

## WYBOCZENIE SKRĘTNE PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O BISYMETRYCZNYM PRZEKROJU OTWARTYM

CZESŁAW SZYM CZAK (GDAŃSK)

Wykorzystując twierdzenie Castigliano wyprowadzono macierz geometryczną dla skręcania skrepowanego pręta cienkościennego o stałym bisymetrycznym przekroju otwartym. Funkcję opisującą kąt skręcenia przyjęto w postaci rozwiązania równania skręcania skrepowanego. Na przykładzie liczbowym wziętym z pracy [3] potwierdzono wskazaną tam możliwość istnienia większej siły krytycznej dla pręta o zmiennym przekroju niż dla pręta o stałym maksymalnym przekroju. Ponadto podano przykład takiej zmienności przekroju, dla której siła krytyczna jest mniejsza od siły krytycznej pręta o stałym minimalnym przekroju.

### 1. WSTĘP

W monografii [1] podano rozwiązanie zagadnienia wybooczenia skrętnego i giętno-skrętnego dla prętów cienkościennych o stałym przekroju otwartym. W pracach [2 i 3] natomiast wyprowadzono równanie różniczkowe wybooczenia skrętnego prętów o zmiennym bisymetrycznym przekroju otwartym, które rozwiązano za pomocą różnic skończonych. Dla swobodnie podpartego dwuteownika o parabolicznej zmienności pasów otrzymano siłę krytyczną wybooczenia skrętnego większą niż siły krytyczne prętów o stałych ekstremalnych szerokościach półek. Dla sił krytycznych wybooczenia giętnego takiej sytuacji nie zaobserwowano.

W niniejszej pracy sprawdzono ten nieco zaskakujący wynik za pomocą wyprowadzonej macierzy «geometrycznej». Należy przy tym zaznaczyć, że aproksymowano ciągi zmienności pasów dwuteownika za pomocą skokowej zmienności, nie korzystając zatem z równania różniczkowego dla prętów o przekroju zmiennym [2]. Funkcję kąta skręcenia przyjęto w postaci rozwiązania równania skręcania skrepowanego pręta o przekroju stałym [1]. Ponieważ macierz sztywności dla tego typu funkcji kąta skręcenia można znaleźć w pracy [4], ograniczono się jedynie do wyprowadzenia macierzy geometrycznej. Wykorzystano przy tym sposób podany w pracy [5] oparty na twierdzeniu Castigliano.

Należy zwrócić uwagę, że macierz sztywności i macierz geometryczną dla pręta cienkościennego o dowolnym stałym przekroju otwartym wyprowadzono już w pracy [6] posługując się twierdzeniami wariacyjnymi oraz w pracy [7] przy zastosowaniu przemieszczeń wirtualnych. W obu pracach przyjmowano jako funkcje opisujące kąt skręcenia wielomiany stopnia trzeciego, które nie spełniają równania skręcania skrepowanego. Podane w tych pracach przykłady dotyczyły tylko prętów o przekrojach stałych.

Ze względu na pewną kontrowersyjność wyniku, otrzymanego w pracy [3], uznano za celowe niezależne wyprowadzenie macierzy geometrycznej przy opisanych powyżej różnicach. Przyjęto przy tym wszystkie założenia teorii WŁASOWA [1] prętów cienkościennych o nieodkształcalnym przekroju otwartym.

## 2. MACIERZ GEOMETRYCZNA

Rozważmy wycięty element  $ik$  pręta cienkościennego o bisymetrycznym przekroju otwartym (rys. 1). Równanie kąta skręcenia  $\theta(z)$  otrzymano ze znanego równania różniczkowego skręcania skrępowanego [1]

$$(2.1) \quad \frac{d^4 \theta}{dz^4} - k^2 \frac{d^2 \theta}{dz^2} = 0,$$

gdzie  $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$  jest współczynnikiem zanikania,  $GJ_d$  sztywnością czystego skręcania, a  $EJ_\omega$  oznacza sztywność skręcania skrępowanego. Rozwiązanie równania (2.1) spełniające następujące warunki brzegowe na obu końcach pręta  $ik$ :

$$\begin{aligned} \theta = \theta_i, \quad \theta' = \theta'_i & \quad \text{dla } z=0, \\ \theta = \theta_k, \quad \theta' = \theta'_k & \quad \text{dla } z=l, \end{aligned}$$

