ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 26, 3, 437—455, 1978
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

WARIACYJNA METODA WYZNACZANIA EFEKTYWNYCH WŁASNOŚCI LEPKOSPRĘŻYSTYCH, ANIZOTROPOWYCH MATERIAŁÓW ZŁOŻONYCH

STANISŁAW TOKARZEWSKI (WARSZAWA)

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie metody wariacyjnej opisu efektywnych własności mechanicznych anizotropowych kompozytów liniowo lepkosprężystych, znajdujących się w stanie ustalonych drgań harmonicznych. W tym celu dla liniowych materiałów lepkosprężystych sformułowano zasady wariacyjne, a następnie wykorzystano je do wyznaczenia granic na efektywne moduły i podatności zespolone. Rozważania zostały zilustrowane dwoma przykładami obliczeń granic efektywnych modułów zespolonych dla dwuskładnikowych kompozytów, z których jeden składa się z poprzecznie izotropowych włókien, drugi zaś z materiałów regularnie anizotropowego i izotropowego.

OZNACZENIA

u^*, u', u''	przemieszczenie zespolone, część rzeczywista, urojona,
$\varepsilon^*, \varepsilon', \varepsilon''$	odkształcenie zespolone, część rzeczywista, urojona,
$\sigma^*, \sigma', \sigma''$	naprężenie zespolone, część rzeczywista, urojona,
W^*, W', W''	funkcjonał zespolony określony na odkształceniach dopuszczalnych,
U^*, U', U''	funkcjonał zespolony określony na naprężeniach dopuszczalnych,
$\overset{l}{W}{}^*, \overset{l}{W}{}', \overset{l}{W}{}''$	funkcjonał zespolony określony na odkształceniach lepkosprężystych,
$\overset{l}{U}{}^*, \overset{l}{U}{}', \overset{l}{U}{}''$	funkcjonał określony na naprężeniach lepkosprężystych,
$\overset{s}{U}$	funkcja energii naprężeń sprężystych,
$\overset{n}{L}{}^*$	moduł zespolony r-tego składnika
$\overset{r}{M}{}^*$	podatność zespolona r-tego składnika,
L^*	efektywny moduł zespolony,
M^*	efektywna podatność zespolona,
$'L''$	jednoczesne oznaczenie części rzeczywistej i urojonej modułu zespolonego,
$'M''$	jednoczesne oznaczenie części rzeczywistej i urojonej, podatności zespolonej,
$'\underset{\sim}{L}''$	jednoczesne oznaczenie odwrotności części rzeczywistej i urojonej podatności zespolonej,
$'\underset{\sim}{M}''$	jednoczesne oznaczenie odwrotności części rzeczywistej i urojonej modułu zespolonego,
$\overset{s}{W}$	funkcja energii odkształceń sprężystych.

1. Wstęp

Jednym z podstawowych zagadnień mechaniki ośrodków złożonych jest przewidywanie własności mechanicznych kompozytów na podstawie własności geometrycznych, udziałów objętościowych oraz własności mechanicznych składników. Najbogatszą literaturę z tego zakresu posiadają kompozyty sprężyste. Stąd często czyni się starania, aby metody używane do wyznaczania własności mechanicznych kompozytów sprężystych, zastosować do opisu mechanicznego zachowania się innych ośrodków złożonych. Wyróżnia się trzy podstawowe metody wyznaczania makroskopowych charakterystyk mechanicznych: metodę statystyczną [1, 4 i 25], samouzgodnionego pola [por. 16, 17, 22]. oraz metodę wariacyjną [13, 15, 31, 32 i 33].

Jedną z pierwszych prób zastosowania metod wariacyjnych w mechanice liniowych, lepkosprężystych materiałów złożonych podjął Schapery [30]. Posługując się rzeczywistymi transformatami funkcji pełzania i relaksacji, sformułował on w przestrzeni przekształcenia Laplace'a zasady wariacyjne analogiczne do liniowej teorii sprężystości. Za ich pomocą ustalił granice zmienności transformat efektywnych funkcji pełzania i relaksacji, które jednak nie prowadzą do poprawnej odpowiedzi po przejściu z powrotem do przestrzeni fizycznej.

Odmienną próbę sformułowania zasad ekstremalnych i zastosowania ich do opisu zachowania się kompozytów lepkosprężystych przedstawił Christensen [6]. Rozważył on izotropowy, jednorodny ośrodek lepkosprężysty, znajdujący się w stanie ustalonych drgań harmonicznych. Własności mechaniczne takiego ośrodka opisał za pomocą zespolonego objętościowego i dynamicznego współczynnika Poissona, przyjmującego jedynie wartości rzeczywiste. Dla tak określonych własności materiału lepkosprężystego sformułował zasady wariacyjne. Pozwoliły one obliczyć granice efektywnych modułów i podatności zespolonych dla izotropowych ośrodków lepkosprężystych z pustkami, bądź sztywnymi wtrąceniami wewnątrz.

Jeszcze inne podejście do obliczania granic efektywnych własności dynamicznych zaproponował Roscoe [28 i 29]. Rozważył on liniowe, izotropowe kompozyty lepkosprężyste, znajdujące się w stanie ustalonych drgań harmonicznych. Zdefiniował dla tych kompozytów efektywne własności zespolone za pomocą funkcjonałów określonych na zespolonych odkształceniach sprzężonych (efektywny moduł zespolony) oraz na zespolonych naprężeniach sprzężonych (efektywna podatność zespolona). Okazało się, że różnica między funkcjonałem definiującym efektywny moduł (podatność) zespolony, a funkcją energii odkształceń (naprężeń) odpowiedniego kompozytu sprężystego jest dodatnio określona. Ostatecznie prace Roscoe'a [28 i 29] podają metodę obliczania granic efektywnych własności zespolonych, izotropowych kompozytów lepkosprężystych na podstawie przedziału zmienności makroskopowych własności mechanicznych odpowiednio dobranych kompozytów sprężystych. Należy zaznaczyć, że powyższa propozycja nie da się bezpośrednio rozszerzyć na kompozyty anizotropowe, gdyż różnica między funkcjonałami definiującymi efektywne własności lepkosprężyste, a odpowiednimi funkcjonałami sprężystymi, w przypadku ogólnej anizotropii nie jest dodatnio określona.

Brak w literaturze ogólnych metod umożliwiających wyznaczanie efektywnych własności mechanicznych anizotropowych kompozytów lepkosprężystych z jednej strony oraz szerokie zastosowanie w technice materiałów złożonych z drugiej strony — skłaniają do podjęcia badań nad sformułowaniem wariacyjnej metody opisu makroskopowych charakterystyk mechanicznych kompozytów lepkosprężystych, znajdujących się w stanie ustalonych drgań harmonicznych.

2. Zagadnienia brzegowe w przemieszczeniach. Podstawowe określenia

Do opisu drgań harmonicznych liniowego materiału lepkosprężystego wygodnie jest stosować zmienną zespoloną. W ujęciu tym podstawowymi wielkościami mechanicznymi są przemieszczenia zespolone u^*, odkształcenia zespolone ε^* oraz naprężenia zespolone σ^*. Związki między nimi określają następujące wzory:

$$\varepsilon^*_{ij} = \frac{1}{2}(u^*_{i,j} + u^*_{j,i}) \tag{2.1}$$

oraz

$$\sigma^*_{ij} = L^*_{ijkl}\,\varepsilon^*_{kl}. \tag{2.2}$$

Tensor L^* występujący we wzorze (2.2) opisuje własności mechaniczne liniowego ośrodka lepkosprężystego, znajdującego się w stanie ustalonych drgań harmonicznych i nosi nazwę modułu zespolonego. Z ograniczeń, jakie na materiały lepkosprężyste nakłada termodynamika procesów nieodwracalnych [2], wynikają następujące własności modułu zespolonego: część rzeczywista oraz część urojona modułu

$$L^*_{ijkl} = L'_{ijkl} + iL''_{ijkl}, \tag{2.3}$$

są dodatnio określone; zachodzi symetria względem par i zamiany par wskaźników

$$L^*_{ijkl} = L^*_{jikl} = L^*_{ijlk} = L^*_{klij}. \tag{2.4}$$

Niech będzie dane ciało lepkosprężyste ograniczone powierzchnią S o objętości V. Wyodrębniając części rzeczywiste i urojone przemieszczeń, odkształceń oraz naprężeń, możemy sformułować zagadnienie brzegowe quasi-statycznej, liniowej lepkosprężystości w sposób następujący:

