowych ε_i , wyraża się w następującej postaci:

$$(3.2) \quad \{\varepsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix}.$$

Naprężenia panujące w każdym elemencie przedstawiamy za pomocą wektora $\{\sigma\}_e$ o składowych σ^{ij}

$$(3.3) \quad \{\sigma\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{33} \\ \sigma^{13} \end{Bmatrix}.$$

Zgodnie z metodą elementów skończonych między naprężeniem i odkształceniem istnieje zależność, którą można przedstawić w zapisie macierzowym w następujący sposób:

$$(3.4) \quad \{\sigma\}_e = [D] \{\varepsilon\}_e,$$

gdzie $[D]$ jest tutaj ogólną macierzą lepkości. Obciążenie zewnętrzne przedstawiamy za pomocą wektora $\{P\}_e$ związanego z węzłami elementu. Wykorzystując zasadę minimalizacji energii potencjalnej ośrodka otrzymujemy równanie wiążące wektor obciążeń zewnętrznych z wektorem przemieszczeń węzłowych elementu w postaci:

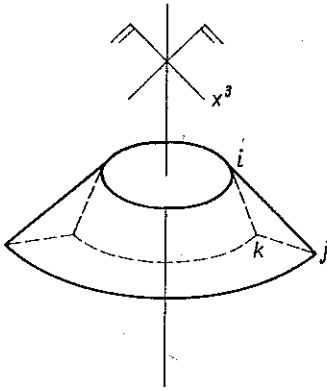
$$(3.5) \quad [K] \{u\}_e = \{P\}_e,$$

gdzie $[K]$ jest macierzą sztywności elementu.

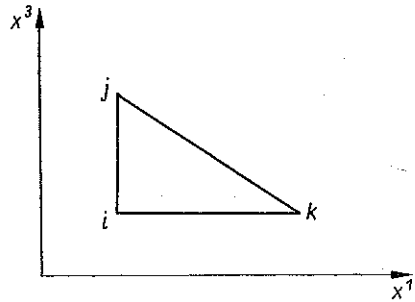
Macierz $[K]$ ma postać

$$(3.6) \quad [K] = \int_a [B]^T [D] [B] dV,$$

gdzie $\int_a dV$ oznacza całkowanie po objętości torusa (rys. 3).



Rys. 3



Rys. 4

Uwzględniając równania (2.13) i (3.4), napiszemy równanie (3.6) w postaci

$$(3.7) \quad [K] = \int_a [B]^T \left(\frac{Q_1(D)}{P_1(D)} [D_1] + \frac{E}{3(1-2\nu)} [D_2] \right) [B] dV,$$

gdzie $[D_1]$ i $[D_2]$ są macierzami sprężystości związanymi odpowiednio z cechami lepkości i sprężystymi elementu.

Wprowadzając (2.4) do (3.7), a następnie (3.7) do (3.5) otrzymujemy

$$(3.8) \quad \left\{ 2 \left(G + \eta \frac{d}{dt} \right) [K_1] + \left(1 + \tau \frac{d}{dt} \right) \frac{E}{3(1-2\nu)} [K_2] \right\} \{u\}_e = \left(1 + \tau \frac{d}{dt} \right) \{P\}_e.$$

W równaniu (3.8) różniczkowanie względem czasu związane jest z wektorem przemieszczenia $\{u\}_e$ i obciążenia $\{P\}_e$. Macierze $[K_1]$ i $[K_2]$ są następującymi macierzami sztywności:

$$(3.9) \quad [K_1] = \int_a [B]^T [D_1] [B] dV,$$

$$(3.10) \quad [K_2] = \int_a [B]^T [D_2] [B] dV.$$

Postać rozwinięta równania (3.8) jest następująca:

$$(3.11) \quad 2G [K_1] \{u\}_e + 2\eta [K_1] \frac{d}{dt} \{u\}_e + \frac{E}{3(1-2\nu)} [K_2] \{u\}_e + \\ + \frac{E\tau}{3(1-2\nu)} [K_2] \frac{d}{dt} \{u\}_e = \{P\}_e + \tau \frac{d}{dt} \{P\}_e.$$