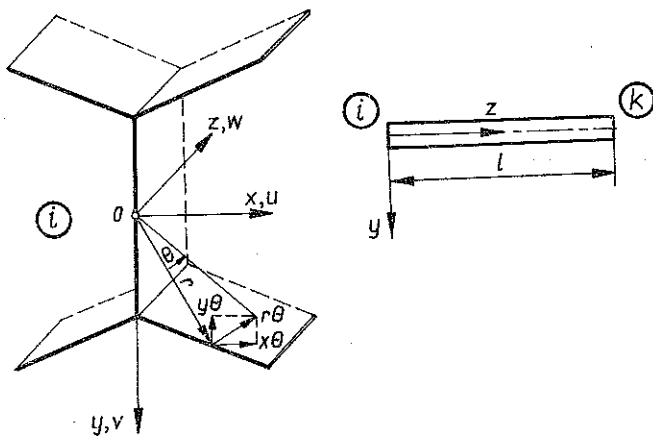
gdzie  $(...)' = d(...)/dz$ , można przedstawić w postaci

$$(2.2) \quad \theta(z) = \Phi^T C q,$$

oraz gdzie

$$\begin{aligned} \Phi^T &= \{ \cosh kz, \quad \sinh kz, \quad kz, \quad 1 \}, \\ q^T &= \{ \theta_i, \quad \theta'_i l, \quad \theta_k, \quad \theta'_k l \} \end{aligned}$$

jest wektorem przemieszczeń węzłowych, a  $C$  jest macierzą kwadratową  $4 \times 4$  współczynników zależnych od  $k$  i  $l$ .



Rys. 1.

Odskształcenie  $\varepsilon_z$  w kierunku osi pręta, przy skończonym kącie skręcenia  $\theta(z)$ , obliczono z ogólnego związku teorii sprężystości:

$$(2.3) \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right],$$

gdzie  $u, v, w$  oznaczają składowe wektora przemieszczenia odpowiednio w kierunku osi  $x, y, z$  (rys. 1).

Pierwszy składnik wzoru (2.3) na podstawie teorii liniowej skręcania skrępowanego [1] można napisać jako

$$(2.4) \quad \frac{\partial w}{\partial z} = w'_0 - \omega \theta'',$$

gdzie  $w_0$  jest odskształceniem osiowym pręta, a  $\omega$  oznacza pole powierzchni końcowej przekroju poprzecznego pręta.

Podstawiając (2.4) i uwzględniając widoczne na rys. 1 związki

$$(2.5) \quad u = y\theta, \quad v = x\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

otrzymano z (2.3)

$$(2.6) \quad \varepsilon_z = w'_0 - \omega \theta'' + \frac{1}{2} r^2 (\theta')^2.$$

Energia sprężysta sił wewnętrznych wynosi

$$(2.7) \quad U = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^l [EA(w'_0)^2 + EJ_\omega(\theta'')^2 + GJ_d(\theta')^2] dz + EJ_0 \int_0^l w'_0(\theta')^2 dz \right\},$$

gdzie  $A$  jest polem przekroju poprzecznego pręta,  $E$  modułem sprężystości, a  $J_0$  oznacza moment biegunowy względem środka ciężkości przekroju. Pierwsze trzy składniki wzoru (2.7) są znane z teorii liniowej i służą do wyznaczenia macierzy sztywności, natomiast ostatni składnik służy do wyprowadzenia macierzy geometrycznej.

Wstawiając pochodną kąta skręcenia (2.2) oraz uwzględniając znany związek

$$(2.8) \quad w'_0 = \frac{P}{EA},$$

gdzie  $P$  jest siłą osiową, z ostatniego składnika (2.7) otrzymano

$$(2.9) \quad \frac{1}{2} EJ_0 \int_0^l w'_0(\theta')^2 dz = \frac{1}{2} Pr^2 \mathbf{q}^T \int_0^l (\mathbf{C}^T \Phi) \Phi^T \mathbf{C} dz \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_G \mathbf{q},$$

gdzie przez  $r^2 = J_0/A$  oznaczono promień bezwładności przekroju poprzecznego, a macierz symetryczna

$$(2.10) \quad \mathbf{k}_G = Pr^2 \int_0^l (\mathbf{C}^T \Phi) \Phi^T \mathbf{C} dz$$

nosi nazwę macierzy geometrycznej. Uzasadnienie tego oznaczenia otrzymamy, znajdując pochodną nieliniowej części energii sprężystej (2.9) względem wektora przemieszczeń węzłowych  $\mathbf{q}$ , która na mocy twierdzenia Castigliano odpowiada wektorowi sił węzłowych  $\mathbf{f}^T = \{H_i, B_i l^{-1}, H_k, B_k l^{-1}\}$ ,