na powierzchni S

$$\overset{l}{u}'_i = u'_i, \qquad \overset{l}{u}''_i = u''_i$$

oraz w obszarze V spełnione są równania

$$\begin{gathered}
\overset{l}{\varepsilon}'_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{l}{u}'_{i,j} + \overset{l}{u}'_{j,i}), \qquad \overset{l}{\varepsilon}''_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{l}{u}''_{i,j} + \overset{l}{u}''_{j,i}),\\
\overset{l}{\sigma}'_{ij} = L'_{ijkl}\overset{l}{\varepsilon}'_{kl} - L''_{ijkl}\overset{l}{\varepsilon}''_{kl}, \qquad \overset{l}{\sigma}''_{ij} = L'_{ijkl}\overset{l}{\varepsilon}''_{kl} + L''_{ijkl}\overset{l}{\varepsilon}'_{kl},\\
\overset{l}{\sigma}'_{ij,j} = 0, \qquad \overset{l}{\sigma}''_{ij,j} = 0.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Przemieszczenia $\overset{l}{u}{}^*$ oraz odkształcenia $\overset{l}{\varepsilon}{}^*$ rozwiązujące zagadnienie brzegowe, nazywać będziemy w skrócie przemieszczeniami i odkształceniami lepkosprężystymi. Natomiast dowolne ciągłe funkcje przemieszczeń u^* oraz odkształceń ε^*, spełniające warunki brzegowe określone w przemieszczeniach, nazywać będziemy przemieszczeniami i odkształceniami dopuszczalnymi.

3. Zagadnienia brzegowe w naprężeniach. Podstawowe określenie

Równania konstytutywne dla drgających harmonicznie liniowych materiałów lepkosprężystych można napisać również w postaci:

$$\varepsilon^*_{ij} = M^*_{ijkl}\sigma^*_{kl}. \tag{3.1}$$

Występujący w tym równaniu tensor M^* nosi nazwę podatności zespolonej. Z rozważań Biota [2] wynika, że podobnie, jak w przypadku modułu zespolonego, termodynamika procesów nieodwracalnych nakłada na podatność zespoloną

$$M^*_{ijkl} = M'_{ijkl} - iM''_{ijkl} \tag{3.2}$$

ograniczenia następujące: część rzeczywista oraz część urojona podatności zespolonej są dodatnio określone; zachodzi symetria względem par i zamiany par wskaźników:

$$M^*_{ijkl} = M^*_{jikl} = M^*_{ijlk} = M^*_{klij}. \tag{3.3}$$

Zagadnienie brzegowe quasi-statystycznej liniowej lepkosprężystości w naprężeniach określa następujący układ równań:

na powierzchni S

$$\overset{l}{\sigma}{}'_{ij}n_j = T'_i, \qquad \overset{l}{\sigma}{}''_{ij}n_j = T''_i,$$

a w obszarze V

$$\begin{gathered} C(M'_{ijkl}\overset{l}{\sigma}{}'_{kl} + M''_{ijkl}\overset{l}{\sigma}{}''_{kl}) = 0, \qquad C(M'_{ijkl}\overset{l}{\sigma}{}''_{kl} - M''_{ijkl}\overset{l}{\sigma}{}'_{kl}) = 0, \\ \overset{l}{\sigma}{}'_{ij,j} = 0, \qquad \overset{l}{\sigma}{}''_{ij,j} = 0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

gdzie operator C jest operatorem zgodności odkształceń,

$$C(f_{ij}) = f_{ij,kl} + f_{kl,ij} - f_{ik,jl} - f_{jl,ik}, \tag{3.5}$$

a n jest wektorem jednostkowym prostopadłym do powierzchni S. Naprężenia $\overset{l}{\sigma}{}^*$ rozwiązujące zagadnienie brzegowe teorii lepkosprężystości, nazywać będziemy w skrócie naprężeniami lepkosprężystymi. Natomiast dowolną funkcję naprężeń, spełniającą równanie równowagi oraz warunki brzegowe, nazywać będziemy naprężeniami dopuszczalnymi.

4. Zasady ekstremalne dla liniowych materiałów lepkosprężystych, znajdujących się w stanie ustalonych drgań harmonicznych

Funkcjonał zespolony

$$W^* = W' + iW'' = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^*_{ij} L^*_{ijkl} \varepsilon^*_{kl} \, dV \tag{4.1}$$

prowadzi do zasad wariacyjnych następujących:

Zasada 1a. Część rzeczywista funkcjonału zespolonego,

$$W' = \frac{1}{2} \left[\int_V (L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{ijkl} \varepsilon''_{kl}) \varepsilon'_{ij} \, dV - \int_V (L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L''_{ijkl} \varepsilon'_{kl}) \varepsilon''_{ij} \, dV \right], \tag{4.2}$$

określona na odkształceniach dopuszczalnych spełniających warunek

$$(L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L''_{ijkl} \varepsilon'_{kl})_{,j} = 0 \quad [(L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{ijkl} \varepsilon''_{kl})_{,j} = 0], \tag{4.3}$$

osiąga bezwzględne minimum (maksimum) dla odkształceń spełniających równanie

$$(L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{ijkl} \varepsilon''_{kl}) = 0 \quad [(L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L''_{ijkl} \varepsilon'_{kl})_{,j} = 0]. \tag{4.4}$$

Zasada 1b. Część urojona funkcjonału zespolonego

$$W'' = \frac{1}{2} \left[\int_V (L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L''_{ijkl} \varepsilon'_{kl}) \varepsilon'_{ij} \, dV + \int_V (L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{ijkl} \varepsilon''_{kl}) \varepsilon''_{ij} \, dV \right], \tag{4.5}$$

określona na odkształceniach dopuszczalnych spełniających warunek

$$(L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl})_{,j} = 0 \quad [(L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{ijkl} \varepsilon''_{kl})_{,j} = 0]. \tag{4.6}$$

osiąga bezwzględne maksimum (minimum) dla odkształceń spełniających równanie

$$(L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{ijkl} \varepsilon''_{kl})_{,j} = 0 \quad [(L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L''_{ijkl} \varepsilon'_{kl})_{,j} = 0]. \tag{4.7}$$

Dla przykładu przeprowadzimy dowód zasady 1a.

Dowód zasady 1*a*. Niech $\delta\varepsilon'$ i $\delta\varepsilon''$ będą dowolnymi wariacjami części rzeczywistych i urojonych odkształceń dopuszczalnych. Pierwsza wariacja funkcjonału W' wynosi:

$$\delta W' = \int_V (L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{ijkl} \varepsilon''_{kl}) \delta\varepsilon'_{ij} \, dV - \int_V (L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L''_{ijkl} \varepsilon'_{kl}) \delta\varepsilon''_{ij} \, dV. \tag{4.8}$$

Korzystając z twierdzenia o zamianie całki powierzchniowej na objętościową, powyższą zależność możemy napisać w postaci

$$\delta W' = \int_S (L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{jkl} \varepsilon''_{kl}) \delta u'_i n_j \, dS - \int_V (L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{ijkl} \varepsilon''_{kl})_{,j} \delta u' \, dV -$$
$$- \int_S (L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L''_{ijkl} \varepsilon'_{kl}) \delta u''_i n_j \, dS + \int_S (L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L''_{ijkl} \varepsilon'_{kl})_{,j} \delta u''_i \, dV. \tag{4.9}$$

Na podstawie określenia odkształceń dopuszczalnych mamy

$$\delta u'_i(S) = 0, \quad \delta u''_i(S) = 0. \tag{4.10}$$

Stąd warunki zerowania się pierwszej wariacji są następujące:

$$(L'_{ijkl}\varepsilon'_{kl}-L''_{jkl}\varepsilon''_{kl})_{,j}=0 \qquad (L'_{ijkl}\varepsilon''_{kl}+L''_{ijkl}\varepsilon'_{kl})_{,j}=0. \tag{4.11}$$