W celu określenia zmienności rozkładu przemieszczeń i naprężeń w czasie — wprowadzamy do (3.11) wzory metody różnic skończonych, definiując w następujący sposób

$$(3.12) \quad \frac{d}{dt} \{u\} = \frac{d}{dt} \{u_{n+\frac{1}{2}}\} \approx \frac{1}{\Delta t} (\{u_{n+1}\} - \{u_n\}), \\ \frac{d}{dt} \{P\} = \frac{d}{dt} \{P_{n+\frac{1}{2}}\} \approx \frac{1}{\Delta t} (\{P_{n+1}\} - \{P_n\}), \\ \{u\} = \{u_{n+\frac{1}{2}}\} = \frac{\{u_{n+1}\} + \{u_n\}}{2}, \\ \{P\} = \{P_{n+\frac{1}{2}}\} = \frac{\{P_{n+1}\} + \{P_n\}}{2},$$

gdzie indeksy $n+1$ oraz n oznaczają chwile czasowe t_{n+1} i t_n różniące się o Δt . Podstawiając prawe strony (3.12) do (3.11), otrzymujemy równanie metody elementów skończonych określające przemieszczenia w dowolnej chwili t_{n+1} :

$$(3.13) \quad \left\{ (G\Delta t + 2\eta) [K_1] + \left(\frac{\Delta t}{2} + \tau \right) \frac{E}{3(1-2\nu)} [K_2] \right\} \{u_{n+1}\}_e = \\ = \{P_{n+1}\}_e \left(\frac{\Delta t}{2} + \tau \right) + \{P_n\}_e \left(\frac{\Delta t}{2} - \tau \right) - \left\{ (G\Delta t - 2\eta) [K_1] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\Delta t}{2} - \tau \right) \frac{E}{3(1-2\nu)} [K_2] \right\} \{u_n\}_e.$$

Należy zwrócić uwagę, że macierze $[K_1]$ i $[K_2]$ są lokalnymi macierzami sztywności, związanymi z własnościami poszczególnych elementów. Ponieważ rozpatruje się ośrodek warstwowy, przeto celowo wyłączono przed macierze sztywności czynniki związane z charakterystyką materiałową ośrodka. Dla całości zagadnienia równania (3.13) przyjmuje postać:

$$(3.14) \quad \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ (G_i \Delta t + 2\eta_i) [K_1]_i + \left(\frac{\Delta t}{2} + \tau_i \right) \frac{E_i}{3(1-2\nu_i)} [K_2]_i \right\} \{u_{n+1}\}_i = \\ = \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \left(\frac{\Delta t}{2} + \tau_i \right) \{P_{n+1}\}_i + \left(\frac{\Delta t}{2} - \tau_i \right) \{P_n\}_i - \left[(G_i \Delta t - 2\eta_i) [K_1]_i + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\Delta t}{2} - \tau_i \right) \frac{E_i}{3(1-2\nu_i)} [K_2]_i \right] \{u_n\}_i \right\},$$

gdzie $\sum_{i=1}^{n_1}$ sygnalizuje globalną macierz sztywności dla n_1 elementów. Wektory przemieszczeń $\{u_{n+1}\}$ oraz $\{u_n\}$ opisują przemieszczenia wszystkich zdyskretyzowanych punktów węzłowych dla czasu t_{n+1} i t_n .

Proces wyznaczania pola przemieszczeń $\{u_{n+1}\}$ rozpoczynamy przy założeniu, że w chwili początkowej $t=+0$ wektory $\{u_{t=+0}\}=\{0\}$ oraz $\{P_{t=+0}\}=\{0\}$. Mając obliczone dla każdego kroku iteracyjnego $\{u_{n+1}\}$, można wyznaczyć zgodnie z (3.14) przemieszczenia w pośrednich punktach czasowych.

