

## PLYTA SIATKOWA DOWOLNIE OBCIĄŻONA

JAN LEWIŃSKI (WARSZAWA)

W pracy przedstawia się dokładniejszą (w porównaniu ze znanymi) metodę rozwiązania problemu płyty siatkowej obciążonej dowolnie na długości swoich prętów. Przedstawione są kolejno równania równowagi prętów, związki fizyczne i równania równowagi siatki, w których zawarte są wyrazy pochodzące od obciążenia prętów. Wyrazy te określają wpływ obciążenia prętów na wielkość przemieszczeń węzłów siatki oraz na wielkość i charakter przebiegu sił wewnętrznych w płycie siatkowej. Praca ilustrowana jest przykładami szczególnymi siatek biegunowej i prostokątnej.

### 1. WSTĘP

Pojęcie płyty siatkowej zostało wprowadzone w kilku pracach poświęconych rozważaniom nad ośrodkami dyskretnymi, np. w pracach [1, 2, 3 i 4]. W pracy [1] uważa się za płytę siatkową układ zbudowany z prostych prętów o danych sztywnościach na zginanie i skręcanie, połączonych ze sobą na sztywno w węzłach. Przyjęto, że jedna z głównych osi bezwładności przekroju poprzecznego tych prętów leży w płaszczyźnie siatki, utworzonej przez osie środków ciężkości przekrojów poprzecznych wszystkich prętów siatki. Siatkę taką nazwano ściśle płaską. Jeżeli siatka taka jest obciążona układem sił prostopadłych do płaszczyzny siatki oraz układem momentów o wektorach leżących w płaszczyźnie siatki, to stanowi ona płytę siatkową. W cytowanych pracach [1 i 2] przyjmowano, że obciążenie powyższe jest zaczepione wyłącznie w węzłach siatki. Mogą mieć miejsce jednakże przypadki, gdy płyta siatkowa obciążona jest na długości swoich prętów (łączyjących kolejne węzły) zarówno siłami i momentami skupionymi, jak i obciążeniem ciągłym. Można tutaj wskazać dwa typowe przykłady techniczne: płytami siatkowymi są podwozia dużych samochodów ciężarowych oraz elementy nośne wszelkiego rodzaju stropów i przekryć dachowych. W pracy [4] zaproponowano metodę zastępowania tego typu obciążenia zredukowanym układem sił i momentów skupionych w dowolnej liczbie punktów na prętach. Ten sposób nie jest jednak doskonały z dwóch powodów. Przede wszystkim zwiększa w sposób znaczny liczbę równań potrzebnych do rozwiązania zagadnienia, co jest kłopotliwe ze względu na ograniczoną pamięć komputerów. Obliczenia utrudnia problem dokładności otrzymanych rozwiązań w przypadku istnienia obciążenia ciągłego na prętach. Dla oszacowania tej dokładności powinno się każde zadanie rozwiązywać co najmniej dwukrotnie przy zmiennej liczbie punktów redukcji na prętach.

Biorąc to pod uwagę, w tej pracy proponuje się metodę dokładną rozwiązania

problemu płyty siatkowej obciążonej dowolnie na prętach. Ulepszenie metody będzie polegało na możliwości dokładniejszego prześledzenia przebiegu sił i momentów wewnętrznych wzdłuż poszczególnych prętów siatki. Liczba równań opisująca problem i liczba niewiadomych będzie taka sama, jak w zagadnieniu płyty obciążonej wyłącznie w węzłach (będą to te same niewiadome). Różnice w stosunku do tego zagadnienia «klasycznego» wystąpią w budowie równań równowagi prętów, tzw. związków fizycznych oraz równań równowagi samej płyty siatkowej. W związkach tych pojawią się wyrazy pochodzące od obciążenia zewnętrznego, działającego na pręty. W pracy pokazany zostanie sposób obliczania tych wyrazów. Praca jest pomyślana jako rozszerzenie i uzupełnienie prac [2 i 4], stąd jej układ jest podobny do układu prac tamtych z podkreśleniem jednakże elementów nowych. Praca ilustrowana jest przykładami szczególnymi.