Druga wariacja funkcjonału W' jest następująca

$$\delta^2 W'=\frac{1}{2}\left[\int_V (L'_{ijkl}\delta\varepsilon'_{kl}-L''_{ijkl}\delta\varepsilon''_{kl})\delta\varepsilon'_{ij}\,dV-\int_V (L'_{ijkl}\delta\varepsilon''_{kl}+L''_{ijkl}\delta\varepsilon'_{kl})\delta\varepsilon''_{j}\,dV\right]. \tag{4.12}$$

Z warunku (4.3) mamy

$$(L'_{ijkl}\delta\varepsilon''_{kl}+L''_{ijkl}\delta\varepsilon'_{kl})_{,j}=0. \tag{4.13}$$

Na podstawie twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego o zamianie całki powierzchniowej na objętościową otrzymujemy, że druga całka w drugiej wariacji znika, co daje

$$\int_V \delta\varepsilon''_{ij}L'_{ijkl}\delta\varepsilon''_{kl}\,dV=-\int_V \delta\varepsilon'_{ij}L''_{ijkl}\delta\varepsilon''_{kl}\,dV, \tag{4.14}$$

a stąd

$$\delta^2 W'=\frac{1}{2}\left[\int_V (\delta\varepsilon'_{ij}L'_{ijkl}\delta\varepsilon'_{kl}+\delta\varepsilon''_{ij}L'_{ijkl}\delta\varepsilon''_{kl})\,dV\right]. \tag{4.15}$$

A zatem druga wariacja funkcjonału W' jest dodatnio określona.

Podobne zasady wariacyjne możemy sformułować dla funkcjonału zespolonego

$$U^*=U'-iU''=\int_V \sigma^*_{ij}M^*_{ijkl}\sigma^*_{kl}\,dV. \tag{4.16}$$

ZASADA 2a. Część rzeczywista funkcjonału dopuszczalnego

$$U'=\frac{1}{2}\left[(M'_{ijkl}\sigma'_{kl}+M''_{ijkl}\sigma''_{kl})\sigma'_{ij}\,dV-\int_V (M'_{ijkl}\sigma''_{kl}-M''_{ijkl}\sigma'_{kl})\sigma''_{ij}\,dV\right], \tag{4.17}$$

określona na naprężeniach dopuszczalnych, spełniających warunek zgodności odkształceń

$$C(M'_{ijkl}\sigma''_{kl}-M''_{ijkl}\sigma'_{kl})=0 \qquad [C(M'_{ijkl}\sigma'_{kl}+M''_{ijkl}\sigma''_{kl})], \tag{4.18}$$

osiąga bezwzględne minimum (maksimum) dla naprężeń spełniających równanie

$$C(M'_{ijkl}\sigma'_{kl}+M''_{ijkl}\sigma''_{kl})=0 \qquad [C(M'_{ijkl}\sigma''_{kl}-M''_{ijkl}\sigma'_{kl})=0]. \tag{4.19}$$

ZASADA 2b. Część urojona funkcjonału zespolonego

$$U''=\frac{1}{2}\left[\int_V (M'_{ijkl}\sigma''_{kl}-M''_{ijkl}\sigma'_{kl})\sigma'_{ij}\,dV-\int_V (M'_{ijkl}\sigma'_{kl}+M''_{ijkl}\sigma''_{kl})\sigma''_{ij}\,dV\right], \tag{4.20}$$

określona na naprężeniach dopuszczalnych spełniających warunek zgodności odkształceń

$$C(M'_{ijkl}\sigma''_{kl}-M''_{ijkl}\sigma'_{kl})=0 \qquad [C(M'_{ijkl}\sigma'_{kl}+M''_{ijkl}\sigma''_{kl})=0]. \tag{4.21}$$

osiąga bezwzględne maksimum (minimum) dla naprężeń spełniających równanie

$$C(M'_{ijkl}\sigma'_{kl}+M''_{ijkl}\sigma''_{kl})=0 \quad [C(M'_{ijkl}\sigma''_{kl}-M''_{ijkl}\sigma'_{kl})=0]. \tag{4.22}$$

Dla przykładu przeprowadzimy dowód zasady 2a.

Dowod zasady 2*a*. Niech $\delta\sigma'$ i $\delta\sigma''$ będą dowolnymi wariacjami części rzeczywistych i urojonych zespolonych naprężeń dopuszczalnych. Pierwsza wariacja funkcjonału U' wynosi

$$\delta U'=\int\limits_V(M'_{ijkl}\sigma'_{kl}+M''_{ijkl}\sigma''_{kl})\delta\sigma'_{ij}\,dV-\int\limits_V(M'_{ijkl}\sigma''_{kl}-M''_{ijkl})\delta\sigma''_{ij}\,dV \tag{4.23}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\varepsilon'_{ij}=M'_{ijkl}\sigma'_{kl}+M''_{ijkl}\sigma''_{kl}, \qquad \varepsilon''_{ij}=M'_{ijkl}\sigma''_{kl}-M''_{ijkl}\sigma'_{kl}. \tag{4.24}$$

Jeśli spełnione są równania zgodności odkształceń

$$C(\varepsilon'_{ij})=0, \qquad C(\varepsilon''_{ij})=0, \tag{4.25}$$

to istnieją ciągłe funkcje przemieszczeń spełniające równania

$$\varepsilon'_{ij}=\frac{1}{2}(u'_{i,j}+u'_{j,i}), \qquad \varepsilon''_{ij}=\frac{1}{2}(u''_{i,j}+u''_{j,i}). \tag{4.26}$$

Stąd na podstawie twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego pierwszą wariację można przedstawić w postaci

$$\delta U'=\int\limits_S\delta\sigma'_{ij}u'_i n_j\,dS-\int\limits_V\delta\sigma'_{ij,j}u'_i\,dV-\int\limits_S\delta\sigma''_{ij}u''_i n_j\,dS+\int\limits_V\delta\sigma''_{ij,j}u''_i\,dV. \tag{4.27}$$

Rozważmy takie wariacje naprężeń, które spełniają równania równowagi oraz znikają na brzegu ciała. A zatem wariacja zeruje się, jeśli spełnione są następujące równania zgodności odkształceń:

$$C(M'_{ijkl}\sigma''_{kl}-M''_{ijkl}\sigma'_{kl})=0, \qquad C(M'_{ijkl}\sigma'_{kl}+M''_{ijkl})=0. \tag{4.28}$$

Druga wariacja funkcjonału U' wynosi

$$\delta^2 U'= \tag{4.29}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\int\limits_V(M'_{ijkl}\delta\sigma'_{kl}+M''_{ijkl}\delta\sigma''_{kl})\delta\sigma'_{ij}\,dV-\int\limits_V(M'_{ijkl}\delta\sigma''_{kl}-M''_{ijkl}\delta\sigma'_{kl})\delta\sigma''_{ij}\,dV\Big].$$

Na podstawie warunku (4.18) mamy

$$C(M'_{ijkl}\delta\sigma''_{kl}-M''_{ijkl}\delta\sigma'_{kl})=0. \tag{4.30}$$

Stąd na podstawie twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego druga całka w drugiej wariacji znika, co prowadzi do wzoru

$$\int\limits_V\delta\sigma''_{ij}M'_{ijkl}\delta\sigma''_{kl}\,dV=\int\limits_V\delta\sigma'_{ij}M''_{ijkl}\delta\sigma''_{kl}\,dV. \tag{4.31}$$

Stąd

$$\delta^2 U' = \frac{1}{2} \int_V (\delta\sigma'_{ij} M'_{ijkl} \delta\sigma'_{kl} + \delta\sigma''_{ij} M'_{ijkl} \delta\sigma''_{kl})\, dV. \tag{4.32}$$

A zatem druga wariacja funkcjonału U' jest dodatnio określona.