Biorąc pod uwagę (3.7), dokonujemy w (3.4) rozłożenia $[D]$ na część związaną z cechami lepkosprężystymi i sprężystymi. Wtedy (3.4) przybierze postać

$$(3.15) \quad \{\sigma\}_e = \left[\frac{Q_1(D)}{P_1(D)} [D_1] + \frac{E}{3(1-2\nu)} [D_2] \right] [B] \{u\}_e.$$

Uwzględniając (2.4) oraz wykorzystując wzory (3.12) do (3.15) otrzymujemy równanie opisujące rozkład naprężeń w dowolnej chwili t_{n+1} w każdym elemencie półprzestrzeni w postaci:

$$(3.16) \quad \{\sigma_{n+1}\}_e = \frac{1}{\left(\frac{\Delta t}{2} + \tau\right)} \left\{ \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \{\sigma_n\}_e + \left[(G\Delta t + 2\eta) [S_1] + \left(\frac{\Delta t}{2} + \tau \right) \frac{E}{3(1-2\nu)} [S_2] \right] \{u_{n+1}\}_e + \left[(G\Delta t - 2\eta) [S_1] + \left(\frac{\Delta t}{2} - \tau \right) \frac{E}{3(1-2\nu)} [S_2] \right] \{u_n\}_e \right\},$$

gdzie

$$(3.17) \quad \begin{aligned} [S_1] &= [D_1] [B], \\ [S_2] &= [D_2] [B]. \end{aligned}$$

Rozwiązując przykłady liczbowe założono, że w chwili początkowej $t=+0$ $\{u_n\}=\{0\}$ oraz $\{\sigma_n\}=\{0\}$. W równaniu (3.16) podobnie jak w (3.14) wszystkie parametry materiałowe przedstawione są w sposób bezpośredni, aby podkreślić, że są one różne dla różnych elementów.