## 2. OBCIĄŻENIE PŁYTY. ZMODYFIKOWANE RÓWNANIA RÓWNOWAGI PRĘTÓW

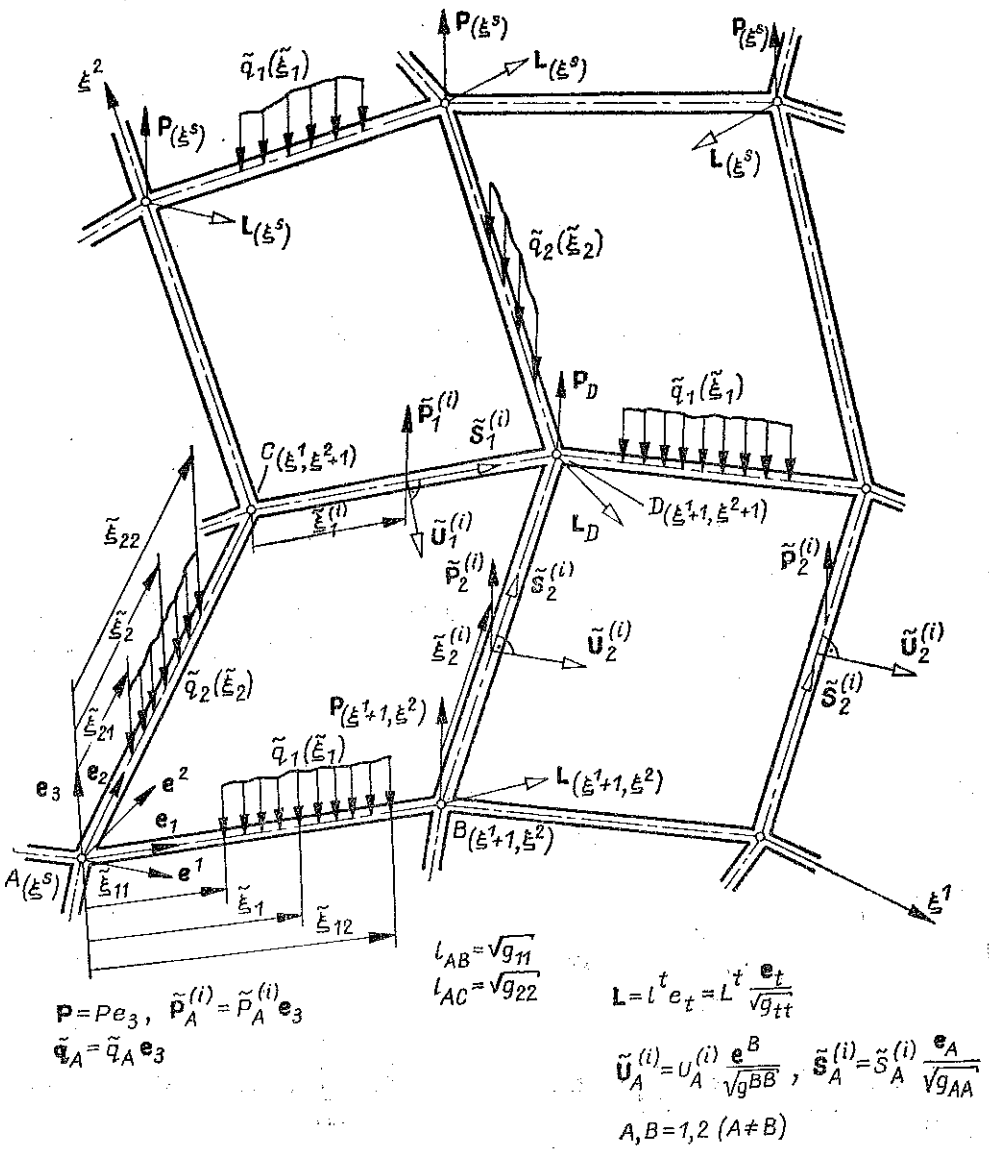
Rozważana będzie płyta siatkowa zbudowana z dwóch rodzin prętów prostych (rys. 1). Jak wiadomo, modelem matematycznym takiej płyty może być model ośrodka dyskretnego opisany w pracy [1]. Zgodnie z tym modelem zakłada się, że płyta opisana jest dyskretnym krzywoliniowym układem współrzędnych  $\xi^s$  ( $s=1, 2$ ); znana jest dla siatki lokalna baza wektorowa  $e_s, e_3, e^t$  ( $t=1, 2$ ), obiekty: podstawowy  $g_{st}$  i wzajemny  $g^{st}$  oraz odpowiadające im współczynniki koneksji  $\Gamma_{sk}^t$  i  $A_{sk}^t$  ( $k=1, 2$ ). (Symbolika i nazewnictwo zaczerpnięto z pracy [1]). Siatka obciążona jest w węzłach i w dowolny sposób na prętach. Obciążenie działające na pręt przedstawia się za pomocą bazy wektorowej zaczepionej w węzle poprzedzającym ten pręt. Obciążenie to mogą stanowić: obciążenie ciągłe  $\tilde{q}_A$  ( $\xi_A$ ) ( $A=1, 2$ ), siły skupione  $\tilde{P}_A^{(i)}$ , momenty gnące skupione  $\tilde{U}_A^{(i)}$ , momenty skręcające skupione  $\tilde{S}_A^{(i)}$ , gdzie  $i=1, 2, 3, \dots, n$ . Położenie tego obciążenia w stosunku do początku danego łącznika określa się za pomocą lokalnej współrzędnej ciągłej  $\tilde{\xi}_A$  (obciążenie ciągłe może być funkcją tej współrzędnej).