$$(2.11) \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_G \mathbf{q} \right) = \mathbf{k}_G \mathbf{q} = \mathbf{f},$$

gdzie  $H_i, H_k$  oznaczają odpowiednio momenty skrecające w węzłach  $i, k$ , a przez  $B_i, B_k$  oznaczono bimomenty w tych samych węzłach. Wykonując działania opisane wzorem (2.10), otrzymujemy

$$(2.12) \quad \mathbf{k}_G = \frac{P r^2}{l A^2} [\mathbf{k}_{Gij}], \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie

$$A = 2(1 - \cosh \kappa) + \kappa \sinh \kappa,$$

$$\kappa = kl,$$

$$k_{G11} = k_{G33} = -k_{G13} = \kappa (\cosh \kappa - 1) [-6 \sinh \kappa + 2\kappa (2 + \cosh \kappa)],$$

$$k_{G22} = k_{G44} = \frac{1}{\kappa} [2 \sinh \kappa (\cosh \kappa - 1) + 2\kappa (1 - \cosh \kappa) (1 + 2 \cosh \kappa) + \kappa^2 \sinh \kappa (\cosh \kappa + 2) - \kappa^3],$$

$$k_{G12} = k_{G14} = -k_{G23} = -k_{G34} = (\cosh \kappa - 1) [4(1 - \cosh \kappa) + \kappa \sinh \kappa + \kappa^2],$$

$$k_{G24} = \frac{1}{\kappa} [-2 \sinh \kappa (\cosh \kappa - 1) + 6\kappa (\cosh \kappa - 1) - 3\kappa^2 \sinh \kappa + \kappa^3 \cosh \kappa].$$

W podobny sposób można otrzymać macierz sztywności  $\mathbf{k}_L$ , która ma postać [4]

$$(2.13) \quad \mathbf{k}_L = \frac{EJ_\omega}{Al^3} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \kappa^3 \sinh \kappa & \kappa^2 (\cosh \kappa - 1) & -\kappa^3 \sinh \kappa & \kappa^2 (\cosh \kappa - 1) \\ \kappa (\kappa \cosh \kappa - \sinh \kappa) & -\kappa^2 (1 - \cosh \kappa) & \kappa (\sinh \kappa - \kappa) & \kappa (\sinh \kappa - \kappa) \\ \text{SYMETRIA} & & \kappa^3 \sinh \kappa & -\kappa^2 (1 - \cosh \kappa) \\ & & & \kappa (\kappa \cosh \kappa - \sinh \kappa) \end{bmatrix}$$

Rozwijając występujące w (2.12) i (2.13) funkcje hiperboliczne w szeregi potęgowe otrzymujemy wzory na poszczególne elementy macierzy w postaci szeregów przebiegających. Pozostawiając w macierzy sztywności składniki zawierające co najwyżej  $\kappa^2$ , a w macierzy geometrycznej tylko stałe, otrzymamy macierze odpowiadające macierzom z prac [6 i 7], które jak wiadomo otrzymano przyjmując wielomiany trzeciego stopnia jako funkcje opisujące kąt skrecaenia. Mają one postać

$$(2.14) \quad \mathbf{k}_{Gu} = \frac{Pr^2}{I} \begin{bmatrix} 1,2 & 0,1 & -1,2 & 0,1 \\ \dots & \frac{2}{15} & -0,1 & -\frac{1}{30} \\ \dots & \dots & 1,2 & -0,1 \\ \dots & \dots & \dots & \frac{2}{15} \end{bmatrix},$$

$$(2.15) \quad \mathbf{k}_{Lu} = \frac{EJ_{\omega}}{I^3} \begin{bmatrix} 12\left(1 + \frac{\kappa^2}{10}\right) & 6\left(1 + \frac{\kappa^2}{60}\right) & -12\left(1 + \frac{\kappa^2}{10}\right) & 6\left(1 + \frac{\kappa^2}{60}\right) \\ \dots & 4\left(1 + \frac{\kappa^2}{30}\right) & -6\left(1 + \frac{\kappa^2}{60}\right) & 2\left(1 - \frac{\kappa^2}{60}\right) \\ \dots & \dots & 12\left(1 + \frac{\kappa^2}{10}\right) & -6\left(1 + \frac{\kappa^2}{60}\right) \\ \dots & \dots & \dots & 4\left(1 + \frac{\kappa^2}{30}\right) \end{bmatrix}$$