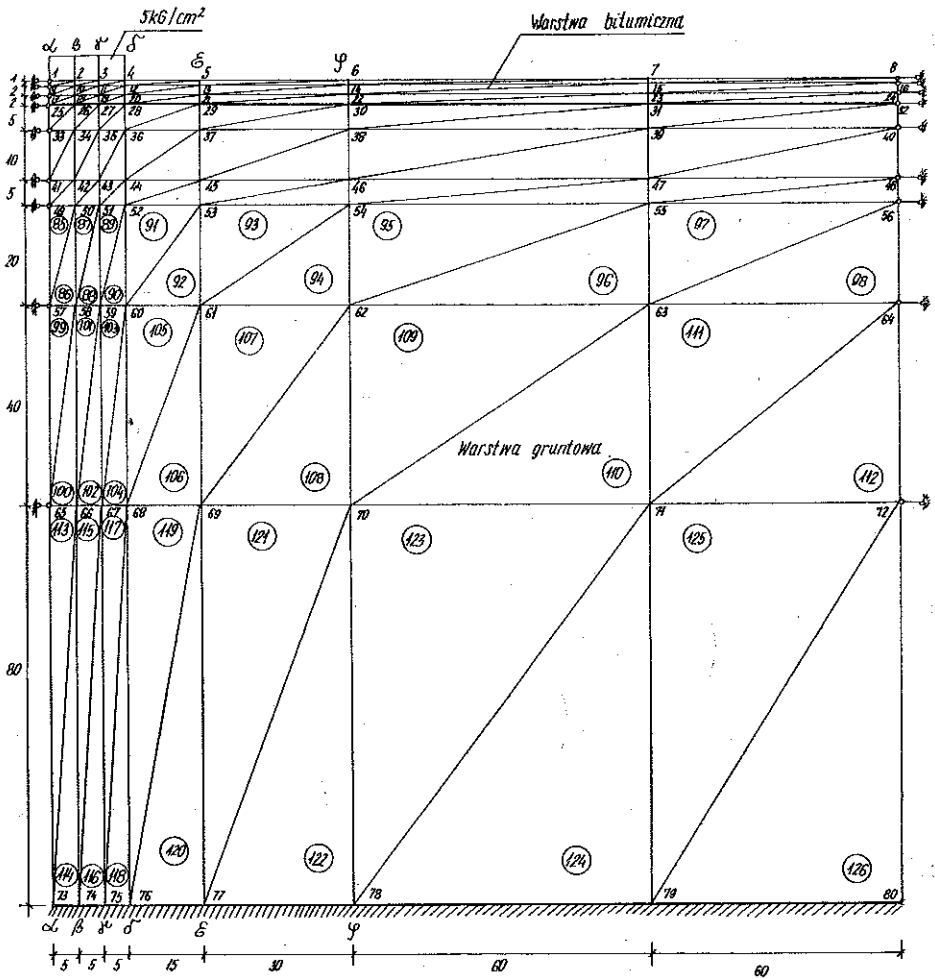
4. PRZYKŁAD LICZBOWY

W celu przedstawienia metody wyznaczania rozkładu przemieszczeń i naprężeń w czasie — ułożono program LEPITER ZMODYFIKOWANY na komputer ODRA 1204 w języku ALGOL 60.

Schemat geometryczny policzonego przykładu przedstawiony jest na rys. 5 i 6.

Opierając się na [14 i 21] przyjęto obciążenie równomiernie rozłożone o wartości 5 kG/cm² działające na powierzchni koła o promieniu 15 cm.

Warunki brzegowe są następujące: 1) na osi symetrii przemieszczenia poziome równe są zero; 2) na pionowej krawędzi ograniczającej, tzn. dla $X^1=X_{\max}^1$ prze-



Rys. 5. Schemat rozpatrywanej półprzestrzeni dla programu LEPITER zmodyfikowany

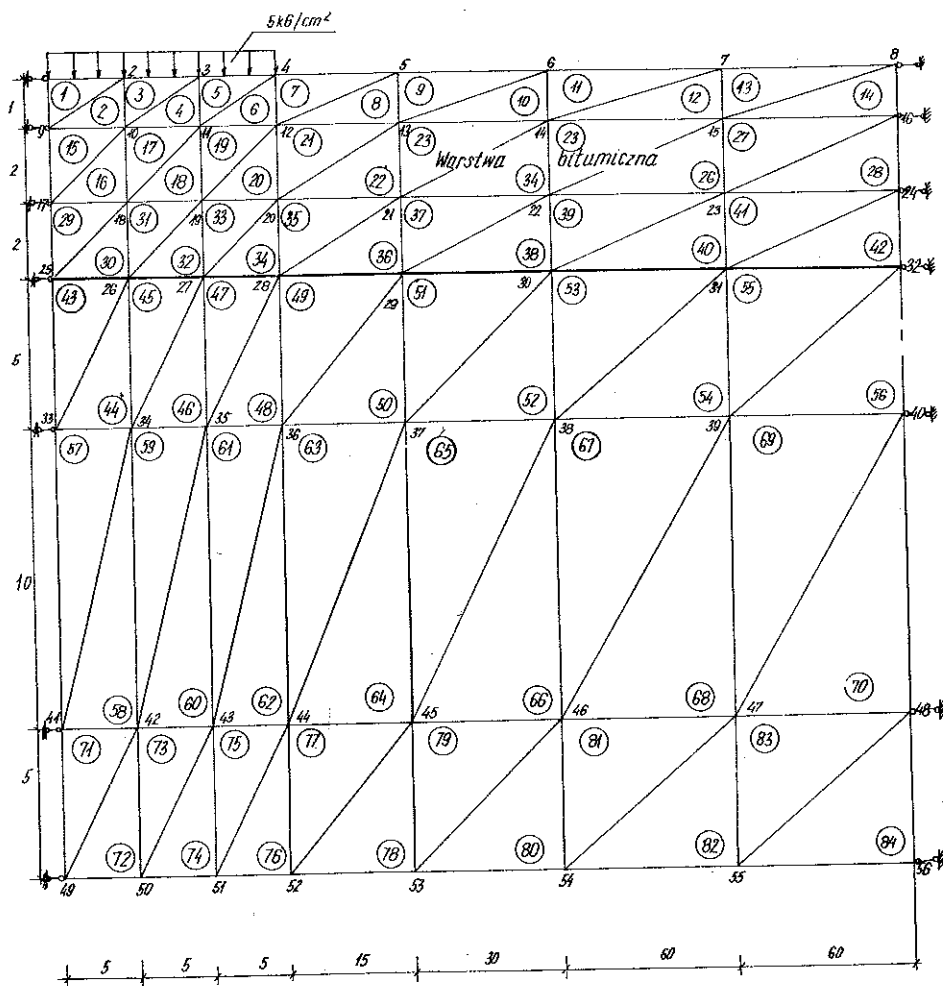
mieszczenia poziome są równe zero; 3) na dolnej krawędzi ograniczającej, tzn. dla $X^3 = X_{\max}^3$ przemieszczenia pionowe i poziome wynoszą zero.