Obciążenie zewnętrzne wywołuje odpowiedni stan napięcia wewnątrz w płycie. Przyjmiemy, że stan napięcia będzie określony, jeśli znane będą siły i momenty w przekrojach prętów bezpośrednio przyległych do węzłów.

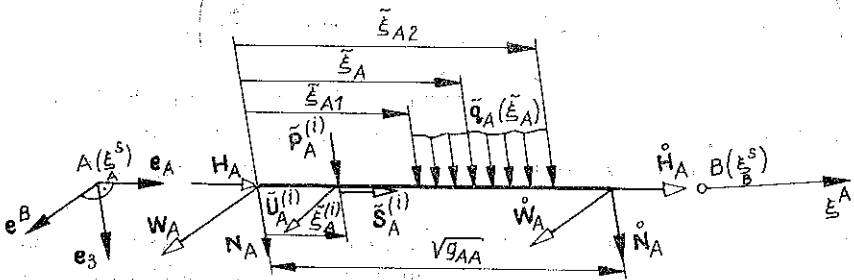
Stan ten można określić za pomocą składowych tzw. podstawowego i wzajemnego stanu napięcia. Rys. 2 przedstawia schemat obciążenia dowolnego pręta, układem sił zewnętrznych jak i składowymi podstawowego stanu napięcia. Ten układ jest w tym przypadku wygodniejszy do analizy, aniżeli układ stosowany w pracy [2 i 4]. Składowe wektorowe tego stanu wyrażają się przez skalary następująco:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{W}_A &= \mathcal{H}_A \frac{\mathbf{e}^B}{\sqrt{g^{BB}}}, & \mathbf{H}_A &= \mathcal{H}_A \frac{\mathbf{e}_A}{\sqrt{g_{AA}}}, & \mathbf{N}_A &= \mathcal{N}_A \mathbf{e}_3, \\ \mathring{\mathbf{W}}_A &= \mathring{\mathcal{H}}_A \frac{\mathbf{e}^B}{\sqrt{g^{BB}}}, & \mathring{\mathbf{H}}_A &= \mathring{\mathcal{H}}_A \frac{\mathbf{e}_A}{\sqrt{g_{AA}}}, & \mathring{\mathbf{N}}_A &= \mathring{\mathcal{N}}_A \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Po obliczeniu tych składowych przebieg sił wewnętrznych wzdłuż długości samych prętów można ustalić, rozwiązując odpowiednie zadanie lokalne znane z teorii belek.