### 3. PRZYKŁADY LICZBOWE

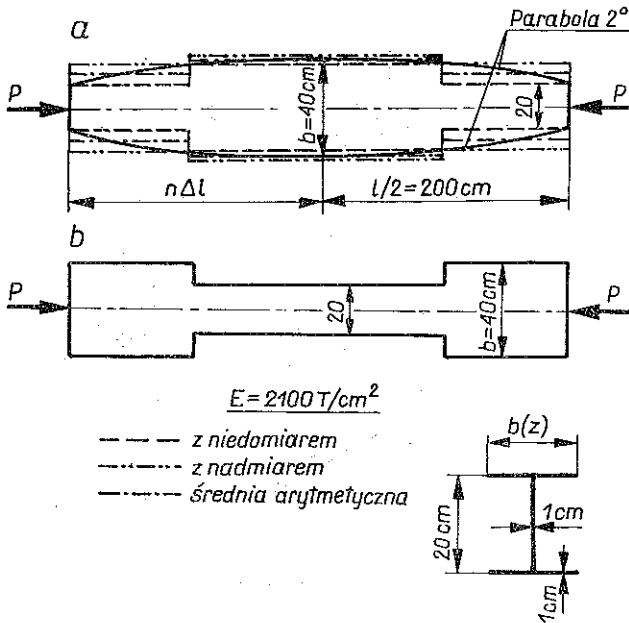
Wyprowadzone macierze posłużą nam do obliczenia sił krytycznych wybočenja skrętnego swobodnie podpartych dwuteowników. Sposób budowy globalnej macierzy sztywności  $\mathbf{K}_L$  i globalnej macierzy geometrycznej  $\mathbf{K}_G$  dla całego pręta oraz realizacja warunków brzegowych jest dobrze znana [5] i nie będzie tutaj przedstawiona. Do obliczenia siły krytycznej  $P$  posłużą nam układ algebraicznych równań jednorodnych

$$(3.1) \quad (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G) \mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  oznacza wektor przemieszczeń węzłowych po zrealizowaniu warunków brzegowych. Siły krytyczne obliczono na podstawie (3.1) za pomocą komputera ODRA 1204.

Jako pierwszy rozpatrzono dwuteownik o parabolicznie zmiennej szerokości półek (rys. 2a), taki sam, jak w pracy [3]. Ciągłą zmienność szerokości półek aproksymowano skokową zmiennością z nadmiarem, z niedomiarem oraz przez średnią arytmetyczną na końcach odcinków (rys. 2a). Ograniczono się do obliczenia najmniejszej wartości siły krytycznej, wykorzystując przy tym symetrię układu. Otrzymane wyniki dla podziału dwuteownika na  $n$  elementów o równej długości przedstawiono w tablicy 1. W pracy [3] przy podziale połowy pręta na 10 elementów otrzymano siłę krytyczną  $P=951$  T.

Dla porównania, obliczona ściśle siła krytyczna dla dwuteownika o stałej minimalnej (20 cm) oraz stałej maksymalnej (40 cm) szerokości półek wynosi odpowiednio 334,3 T oraz 854,0 T. Takie same wyniki otrzymano za pomocą wyprowadzonych macierzy już przy podziale połowy pręta na trzy elementy. Następnie rozpatrzono dwuteownik o odmiennej skokowej zmienności półek (rys. 2b). Siła krytyczna otrzymana przy podziale połowy pręta na sześć elementów o równej długości wynosi  $P=261,8$  T. Na przykładzie dwuteownika przedstawionego na rys. 2, ale o stałej



Rys. 2.

Tablica 1. Siła krytyczna  $P [T]$ 

Ilość elementów $n$	2	4	10
Przybliżenie			
z niedmiarem	626,2	855,6	927,2
średnia arytmetyczna	809,3	910,2	940,4
z nadmiarem	895,2	937,7	950,1

szerokości półek  $b=20$  cm, porównano wyniki obliczeń siły krytycznej za pomocą macierzy opartych na ścisłym rozwiązaniu równania skręcania skrępowanego  $K_L$ ,  $K_G$  z wynikami uzyskanymi za pomocą macierzy uproszczonych  $K_{Lu}$ ,  $K_{Gu}$ . Zestawienie wyników przy podziale całego pręta na  $n$  elementów podano w tablicy 2.