Charakterystyka materiałowa poszczególnych warstw jest następująca:

Warstwa bitumiczna: moduł sprężystości Hooke'a $E=41000 \text{ kG/cm}^2$. Współczynnik Poissona $\nu=0$. Moduł odkształcenia postaciowego $2G=4130 \text{ kG/cm}^2$, $\tau=110 \text{ sek}$, $2\eta=1,405 \cdot 10^6 \text{ sek kG/cm}^2$, $E_1=8260 \text{ kG/cm}^2$ oraz $\dot{E}=4130 \text{ kG/cm}^2$.

Przyjmując powyższe dane opierano się na pracy [15]. Warstwa gruntowa: moduł sprężystości Hooke'a $E=510 \text{ kG/cm}^2$. Współczynnik Poissona $\nu=0$. Moduł odkształcenia postaciowego $2G=600 \text{ kG/cm}^2$, $\tau=30,7584 \cdot 10^6 \text{ sek}$, $2\eta=186,395904 \cdot 10^8 \text{ sek kG/cm}^2$, $E_1=6 \text{ kG/cm}^2$, $\dot{E}=600 \text{ kG/cm}^2$.

Założono, że lepkosprężysta warstwa gruntowa w przypadku zagadnienia jednowymiarowego ściskania — rozciągania zachowuje się z dużym przybliżeniem jak ośrodek sprężysty. Przyjęto, że dla $t=365 \text{ dni}$ założono jako $t=\infty$, przemieszczenia