W niniejszym punkcie sformułowano osiem zasad wariacyjnych dla drgających harmonicznie materiałów lepkosprężystych. W pierwszych czterech zasadach wykazaliśmy, że części rzeczywiste i urojone funkcjonałów zespolonych przyjmują wartości bezwzględnego maksimum bądź minimum dla odkształceń spełniających równania

$$(L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{ijkl} \varepsilon''_{kl})_{,j} = 0 \qquad (L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L''_{ijkl} \varepsilon'_{kl})_{,j} = 0. \tag{4.33}$$

W pozostałych zaś czterech zasadach warunkiem osiągania przez funkcjonał zespolony U^* wartości ekstremalnych jest spełnienie równań

$$C(M'_{ijkl} \sigma'_{kl} + M''_{ijkl} \sigma''_{kl}) \qquad C(M'_{ijkl} \sigma''_{kl} - M''_{ijkl} \sigma'_{kl}) = 0. \tag{4.34}$$

Wynik ten porównujemy z zagadnieniami brzegowymi (2.5) i (3.4). Zauważmy, że funkcjonałami zespolonymi, które przyjmują wartości maksymalne bądź minimalne, są funkcjonały określone odpowiednio na odkształceniach i naprężeniach lepkosprężystych. W związku z tym wprowadźmy nowe oznaczenia:

$$\begin{aligned} \overset{l}{W}{}^* &= \overset{l}{W}{}' + i\overset{l}{W}{}'' = \frac{1}{2} \int_V \overset{l}{\varepsilon}{}^*_{ij} L^*_{ijkl} \overset{l}{\varepsilon}{}^*_{kl}\, dV, \\ \overset{l}{U}{}^* &= \overset{l}{U}{}' - i\overset{l}{U}{}'' = \frac{1}{2} \int_V \overset{l}{\sigma}{}^*_{ij} M^*_{ijkl} \overset{l}{\sigma}{}^*_{kl}\, dV. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Otrzymane wyżej zasady wariacyjne prowadzą do następujących wniosków:

Części rzeczywiste (urojone) funkcjonałów zespolonych określonych na odkształceniach

$$(L'_{ijkl} \varepsilon''_{kl} + L''_{ijkl} \varepsilon^{l}_{kl})_{,j} = 0 \tag{4.36}$$

spełniają nierówność

$$\overset{l}{W}{}' \leqslant W' \qquad (\overset{l}{W}{}'' \geqslant W''). \tag{4.37}$$

Części rzeczywiste (urojone) funkcjonałów zespolonych określonych na odkształceniach

$$(L'_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - L''_{ijkl} \varepsilon''_{kl})_{,j} = 0, \tag{4.38}$$

spełniają nierówność

$$\overset{l}{W}{}' \geqslant W' \qquad (\overset{l}{W}{}'' \leqslant W''). \tag{4.39}$$

Części rzeczywiste (urojone) funkcjonałów zespolonych określone na naprężeniach

$$C(M'_{ijkl} \sigma'_{kl} + M''_{ijkl} \sigma''_{kl}) = 0, \tag{4.40}$$

spełniają nierówność

(4.41) $$\overset{l}{U'} \leqslant U' \quad (\overset{l}{U''} \geqslant U'').$$

Części rzeczywiste (urojone) funkcjonałów zespolonych określone na naprężeniach

(4.42) $$C(M'_{ijkl}\sigma''_{kl} - M''_{ijkl}\sigma'_{kl}) = 0$$

spełniają nierówność

(4.43) $$\overset{l}{U'} \geqslant U' \quad (\overset{l}{U''} \leqslant U'').$$

5. Funkcjonały zespolone oraz funkcje energii sprężystej

Rozważmy drgający harmonicznie materiał lepkosprężysty, na brzegu którego została określona dla przemieszczeń amplituda drgań przyjmująca wartości rzeczywiste. W związku z tym wybierzmy takie odkształcenie dopuszczalne, dla których część urojona znika. Przyjmując $\varepsilon''=0$, uzyskamy na podstawie (4.36)–(4.39) stwierdzenia następujące:

Odkształcenia spełniające równanie

(5.1) $$L''_{ijkl}\varepsilon_{kl,j} = 0,$$

spełniają jednocześnie nierówność

(5.2) $$\overset{l}{W'} \leqslant \frac{1}{2}\int \varepsilon_{ij} L'_{ijkl}\varepsilon_{kl}\, dV \quad \left(\overset{l}{W''} \geqslant \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_{ij} L''_{ijkl}\varepsilon_{kl}\, dV\right).$$

Odkształcenia spełniające równanie

(5.3) $$L'_{ijkl}\varepsilon_{kl,j} = 0,$$

spełniają jednocześnie nierówność

(5.4) $$\overset{l}{W'} \geqslant \frac{1}{2}\int \varepsilon_{ij} L'_{ijkl}\varepsilon_{kl}\, dV \quad \left(\overset{l}{W''} \leqslant \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_{ij} L''_{ijkl}\varepsilon_{kl}\, dV\right).$$

Niech będzie dany materiał sprężysty o module sprężystym równym części rzeczywistej (części urojonej) modułu zespolonego. Równanie konstytutywne dla takiego materiału przyjmie więc postać

(5.5) $$\sigma_{ij} = L'_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\sigma_{ij} = L''_{ijkl}\varepsilon_{kl}).$$

Stąd równania równowagi dadzą się napisać następująco:

(5.6) $$L'_{ijkl}\varepsilon_{kl,j} = 0 \quad (L''_{ijkl}\varepsilon_{kl,j} = 0),$$

funkcję zaś energii odkształceń można przedstawić wzorami

(5.7) $$\overset{s}{W} = \frac{1}{2}\int \varepsilon_{ij} L'_{ijkl}\varepsilon_{kl}\, dV \quad \left(\overset{s}{W} = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_{ij} L''_{ijkl}\varepsilon_{kl}\, dV\right).$$

Nierówności $(5.2)_2$ i $(5.4)_2$ prowadzą więc do wniosku następującego: część rzeczywista (część urojona) funkcjonału zespolonego, określonego na odkształceniach lepkosprężystych jest nie mniejsza od energii odkształceń odpowiedniego kompozytu sprężystego:

$$\overset{s}{W} \leqslant \overset{l}{W'} \quad (\overset{s}{W} \leqslant \overset{l}{W''}). \tag{5.8}$$

Podobne rozważania można przeprowadzić dla drgającego harmonicznie materiału lepkosprężystego, na brzegu którego została określona dla naprężeń amplituda drgań przyjmująca wartości rzeczywiste. Stąd jako naprężenia dopuszczalne można wybrać takie naprężenia, dla których część urojona znika. W związku z tym przyjmijmy $\sigma''=0$. Na podstawie zasad wariacyjnych (4.40)–(4.43) uzyskamy stwierdzenie następujące:

Naprężenia spełniające równanie

$$C(M''_{ijkl}\sigma_{kl})=0, \tag{5.9}$$

spełniają jednocześnie nierówność

$$\overset{l}{U'} \leqslant \frac{1}{2}\int_V M^{l}_{ijkl}\sigma_{kl}\,dV \quad \left(\overset{l}{U''} \geqslant \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}M''_{ijkl}\sigma_{kl}\,dV\right). \tag{5.10}$$

Naprężenia spełniające równanie

$$C(M'_{ijkl}\sigma_{kl})=0 \tag{5.11}$$

spełniają jednocześnie nierówność

$$\overset{l}{U'} \geqslant \frac{1}{2}\int \sigma_{ij}M'_{ijkl}\sigma_{kl}\,dV \quad \left(\overset{l}{U''} \leqslant \frac{1}{2}\int \sigma_{ij}M''_{ijkl}\sigma_{kl}\,dV\right). \tag{5.12}$$

Niech będzie dany materiał sprężysty o podatności sprężystej równej części rzeczywistej (części urojonej) podatności zespolonej. Równanie konstytutywne dla takiego materiału przyjmie postać

$$\varepsilon_{ij}=M'_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (\varepsilon_{ij}=M''_{ijkl}\sigma_{kl}). \tag{5.13}$$

Stąd równania zgodności odkształceń są następujące:

$$C(M'_{ijkl}\sigma_{kl})=0 \quad \left(C(M''_{ijkl}\sigma_{kl})=0\right), \tag{5.14}$$

funkcję zaś energii naprężeń można przedstawić w postaci

$$\overset{s}{U}=\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}M'_{ijkl}\sigma_{kl}\,dV \quad \left(\overset{s}{U}=\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}M''_{ijkl}\sigma_{kl}\,dV\right). \tag{5.15}$$

Nierówności $(5.10)_2$ i $(5.12)_1$ prowadzą więc do wniosku następującego: część rzeczywista (część urojona) funkcjonału zespolonego, określonego na naprężeniach lepkosprężystych, jest nie mniejsza od energii naprężeń odpowiedniego kompozytu sprężystego:

$$\overset{s}{U} \leqslant \overset{l}{U'} \quad (\overset{s}{U} \leqslant \overset{l}{U''}). \tag{5.16}$$

Otrzymane nierówności (5.8) i (5.16) zastosujemy do opisu efektywnych własności mechanicznych, drgających harmonicznie kompozytów lepkosprężystych.