Rys. 1.



Rys. 2.

Związki pomiędzy składowymi podstawowego stanu napięcia a obciążeniem wynikają z warunku równowagi rozpatrywanego pręta:

$$\begin{aligned}
 N_A + \dot{N}_A + \sum_{i=1}^n \tilde{P}_A^{(i)} + \int_{\tilde{\xi}_{A1}}^{\tilde{\xi}_{A2}} \tilde{q}_A(\tilde{\xi}_A) d\tilde{\xi}_A &= 0, \\
 W_A + \dot{W}_A + \sum_{i=1}^n \tilde{U}_A^{(i)} - \mathbf{e}_A \times N_A - \sum_{i=1}^n (\sqrt{g_{AA}} - \xi_A^{(i)}) \frac{\mathbf{e}_A}{\sqrt{g_{AA}}} \times \tilde{P}_A^{(i)} - \\
 - \int_{\tilde{\xi}_{A1}}^{\tilde{\xi}_{A2}} (\sqrt{g_{AA}} - \xi_A) \frac{\mathbf{e}_A}{\sqrt{g_{AA}}} \times \tilde{q}_A(\tilde{\xi}_A) d\tilde{\xi}_A &= 0, \\
 H_A + \dot{H}_A + \sum_{i=1}^n \tilde{S}_A^{(i)} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Równania te stanowią odpowiednią modyfikację analogicznych równań dla zagadnienia klasycznego. Ze związków powyższych wynikają następujące zależności pomiędzy składowymi skalarowymi:

$$\begin{aligned}
 \dot{N}_A &= -\mathcal{N}_A - \mathcal{F}_A, \\
 \dot{W}_A &= -\mathcal{W}_A - \varepsilon_{AB3}^* \sqrt{g_{AA}} \mathcal{N}_A - \mathcal{Z}_A, \\
 \dot{H}_A &= -\mathcal{H}_A - \mathcal{S}_A,
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_A &= \sum_{i=1}^n \tilde{P}_A^{(i)} + \int_{\tilde{\xi}_{A1}}^{\tilde{\xi}_{A2}} \tilde{q}_A(\tilde{\xi}_A) d\tilde{\xi}_A, \\
 \mathcal{Z}_A &= \sum_{i=1}^n \tilde{U}_A^{(i)} + \varepsilon_{AB3}^* \sum_{i=1}^n (\sqrt{g_{AA}} - \xi_A^{(i)}) \tilde{P}_A^{(i)} + \varepsilon_{AB3}^* \int_{\tilde{\xi}_{A1}}^{\tilde{\xi}_{A2}} (\sqrt{g_{AA}} - \xi_A) \tilde{q}_A(\tilde{\xi}_A) d\tilde{\xi}_A, \\
 \mathcal{S}_A &= \sum_{i=1}^n \tilde{S}_A^{(i)}, \\
 \left( \mathbf{F}_A = \mathcal{F}_A \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{Z}_A = \mathcal{Z}_A \frac{\mathbf{e}^B}{\sqrt{g^{BB}}}, \quad \mathbf{S}_A = \mathcal{S}_A \frac{\mathbf{e}_A}{\sqrt{g_{AA}}} \right),
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

gdzie  $\varepsilon_{AB3}^* = \pm 1$  jest symbolem permutacyjnym. Wzorami tymi określone zostały dodatkowe wyrazy pomocnicze wchodzące do równań równowagi prętów, zależne od obciążenia tych prętów. Wyrazy te różnią rozpatrywane zagadnienia od «klasycznego».