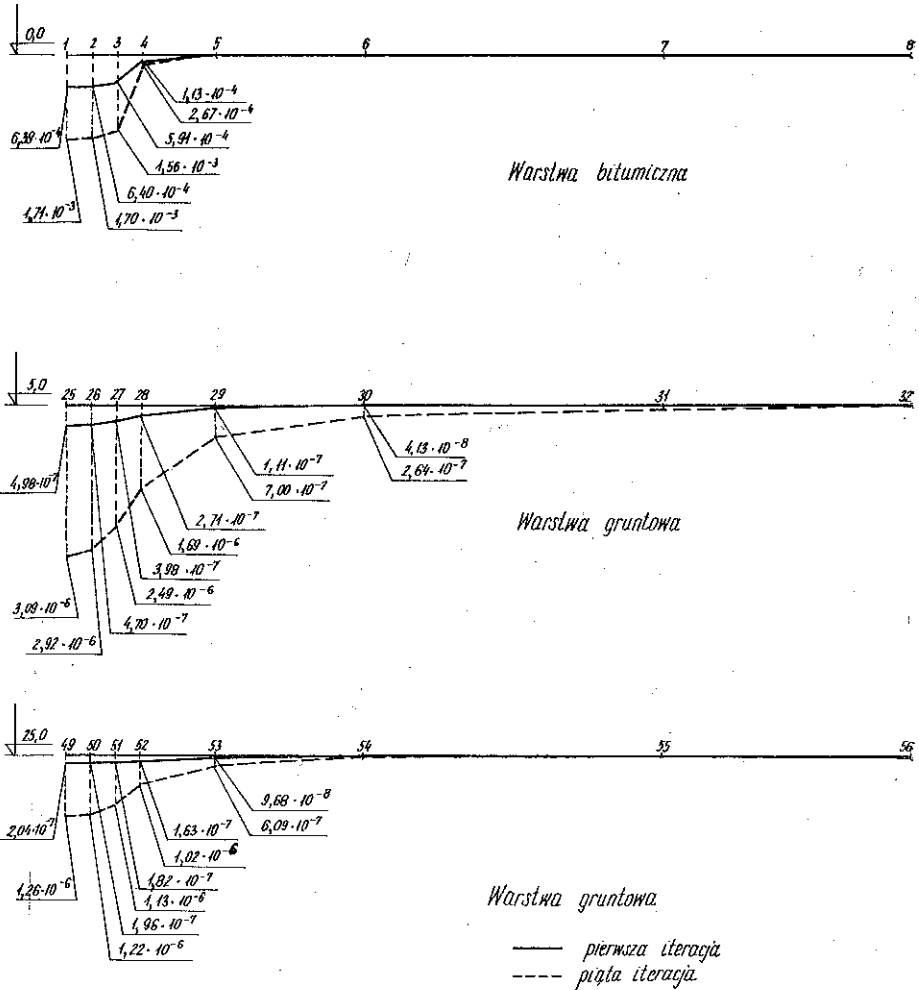


Rys. 6. Schemat rozpatrywanej półprzestrzeni — warstwa bitumiczna i gruntowa dla programu LEPITER zmodyfikowany (podział górnych warstw)

gruntu w stanie jednoosiowym są o 1 % większe w stosunku do przemieszczeń natychmiastowych.

Krok czasowy iteracji wynosi 100 sek, a ich liczba równa jest 5. Na podstawie uzyskanych wyników sporządzono wykresy przemieszczeń pionowych (rys. 7) i naprężeń $\sigma^{33} \equiv \sigma_z$ (rys. 8). Wykonując wykresy naprężeń $\sigma^{33} \equiv \sigma_z$ (rys. 8) dokonywano przekrojów poziomych przechodzących przez środki ciężkości odpowiednich trójkątów.

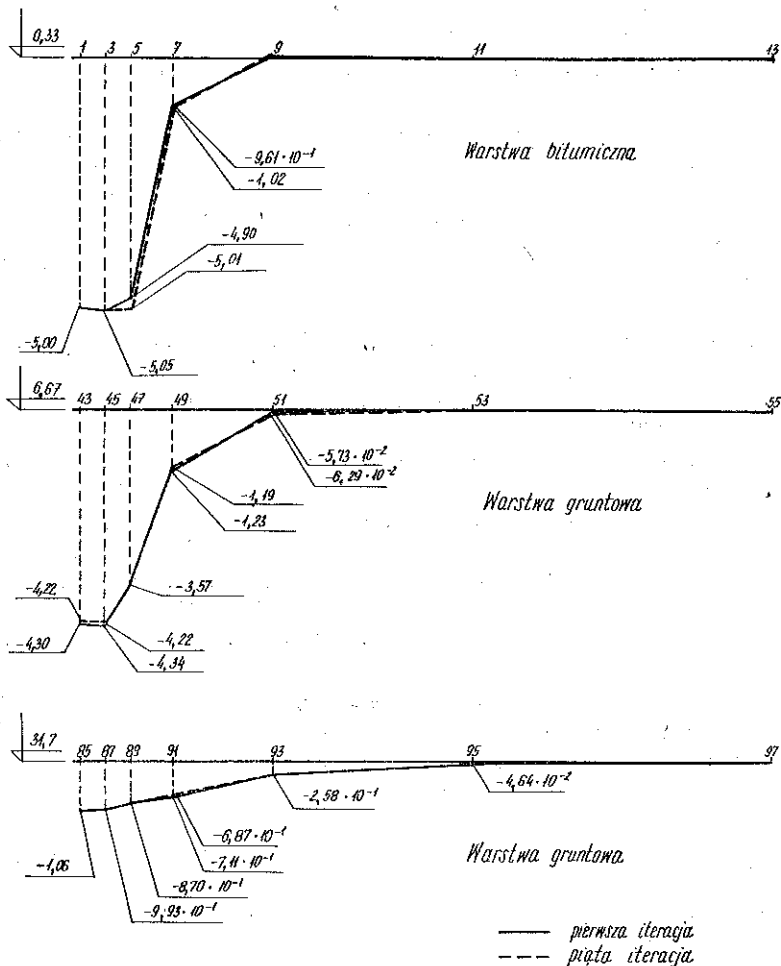
Autorka wykonała dalsze (nie zamieszczone w tej pracy) wykresy, obrazujące zmianę składowych pionowych $\{u\}$ w czasie dla wyszczególnionych punktów, które znajdują się na linii przekroju np. $\alpha - \alpha$, $\varphi - \varphi$ itd. Przemieszczenia te sporządzono dla wektora $\{u_{n+1}\}$, tzn. dla wektora przemieszczenia, który uzyskuje się jako rozwiązanie równania (3.16). Poszukiwany wektor $\{u_{n+\frac{1}{2}}\}$, wg (3.12)₃, po pierwszym