6. Liniowe, drgające harmonicznie, lepkosprężyste materiały złożone

Jeśli w materiale lokalne własności mechaniczne zależą od położenia, to mamy do czynienia z ośrodkiem niejednorodnym. Każdy ośrodek niejednorodny może składać się z materiałów jednorodnych zwanych składnikami. Przyjmiemy, że na granicach składników nie zachodzą poślizgi i każdy materiał o tej własności nazywać będziemy kompozytem. W mechanice ośrodków złożonych wprowadza się również pojęcie obszaru reprezentatywnego [por. (3.1)]. Jest to obszar, który reprezentuje przeciętne zachowanie się kompozytu i jest na tyle duży, że efektywne własności mechaniczne nie zależą od przemieszczeń i naprężeń na brzegu pod warunkiem jednak, iż są one makroskopowo jednorodne. Oznacza to, że długość fali fluktuacji przemieszczeń i naprężeń względem średnich wartości jest mała w porównaniu z rozmiarami rozważanego kompozytu; dla przykładu może być rzędu wymiaru charakterystycznego niejednorodności. Wpływ tego rodzaju fluktuacji na przeciętne zachowanie się kompozytu ujawnia się jedynie w pobliżu powierzchni ciała i może być pominięty, jeżeli ciało jest wystarczająco duże.

Niech materiał złożony, ograniczony powierzchnią S zajmuje obszar V, o którym założymy, że jest obszarem reprezentatywnym i niech na jego brzegu określone będą amplitudy przemieszczeń i naprężeń, przyjmujące wartości rzeczywiste. Za pomocą funkcjonałów zespolonych określonych na odkształceniach i naprężeniach lepkosprężystych, określimy makroskopowe własności kompozytów lepkosprężystych:

$$\overset{o}{\varepsilon}_{ij} L^*_{ijkl} \overset{o}{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{V} \overset{l}{W}{}^* = \frac{1}{V} \int\limits_V \overset{l}{\varepsilon}{}^*_{ij} \overset{r}{L}{}^*_{ijkl} \overset{l}{\varepsilon}{}^*_{kl}\, dV \tag{6.1}$$

oraz

$$\overset{o}{\sigma}_{ij} M^*_{ijkl} \overset{o}{\sigma}_{kl} = \frac{1}{V} \overset{l}{U}{}^* = \frac{1}{V} \int\limits_V \overset{l}{\sigma}{}^*_{ij} \overset{r}{M}{}^*_{ijkl} \overset{l}{\sigma}{}^*_{kl}\, dV, \tag{6.2}$$

gdzie $\overset{r}{L}{}^*$ i $\overset{r}{M}{}^*$ oznaczają moduły, podatności zespolone r-tego składnika, a $\overset{o}{\varepsilon}$ i $\overset{o}{\sigma}$ są uśrednionymi w rozważanym obszarze odkształceniami i naprężeniami. Tensory L^* i M^* obliczone na podstawie (6.1) i (6.2) noszą nazwę odpowiednio efektywnego modułu zespolonego i efektywnej podatności zespolonej.

Rozważamy takie kompozyty, na brzegu których określą się przemieszczenia i naprężenia przyjmujące wartości rzeczywiste. Stąd wzory (6.1) i (6.2) można wyrazić następująco:

$$
(6.3)\qquad
\begin{aligned}
V\overset{o}{\varepsilon}_{ij} L'_{ijkl} \overset{o}{\varepsilon}_{kl} &= \overset{l}{W'} = \frac{1}{2}\int_V (\overset{l}{\varepsilon}'_{ij} \overset{r}{L}'_{ijkl} \overset{l}{\varepsilon}'_{kl} + \overset{l}{\varepsilon}''_{ij} \overset{r}{L}'_{ijkl} \overset{l}{\varepsilon}''_{kl})\, dV,\\
V\overset{o}{\varepsilon}_{ij} L''_{ijkl} \overset{o}{\varepsilon}_{kl} &= \overset{l}{W''} = \frac{1}{2}\int_V (\overset{l}{\varepsilon}'_{ij} \overset{r}{L}''_{ijkl} \overset{l}{\varepsilon}'_{kl} + \overset{l}{\varepsilon}''_{ij} \overset{r}{L}''_{ijkl} \overset{l}{\varepsilon}''_{kl})\, dV;
\end{aligned}
$$

$$
(6.4)\qquad
\begin{aligned}
V\overset{o}{\sigma}_{ij} M'_{ijkl} \overset{o}{\sigma}_{kl} &= \overset{l}{U'} = \frac{1}{2}\int_V (\overset{l}{\sigma}'_{ij} \overset{r}{M}'_{ijkl} \overset{l}{\sigma}'_{kl} + \overset{l}{\sigma}''_{ij} \overset{r}{M}'_{ijkl} \overset{l}{\sigma}''_{kl})\, dV,\\
V\overset{o}{\sigma}_{ij} M''_{ijkl} \overset{o}{\sigma}_{kl} &= \overset{l}{U''} = \frac{1}{2}\int_V (\overset{l}{\sigma}'_{ij} \overset{r}{M}''_{ijkl} \overset{l}{\sigma}_{kl} + \overset{l}{\sigma}''_{ij} \overset{r}{M}''_{ijkl} \overset{l}{\sigma}''_{kl})\, dV.
\end{aligned}
$$

Między efektywnym modułem zespolonym i efektywną podatnością zachodzi związek

$$
(6.5)\qquad L^{*}_{ijkl} M^{*}_{klmn} = \frac{1}{2}(\sigma_{im}\sigma_{jn} + \sigma_{in}\sigma_{jm}).
$$

7. Granice części rzeczywistych i urojonych epektywnych modułów i podatności zespolonych

Efektywne moduły i podatności kompozytów sprężystych definiują się za pomocą funkcji energii odkształceń oraz funkcji energii naprężeń, określonych na odkształceniach i naprężeniach rozwiązujących zagadnienie brzegowe liniowej teorii sprężystości:

$$
(7.1)\qquad V\overset{o}{\varepsilon}_{ij} L_{ijkl} \overset{o}{\varepsilon}_{kl} = \overset{s}{W} = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_{ij} \overset{r}{L}_{ijkl} \varepsilon_{kl}\, dV
$$

oraz

$$
(7.2)\qquad V\overset{o}{\sigma}_{ij} M_{ijkl} \overset{o}{\sigma}_{kl} = \overset{s}{U} = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij} \overset{r}{M}_{ijkl} \sigma_{kl}\, dV,
$$

gdzie $\overset{o}{\varepsilon}$ i $\overset{o}{\sigma}$ są uśrednionymi odkształceniami i naprężeniami materiału złożonego. Tensory L i M noszą nazwę efektywnych modułów i podatności sprężystych. Niech będą dane dolne granice efektywnego modułu sprężystego L^d i efektywnej podatności sprężystej M^d. Na podstawie określenia granic dolnych [por. (3.1)] a także związków (7.1) i (7.2), mamy

$$
(7.3)\qquad
\begin{aligned}
\overset{o}{\varepsilon}_{ij} L^{d}_{ijkl} \overset{o}{\varepsilon}_{kl} &\leqslant \overset{o}{\varepsilon}_{ij} L_{ijkl} \overset{o}{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{V}\overset{s}{W},\\
\overset{o}{\sigma}_{ij} M^{d}_{ijkl} \overset{o}{\sigma}_{kl} &\leqslant \overset{o}{\sigma}_{ij} M_{ijkl} \overset{o}{\sigma}_{kl} = \frac{1}{V}\overset{s}{U}.
\end{aligned}
$$