Rys. 5 przedstawia ten sam pręt poddany działaniu obciążenia zewnętrznego oraz składowym tzw. wzajemnego stanu napięcia. Składowe wektorowe tego stanu wyrażają się przez składowe następująco:

$$(2.5) \quad M_A = m_A^t e_t, \quad \dot{M}_A = \dot{m}_A^t e_t, \quad Q_A = q_A e_3, \quad \dot{Q}_A = \dot{q}_A e_3,$$

a związek tych składowych ze składowymi podstawowego stanu napięcia jest następujący:

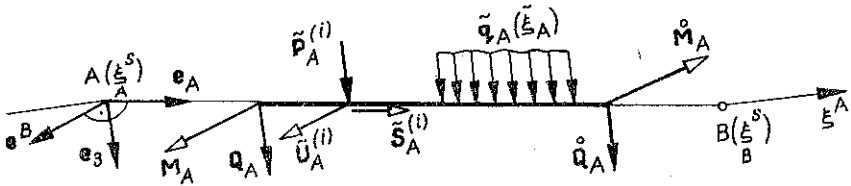
$$(2.6) \quad \begin{aligned} M_A &= W_A + H_A, & Q_A &= N_A, \\ \dot{M}_A &= \dot{W}_A + \dot{H}_A, & \dot{Q}_A &= \dot{N}_A; \end{aligned}$$

skąd wynikają zależności pomiędzy skalarami:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} m_A^t &= \mathcal{W}_A \frac{g^{Bt}}{\sqrt{g^{BB}}} + \mathcal{H}_A \frac{g_A^t}{\sqrt{g_{AA}}}, & q_A &= \mathcal{N}_A, \\ \dot{m}_A^t &= \dot{\mathcal{W}}_A \frac{g^{Bt}}{\sqrt{g^{BB}}} + \dot{\mathcal{H}}_A \frac{g_A^t}{\sqrt{g_{AA}}}, & \dot{q}_A &= \dot{\mathcal{N}}_A, \end{aligned}$$

gdzie  $g_A^t$  oznacza deltę Kroneckera.

Zależności (2.7) będą wykorzystane przy wyprowadzeniu równań równowagi.



Rys. 3.

### 3. STAN PRZEMIESZCZENIA I ODKSZTAŁCENIA PŁYTY. ZWIĄZKI FIZYCZNE

Przyjmijmy za poprzednimi pracami [1 i 2], że stan przemieszczenia płyty będzie określony, gdy znane będą składowe przemieszczeń węzłów płyty siatkowej. Stan ten opisuje się za pomocą następujących funkcji:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} V &= V_{(\xi^S)} = \mathcal{V}_{(\xi^S)} e_3, \\ \Omega &= \Omega_{(\xi^S)} = \Omega_{(\xi^S)}^t e_t = \omega_{(\xi^S)}^t \frac{e_t}{\sqrt{g_{tt}}}. \end{aligned}$$

Stan przemieszczenia samych prętów rozpatrywanej płyty siatkowej można będzie określić za pomocą tych funkcji rozwiązując odpowiednie zagadnienie lokalne (zagadnienie belki na sprężystych podporach). Ze stanem przemieszczenia związany jest odpowiedni stan odkształcenia. Rys. 4 przedstawia odkształcony dowolny pręt siatki. Odkształcenie to wygodniej jest w tym przypadku opisać następującymi funkcjami wektorowymi:

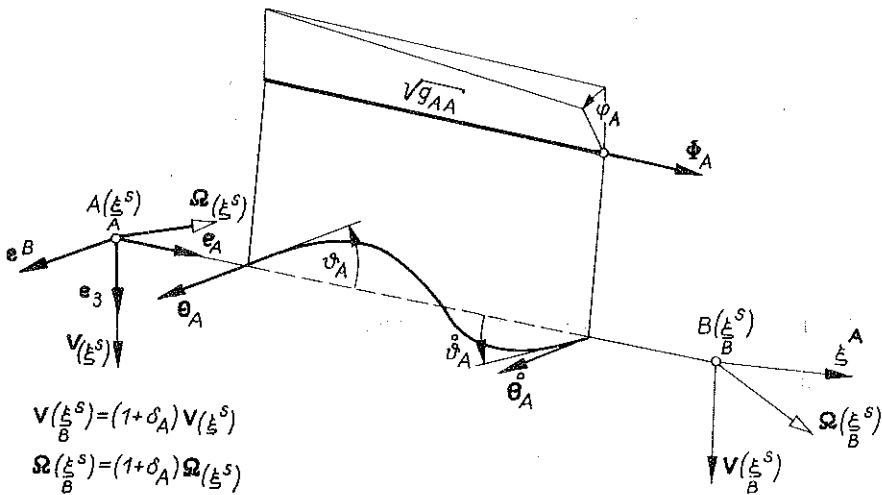
$$(3.2) \quad \theta_A = \vartheta_A \frac{e^B}{\sqrt{g^{BB}}}, \quad \dot{\theta}_A = \dot{\vartheta}_A \frac{e^B}{\sqrt{g^{BB}}}, \quad \Phi = \varphi_A \frac{e_A}{\sqrt{g_{AA}}},$$