Rys. 7. Rozkład przemieszczeń pionowych dla pierwszego i piątego kroku czasowego w dwuwarstwowej półprzestrzeni; czasy pośrednie $t_{n+\frac{1}{2}}$

kroku iteracji wynosi dokładnie $\frac{1}{2} \{u_1\}$, a dla następnych kroków iteracyjnych jego składowe dążą dokładnie do określonych linii. W analizowanym przykładzie widoczne jest z wykresów, że przemieszczenia bitumu były nieliniowe, natomiast przemieszczenia gruntu zmieniały się we wszystkich wypadkach w zależności liniowej. Podczas wszystkich kroków iteracyjnych rozkład naprężeń wykazywał bardzo małe zmiany. Krok iteracji określała najmniejsza wartość parametru τ występującej w ośrodku warstwy.

Celem analizy zbieżności rozwiązania dla przyjętej w czasie dyskretyzacji wykonano następujące testy numeryczne: 1) zastosowanie różnic wstecznych względem równania (3.11); 2) dokonując na równaniu (3.11) transformacji Laplace'a, otrzymano rozwiązanie dla $t=+0$ i $t=\infty$; 3) zastosowanie różnic centralnych do ana-



Rys. 8. Rozkład naprężeń σ_z półprzestrzeni dwuwarstwowej po pierwszym i po piątym kroku iteracji

lizej jednowymiarowego modelu lepkosprężystego i porównanie wyników z rozwiązaniem ścisłym.

Przeprowadzone testy wskazywały na zbieżność wyników do właściwego rozwiązania.

Celem przykładu było zilustrowanie przedstawionej metody wyznaczania rozkładu przemieszczeń i naprężeń w warstwowym ośrodku lepkosprężystym.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. G. ANDERSON, R. D. WOODS, *Time dependent increase in shear modulus of clay*, Jour. Geotech. Eng. Div., May, 1976.
2. J. E. ASHTON, F. MOAVENZADEH, *Linear viscoelastic boundary value problems*, Jour. Eng. Mech. Div., January, 1968.