Opierając się na nierównościach (5.3) i (5.6) oraz definicjach (6.3) i (6.4) dochodzimy do nierówności

$$
(7.4)\qquad
\begin{aligned}
&\overset{o}{\varepsilon}_{ij} L^{d}_{ijkl} \overset{o}{\varepsilon}_{kl} \leqslant \overset{o}{\varepsilon}_{ij} L'_{ijkl} \overset{o}{\varepsilon}_{kl}, \qquad (\overset{o}{\varepsilon}_{ij} L^{d}_{ijkl} \overset{o}{\varepsilon}_{kl} \leqslant \overset{o}{\varepsilon}_{ij} L''_{ijkl} \overset{o}{\varepsilon}_{kl}),\\
&\overset{o}{\sigma}_{ij} M^{d}_{ijkl} \overset{o}{\sigma}_{kl} \leqslant \overset{o}{\sigma}_{ij} M'_{ijkl} \overset{o}{\sigma}_{kl}, \qquad (\overset{o}{\sigma}_{ij} M^{d}_{ijkl} \overset{o}{\sigma}_{kl} \leqslant \overset{o}{\sigma}_{ij} M''_{ijkl} \overset{o}{\sigma}_{kl}).
\end{aligned}
$$

Jeśli moduły sprężyste kompozytu sprężystego są równe częściom rzeczywistym (urojonym) modułów zespolonych odpowiednich składników kompozytu lepkosprężystego, to dolna granica efektywnego modułu kompozytu sprężystego jest jednocześnie dolną granicą części rzeczywistej (urojonej) makroskopowego modułu zespolonego. Podobnie, jeśli podatność składników kompozytu sprężystego równa się częściom rzeczywistym (urojonym) odpowiednich składników kompozytu lepkosprężystego, to dolna granica efektywnej podatności sprężystego materiału złożonego jest jednocześnie dolną granicą części rzeczywistej (urojonej) makroskopowej podatności zespolonej.

Niech będzie dana część rzeczywista i urojona dowolnej wielkości zespolonej

$$
(7.5)\qquad f^{*} = f' + if''.
$$

Umówimy się, że zarówno część rzeczywistą jak i urojoną oznaczać będziemy za pomocą jednego symbolu

$$
(7.6)\qquad f'_1 = 'f'', \qquad f'' = 'f''.
$$

Stąd na odwrotności części rzeczywistych (części urojonych) modułów i podatności zespolonych wprowadzimy oznaczenie następujące:

$$
(7.7)\qquad ('M'')^{-1} = '\underset{\sim}{L}'', \qquad ('L'')^{-1} = '\underset{\sim}{M}''.
$$

Na podstawie wniosków podanych w punkcie 7 oraz na podstawie twierdzeń o granicach efektywnych własności sprężystych, sformułowanych przez Walpole'a (3.1), możemy sformułować następujące twierdzenie o granicach efektywnych modułów i podatności zespolonych:

TWIERDZENIE 1. *Jeśli dla wszystkich r tensor* $L^0 - '\overset{r}{L}''$, $M^0 - '\overset{r}{M}''$ *jest ujemnie określony, to tensor* $'\bar{L}'' - 'L''$, $'\bar{M}'' - 'M''$ *jest rownież ujemnie określony.*

TWIERDZENIE 2. *Jeśli dla wszystkich r tensor* $L^0 - '\underset{\sim}{\overset{r}{L}}''$, $M^0 - '\underset{\sim}{\overset{r}{M}}''$ *jest dodatnio określony, to* $'\underset{\sim}{\bar{L}}'' - '\underset{\sim}{L}''$, $'\underset{\sim}{\bar{M}}'' - '\underset{\sim}{M}''$ *jest rownież dodatnio określony. Tensory występujące w powyższych twierdzeniach są następujące:*

$$
(7.8)\qquad
\begin{aligned}
&'\bar{L}'' = [\Sigma c_r (L^{\bullet} + '\overset{r}{L}'')^{-1}]^{-1} - L^{\bullet},\\
&L^{\bullet}_{ijkl} = k_{\bullet} \delta_{ij} \delta_{kl} + u_{\bullet} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right),\\
&L^{o}_{ijkl} = k_o \delta_{ij} \delta_{kl} + u_o \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right),\\
&k_{\bullet} = \frac{4}{3} u_o, \qquad u_{\bullet} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{u_o} + \frac{10}{9k_o + 8u_o} \right)^{-1};
\end{aligned}
$$

$$'\overset{r}{M}'' = [\Sigma c_r (M^\bullet + '\overset{r}{M}'')^{-1}]^{-1} - M^\bullet;$$

$$(7.9)\qquad M^\bullet_{ijkl} = \frac{1}{9k_\bullet}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{4u_\bullet}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right),$$

$$M^o_{ijkl} = \frac{1}{9k_o}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{4u_o}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right).$$

Dodatkowe ograniczenia na wartości efektywnych własności zespolonych wynikają z określeń (6.3) i (6.4). Sformułujemy je w postaci dalszych twierdzeń:

TWIERDZENIE 3. *Jesli dla każdego r tensor* $\overset{r}{L}' - \lambda \overset{r}{L}''$, $\overset{r}{M}' - \lambda \overset{r}{M}''$ *jest dodatnio (ujemnie) określony, to tensor* $L' - \lambda L''$, $M' - \lambda M''$ *jest rownież (dodatnio (ujemnie) określony. Parametrr* λ *występujący w powyższych twierdzeniach jest dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą.*

8. PRZYKŁADY OBLICZANIA GRANIC EFEKTYWNYCH MODUŁÓW ZESPOLONYCH DLA DWUSKŁADNIKOWYCH KOMPOZYTÓW

Przykład 1 [34]. Rozważmy kompozyt dwuskładnikowy o objętości składników odpowiednio c_1 i c_2. Niech pierwszy składnik posiada własność regularnej anizotropii, drugi zaś jest materiałem izotropowym. O składnikach założymy, że są rozmieszczone bezładnie, tak że kompozyt zachowuje się makroskopowo jak materiał izotropowy. Przyjmijmy, że rozważany przez nas kompozyt składa się z materiałów, których własności mechaniczne opisuje model Maxwella. Wówczas moduły zespolone przyjmują postać

$$(8.1)\qquad \mu_1^* = \mu_1 \frac{i\omega}{i\omega + \alpha}, \quad p_1^* = p_1 \frac{i\omega}{i\omega + \alpha}, \quad \mu_2^* = \mu_2 \frac{i\omega}{i\omega + \beta}.$$

Do obliczeń numerycznych przyjmijmy następujące wartości liczbowe wyrażone w odpowiednich jednostkach:

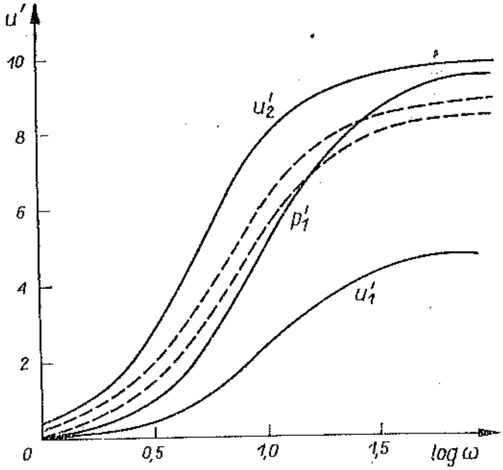
$$(8.2)\qquad \mu_1 = 5, \quad p_1 = 10, \quad \mu_2 = 10, \quad \alpha = 10, \quad \beta = 5.$$

Wyniki obliczeń efektywnego, zespolonego modułu postaciowego zostały naniesione za pomocą linii przerywanej na wykresy pokazane na rys. 1 i rys. 2.