Tablica 2. Siła krytyczna  $P [T]$ 

Ilość elementów $n$	1	2	4	6
Zastosowanie macierzy				
$K_L, K_G$	456,2	338,7	334,6	334,3
$K_{Lu}, K_{Gu}$	371,5	334,6	334,3	334,3

## 4. UWAGI KOŃCOWE

Obliczone na podstawie wyprowadzonej macierzy geometrycznej wielkości sił krytycznych wykazują dobrą zbieżność do wielkości ścisłych. Należy przy tym zwrócić uwagę, że dokładniejsze wyniki otrzymano stosując uproszczone macierze, oparte na aproksymacji kąta skręcenia  $\theta(z)$  wielomianem stopnia trzeciego. Związane jest to ze zwiększeniem wartości wszystkich elementów uproszczonej macierzy geometrycznej w stosunku do macierzy «dokładnej», a tym samym zwiększenia pracy wykonanej przez siłę osiową przy przemieszczeniach pierwszej postaci wyoboczenia skrętnego. W ilorazie Rayleigha

$$P = \min_Q \frac{QK_L Q}{QK_G Q}$$

zwiększa się w ten sposób mianownik w dużo większym stopniu niż licznik, co prowadzi do mniejszych, a tym samym dokładniejszych wartości siły krytycznej. Potwierdzono także wskazaną w pracy [3] możliwość wystąpienia większej siły krytycznej wyoboczenia skrętnego dla dwuteownika o zmiennej szerokości półek niż siła krytyczna dwuteownika o stałej maksymalnej szerokości półek.

Ponadto wskazano przykład (rys. 2b), w którym siła krytyczna dwuteownika o skokowo zmiennej szerokości półek jest mniejsza od siły krytycznej dwuteownika o stałej minimalnej szerokości półek. Należy podkreślić, że dla praktyki inżynierskiej jest to zjawisko bardziej niebezpieczne.

Na zakończenie Autor wyraża podziękowanie Panu mgr M. LIDKE z Instytutu Maszyn Przepływowych (Gdańsk) za pomoc przy obliczeniu przykładów liczbowych.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Государственное Издательство физико-математической Литературы, Москва 1959.
2. Z. CYWIŃSKI, *Równania wyoboczenia skrętnego pręta dwuteowego o zmiennym przekroju bisymetrycznym*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Lądowe, **21**, 162, 19-41, 1970.
3. Z. CYWIŃSKI, C. F. KOLLBRUNNER, *Drillknicken dünnwandiger, I. Stäbe mit veränderlichen doppelt-symmetrischen Querschnitten*, Institut für Bauwissenschaftliche Forschung Verlag Leemann, 18, Zurich 1971.
4. C. F. KOLLBRUNNER, N. HAJDIN, D. KRAJČINOVIC, *Matrix analysis of thinwalled structures*, Institut für bauwissenschaftliche Forschung, Verlag Leemann, 10, Zurich 1969.
5. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill, New-York 1968.
6. R. S. BARSOU, R. H. GALLAGHER, *Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **2**, 3, 335-352, 1970.
7. J. L. MEEK, P. SWANNELL, *Stiffness matrices for beam members including warping torsion effects*, Journal of the Engineering Mechanics Division, **102**, 1, 193-197, 1976.

## Резюме

## КРУТИЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С БИСИММЕТРИЧНЫМ ОТКРЫТЫМ ПРОФИЛЕМ

Представлен вывод геометрической матрицы тонкостенного стержня с бисимметричным открытым профилем. Работа иллюстрирована численным примером определения критической силы двутавра со ступе­чатно переменными полками. Этот пример подтверждает, что критическая сила двутавра с переменным сечением может быть больше, чем критическая сила стержня с постоянным максимальным сечением, как показано в работе [6]. Дан тоже пример такого изменения сечения, для которого критическая сила меньше, чем критическая сила стержня с постоянным минимальным сечением.

## SUMMARY

## TORSIONAL BUCKLING OF THIN-WALLED BARS WITH BISYMMETRIC OPEN CROSS-SECTION

The geometrical stiffness matrix for thin-walled bars with open bisymmetric cross-section is derived. The numerical example given contains the calculation of the critical force of the I-column with a stepwise variability of a flange width. This example confirms the possibility of obtaining critical force for the column with variable cross-section higher than critical force for the column with constant maximum cross-section. The same result has been shown in work [6]. Moreover, the case of variability of the cross-section in which the critical force is lesser than the critical force for the column with constant minimum cross-section is shown.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 21 marca 1977 r.*

---