3. J. E. ASHTON, F. MOAVENZADEH, *Analysis of three-layer viscoelastic half-space*, Jour. Eng. Mech. Div., June, 1968.
4. Z. BAZANT, K. OZAYDIN, R. KRIZEK, *Micromechanics model for creep of anisotropic clay*, Jour. Eng. Mech. Div., February, 1975.
5. R. W. CLOUGH, Y. RASHID, *Finite element analysis of axi-symmetric solids*, Jour. Eng. Mech. Div., February, 1965.
6. Ch. S. DESAI, J. E. ABEL, *Introduction to the finite element method, A numerical method for engineering analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, New York-Cincinnati-Toronto-London-Melbourne 1972.
7. L. DOMASCHUK, N. H. WADE, *A study of bulk and shear moduli of a sand*, Jour. Soil Mech. Found. Div., March, 1969.
8. J. M. DUNCAN, Ch. Y. CHANG, *Nonlinear analysis of stress and strain in soils*, Jour. Soil Mech. Found. Div., September 1970.
9. W. FLÜGGE, *Viscoelasticity*, Blaisdell Publishing Company, Waltham—Massachusetts—Toronto—London 1967.
10. W. FLÜGGE, *Tensor analysis and continuum mechanics*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1972.
11. I. HOLUBEC, *Elastic behaviour of cohesionless soil*, Jour. Soil Mech. Found. Div., November, 1968.
12. Y. H. HUANG, *Stresses and displacements on nonlinear soil media*, Jour. Soil Mech. Found. Div., January, 1968.
13. W. M. JENKINS, *Matrix and digital computer methods in structural analysis*, Mc Graw-Hill, London 1969.
14. G. JEUFFROY, *Conception et construction des Chaussées*, Editions Eyrolles, Paris 1967.
15. J. JUDYCKI, *Analiza niektórych własności reologicznych drogowego betonu asfaltowego poddanego działaniu obciążeń statycznych*, praca doktorska, Gdańsk 1975.
16. V. K. KHOSKA, T. H. WU, *Stress-strain behaviour of sand*, Journ. Geotech. Eng. Div., April, 1976.
17. I. KISIEL, B. ŁYSIK, *Zarys reologii gruntów. Działanie obciążenia statycznego na grunt*, Arkady, Warszawa 1966.
18. F. KOMAMURA, R. J. HUANG, *New rheological model for soil behaviour*, Jour. Geotech. Eng. Div., July, 1974.
19. P. V. LADE, J. M. DUNCAN, *Cubical triaxial tests on cohesionless soil*, Jour. Soil. Mech. Found. Div., October, 1973.
20. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, Arkady, Warszawa 1963.
21. *Prace Centralnego Ośrodka Badań Rozwoju Techniki Drogowej*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1969.
22. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of matrix structural analysis*, Mac Graw Hill, New York 1968.
23. M. REINER, *Reologia teoretyczna*, PWN, Warszawa 1958.
24. A. SINGH, J. K. MITCHELL, *General stress-strain-time function for soils*, Jour. Soil Mech. Found. Div., January, 1968.
25. G. N. SMITH, *An introduction to matrix and finite element methods in civil engineering*, Applied Science Publishers, LTD, London 1971.
26. H. U. SMOLTczyk, *Stress computation in soil media*, Jour. Soil. Mech. Found. Div., March, 1968.
27. E. SOYDEMR, W. E. SCHMID, *Deformation and stability of viscoelastic soil media*, Jour. Soil. Mech. Found. Div., November, 1970.
28. K. UESHITA, G. G. MEYERHOF, *Deflection of multilayer soil systems*, Jour. Soil. Mech. Found. Div., September, 1967.
29. O. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

МЕТОД АНАЛИЗА В ПРИРОСТАХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ
В ВЯЗКОУПРУГОМ МНОГОСЛОИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей работе проведен анализ вязкоупругого, многослойного полупространства. Связь между объемными составляющими напряжения и деформации является упругой, а составляющие девиатора напряжения и деформации связаны определяющим уравнением, отвечающим стандартной вязкоупругой модели. Выведены соотношения напряжения деформация для осесимметричной задачи. Для расчета разных практических задач применен метод конечных элементов. Для определения значений перемещений во времени использован матричный вид (3.13) уравнения вязкоупругости. Основное уравнение решено методом итераций на каждом временном шагу. Затем выведено матричное уравнение (3.16) для расчета напряжений. Составлена программа расчетов и представлены численные результаты для рассчитанного примера.

SUMMARY

INCREMENTAL METHOD IN ANALYSIS OF DISPLACEMENTS AND STRESSES IN
LAYERED VISCOELASTIC HALF SPACE

In this paper the analysis of layered viscoelastic half space is performed. The relation between the volumetric components of stress and strain is elastic and the deviator components of stress and strain are related according to a rule characteristic for a standard model. The stress-strain equation for the axisymmetric problem is derived. To calculate any practical problem a finite element method is applied. Equation for viscoelastic problem in the matrix form (3.13) is used to receive the value of displacements in any time. The step-iterative method with respect to time is proposed for the basic equation. Then the matrix equation to calculate stresses (3.16) is derived. The computing program was prepared and the results of calculated example are presented.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 marca 1977 r.