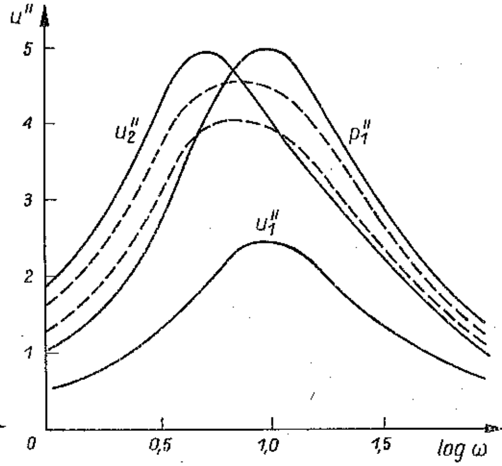
Przyklad 2 [34]. Niech ułożone równoległe, poprzecznie izotropowe włókna tworzą dwuskładnikowy kompozyt lepkosprężysty. Załóżmy, że w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ułożenia przekroju włókien są dowolne i usytuowane bezładnie tak, że materiał złożony zachowuje się makroskopowo jako ośrodek poprzecznie izotropowy.

Przyjmijmy, że rozważany przez nas kompozyt składa się z materiałów, których własności mechaniczne opisuje model Maxwella. Wówczas moduły zespolone przyjmą postać:

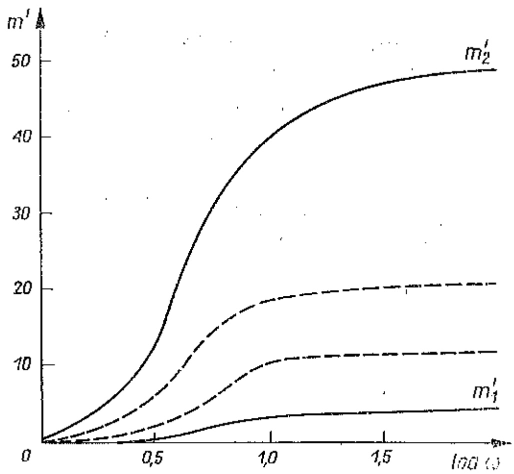
$$(8.3)\qquad m_1^* = m_1 \frac{i\omega}{i\omega + \alpha}, \quad m_2^* = m_2 \frac{i\omega}{i\omega + \beta}, \quad p_1^* = p_1 \frac{i\omega}{i\omega + \alpha}, \quad p_2^* = p_2 \frac{i\omega}{i\omega + \beta}.$$



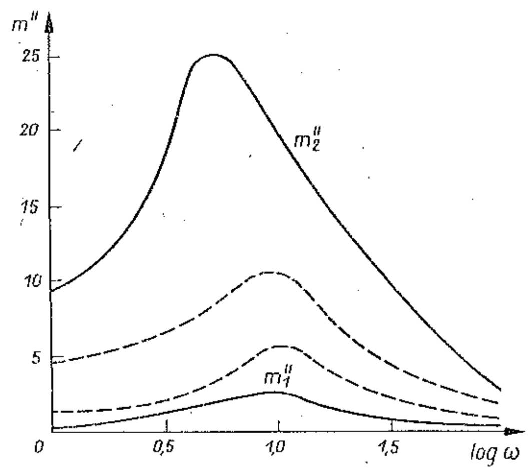
RYS. 1. Wykres granic części rzeczywistej efektywnego, postaciowego modułu zespolonego nieściśliwego kompozytu lepkosprężystego, składającego się z bezładnie rozmieszczonych składników, izotropowego oraz regularnie anizotropowego.



RYS. 2. Wykres granic części urojonej efektywnego modułu zespolonego.



RYS. 3. Wykres granic części rzeczywistej efektywnego modułu postaciowego poprzecznie nieściśliwego kompozytu lepkosprężystego, składającego się z ułożonych równolegle włókien poprzecznie izotropowych.



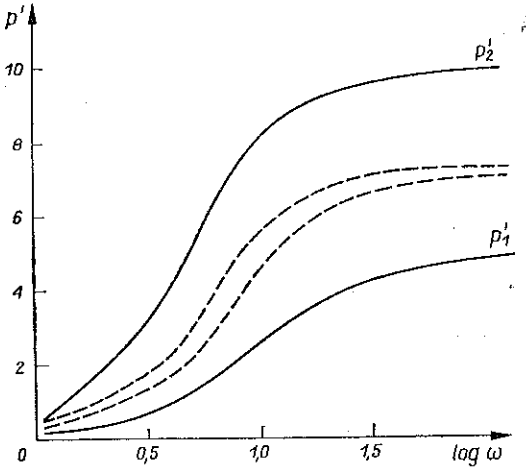
RYS. 4. Wykres granic części urojonej efektywnego modułu postaciowego.

Do obliczeń numerycznych przyjmijmy następujące wartości liczbowe

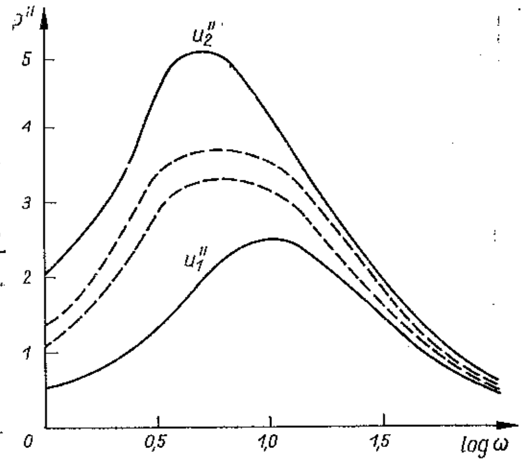
(8.4) $\quad m_1=5, \quad m_2=50, \quad \alpha=10, \quad \beta=5, \quad p_1=5, \quad p_2=10, \quad c_1=0{,}5, \quad c_2=0{,}5$

wyrażone w odpowiednich jednostkach.

Wyniki obliczeń granic efektywnego modułu zespolonego zostały naniesione za pomocą linii przerywanej na wykresy pokazane na rysunkach 3, 4, 5 i 6.



Rys. 5. Wykres granic części rzeczywistej efektynwego modułu zespolonego.



Rys. 6. Wykres granic części urojonej efektywnego modułu zespolonego.

9. Dyskusja

Rozważanie teoretyczne oraz wykonane przykłady liczbowe wskazują, że do wyznaczenia granic efektywnych własności zespolonych anizotropowych kompozytów lepkosprężystych, wystarcza znajomość wyrażeń opisujących makroskopowe zachowanie się kompozytów sprężystych. Należy tylko we wzorach na dolną granicę efektywnego modułu sprężystego dokonać zmiany modułów sprężystych na odpowiednie części rzeczywiste (urojone) modułów zespolonych, we wzorach zaś na górną granicę wymienić moduły sprężyste na odwrotności części rzeczywistych (urojonych) podatności zespolonych.

Podobnie granice efektywnych podatności zespolonych wynikają ze wzorów na dolną granicę efektywnej podatności sprężystej, jeśli dokonamy zmiany podatności sprężystej na części rzeczywiste (urojone) podatności zespolonych, a we wzorach na górną granicę wymienimy podatności sprężyste na odwrotności części rzeczywistych (urojonych) modułów zespolonych. W szczególnym przypadku izotropowych kompozytów lepkosprężystych powyższe wnioski pokrywają się z rezultatami rozważań Roscoe'a [32]. Stąd granice dla kompozytów lepkosprężystych o bezładnie usytuowanych składnikach izotropowych, wyznaczone na podstawie niniejszej pracy, ściśle odpowiadają granicom uzyskanym metodą Roscoe'a [32].

Proponowana metoda opisu makroskopowych charakterystyk mechanicznych kompozytów lepkosprężystych zawsze prowadzi do układu nierówności, które należy rozwiązać względem efektywnych stałych materiałowych. Dla kompozytów, w skład których wchodzą materiały izotropowe, regularnie anizotropowe oraz poprzecznie izotropowe otrzymuje się nierówności, których rozwiązanie, jak wskazują przykłady 1 i 2, nie wymaga pracochłonnych obliczeń. Jest to niewątpliwie duża zaleta metody wariacyjnej, zważywszy że poszukiwania efektywnych własności mechanicznych kompozytów lepkosprężystych metodami statystyczną i samouzgodnionego pola, prowadzą do bardzo skomplikowanych wzorów.

Wykonane przykłady obliczeń numerycznych granic wskazują na zależność wielkości przedziału efektywnych modułów zespolonych od stopnia niejednorodności składników kompozytów lepkosprężystych. W przypadku kiedy części rzeczywiste i urojone modułu zespolonego jednego ze składników są kilkudziesięciokrotnie większe od części rzeczywistych i urojonych modułu zespolonego drugiego składnika, jak to pokazują rysunki 1–6, otrzymujemy stosunkowo wąskie przedziały zmienności makroskopowych własności zespolonych, dla których przyjmujemy, że z dostatecznym przybliżeniem określają dokładne, efektywne charakterystyki lepkosprężyste.

Inny wniosek nasuwa się dla przypadku, w którym części rzeczywiste i urojone modułu zespolonego jednego składnika są przeciętnie kilkaset razy większe od części rzeczywistych i urojonych modułu zespolonego drugiego składnika. Dla tego przypadku uzyskane przedziały zmienności efektywnych własności lepkosprężystych są stosunkowo szerokie i nawet w przybliżeniu nie określają dokładnych makroskopowych charakterystyk mechanicznych. Stąd istotną wadą metody wariacyjnej jest jej nieskuteczność opisu makroskopowego zachowania się drgających harmonicznie kompozytów lepkosprężystych o składnikach charakteryzujących się dużą niejednorodnością własności mechanicznych.

Na gruncie mechaniki sprężystych ośrodków złożonych dowodzi się, że dla niektórych materiałów złożonych uzyskane metodą wariacyjną oszacowania są najlepszymi oszacowaniami, jakie można otrzymać w zależności od udziałów objętościowych oraz własności mechanicznych składników. Tego rodzaju stwierdzeń nie można jednak sformułować dla lepkosprężystych materiałów złożonych, mimo że wyznaczone granice efektywnych własności zespolonych wynikają z najlepszych oszacowań sprężystych. Stąd uzyskane w pracy granice na część rzeczywistą i urojoną nie są najlepszymi oszacowaniami, jakie prawdopodobnie można otrzymać na podstawie udziałów objętościowych i własności mechanicznych składników. Celowe są więc dalsze badania nad możliwością zawężania przedziałów zmienności efektywnych, lepkosprężystych własności zespolonych w zależności od udziałów objętościowych, własności mechanicznych, a także geometrii składników.

Panu Profesorowi dr S. ZAHORSKIEMU wyrażam głeboką wdzięczność za inspirację i niezwykle cenne dyskusje.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. J. BERAN, *Application of statistical theories to heterogenous materials*, Phys. Stat. Sol., **6**, 2, 365, 1971.
2. M. A. BIOT, *Linear thermodynamics and the mechanics of solid*, Proc. 3 rd U.S. Nat. Congr. Appl., **1**, 1958.
3. M. A. BIOT, *Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena*, J. Appl. Phys., **25**, 1385, 1954.
4. V. V. BOŁOTIN i V. H. MOSKALENKO, *K razcziotu makroskopiczeskich postojannych izotropnych materiałow*, M. T. T., **3**, 106, 1969.

5. R. M. Christensen, *Theory of viscoelasticity*, Academic Press, New York and London 1971.
6. R. M. Christensen, *Viscoelastic properties of heterogeneous media*, J. Mech. Phys. Sol., **17**, 23, 1969.
7. T. D. Eshelby, *Progress in solid mechanics*, North Holland, 2, III, edited by Sneddon and R. Hill, 1961.
8. I. D. Eshelby, *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problem*, Proc. Roy Soc., A, **241**, 376, 1957.
9. Z. Hashin, *Complex moduli of viscoelastic composites-I*, Int. J. Sol. Struct., **6**, 539, 1970.
10. Z. Hashin, *Complex moduli of viscoelastic composites-*,II, Inst. J. Sol. Struct., **6**, 797, 1970.
11. Z. Hashin, *Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media*, Appl. Mech. Rev., **17**, 1, 1964.
12. Z. Hashin, *Viscoelastic behaviour of heterogeneous media*, J. Appl. Mech., **32**, 630, 1965.
13. Z. Hashin and S. Shtrikman, *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals*, J. Mech. Phys. Sol., **10**, 343, 1962.
14. Z. Hashin and S. Shtrikman, *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*, J. Mech. Phys. Sol., **11**, 127, 1963.
15. Z. Hashin and S. Shtrikman, *On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity*, J. Mech. Phys. Sol., **10**, 335, 1962.
16. A.V. Hershey, *The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals*, J. Appl. Mech.,**21**, 236, 1954.
17. R. Hill, *A self-consistent mechanics of composite materials*, J. Mech. Phys. Sol., **13**, 213, 1965.
18. R. Hill, *The elastic behaviour of a crystalline aggregate*, Proc. Phys. Soc., **65**, 349, 1952.
19. R. Hill, *Progress in applied mechanics*, Pr. Anniv. Vol., 99, 19463.
20. R. Hill, *Elastic properties of reinforced solids*, J. Mech. Phys. Sol., **11**, 345, 1963.
21. R. Hill, *Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials* — I, J. Mech. Phys. Sol., **12**, 199, 1964.
22. E. Kroner, *Berehnung der elastischen Konstantent des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls*, Z. Phys., **151**, 504, 1958.
23. A. H. Love, *A treatise an the mathematical theory of elasticity*, Dover Publication, New York 1944.
24. W. Nowacki, *Teoria pelzania*, Warszawa 1963.
25. W.A. Łomakin, *O deformirowanii mikronieadnarodnych uprugich tiel*, P. M. M., **29**, 836, 1965.
26. B. Paul, *Prediction of elastic constants of multiphase materials*, Trans A.I.M.E., **218**, 36, 1960.
27. R. Roscoe, *Bounds on the real and imaginary parts of the dynamic moduli of composite viscoelastic system*, J. Mech. Phys. Sol., **17**, 17, 1969.
28. R. Roscoe, *Improved bounds for real and imaginary parts of complex moduli of isotropic viscoelastic compositie*s, J. Mech. Phys. Sol., **20**, 91, 1972.
29. R. Roscoe, *Isotropic composites with elastic or viscoelastic phases: general bounds for the moduli and solutions for special geometries*, Theol. Acta, **12**, 404, 1973.
30. R. A. Schapery, *Stress analysis of viscoelastic composite materials*, J. Compl Mat., **1**, 228, 1967.
31. L. J. Walpole, *On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems*—I, J. Mech. Phys. Sol., **14**, 151, 1966.
32. L. J. Walpole, *On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems*—II, J. Mech. Phys. Sol., **14**, 289, 1966.
33. L. J. Walpole, *On the overall elastic moduli of composite materials*, J. Mech. Phys. Sol., **17**, 235, 1969.
34. S. Tokarzewski, *Ocena dynamicznych własności lepkosprężystych anizotropowych materiałów złożonych*, Prace IPPT, 56, 1975.

Резюме

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ ВЯЗКОУПРУГИХ, АНИЗОТРОПНЫХ, СЛОЖНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Целью настоящей работы является сформулирование метода вариационного описания эффективных механических свойств анизотропных, линейно вязкоупругих композитов, находящихся в состоянии установившихся гармонических колебаний. С этой целью для линейных вязкоупругих материалов сформулированы вариационные принципы, а затем они использованы для определения пределов эггфективных модулей и комплексных податливостей. Рассуждения иллюстрированы двумя примерами расчетов пределов эффективных комплексных модулей для двухкомпонентных композитов, один из которых состоит из поперечно изотропных волокон, второй же из регулярно анизотропного и изтотропного материалов.

STRESZCZENIE

VARIATIONAL METHOD FOR EVALUATION OF THE EFFECTIVE VISCOELASTIC PROPERTIES OF THE ANISOTROPIC COMPOSITE MATERIALS

The paper deals with a formulation of a variational method for description of the effective mechanical properties of linear viscoelastic anisotropic composites being in a state of the stationary harmonic oscillations. In this purpose the variational principles were formulated first for viscoelastic materials and then for evaluation of the limits for effective moduli and complex compliances.

Theoretical considerations are illustrated by two examples of the computation of effective limits of complex moduli for two-component composites one of which is composed of transversally isotropic fibers and second of regularly anisotropic and isotropic materials.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 stycznia 1977 r.