gdzie  $\vartheta_A$  i  $\dot{\vartheta}_A$  oznaczają odpowiednie kąty zgięcia danego pręta,  $\varphi_A$  kąt skręcenia tego pręta. Wykazuje się, że wielkości te wyrażają się przez składowe stanu przemieszczenia następująco:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \vartheta_A &= \varepsilon_{AB3}^* \frac{\delta_A \mathcal{V}}{\sqrt{g_{AA}}} + \frac{1}{\sqrt{g^{BB}}} \Omega^B, \\ \dot{\vartheta}_A &= \varepsilon_{AB3}^* \frac{\delta_A \dot{\mathcal{V}}}{\sqrt{g_{AA}}} + \frac{1}{\sqrt{g^{BB}}} (g_s^B + \Gamma_{As}^B) (1 + \delta_A) \Omega^s, \\ \varphi_A &= \frac{g_{At}}{\sqrt{g_{AA}}} [\Gamma_{As}^t + (g_s^t + \Gamma_{As}^t) \delta_A] \Omega^s, \end{aligned}$$

gdzie

$$\delta_A \mathcal{V} = \mathcal{V}_{(\xi^A+1)} - \mathcal{V}_{(\xi^A)}.$$



Rys. 4.

W celu sformułowania związków fizycznych, tzn. zależności między stanem odkształcenia a stanem napięcia wewnętrznego, zastosowana zostanie metoda superpozycji.

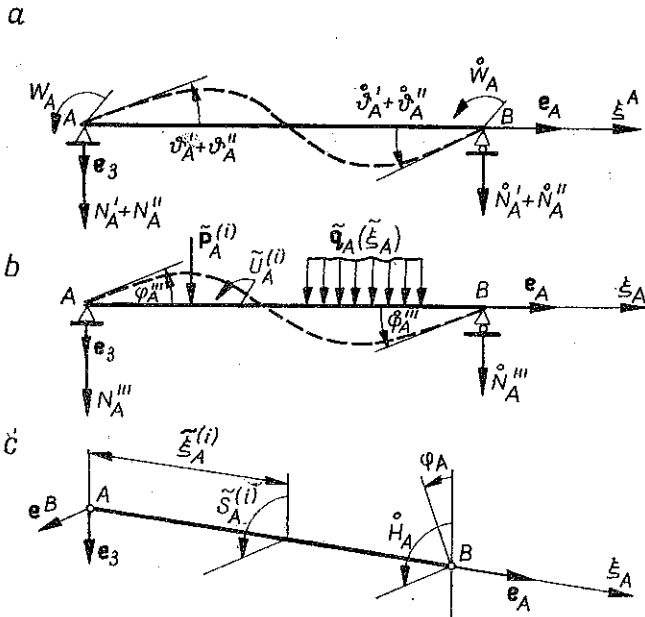
Rys. 5a, b, c stanowią schematy do obliczenia odkształceń. Obciążenia wywołujące zgięcia (których miarą są odpowiednie kąty) stanowią momenty przywęzłowe  $\mathcal{W}_A$  i  $\dot{\mathcal{W}}_A$  (rys. 5a) oraz obciążenie zewnętrzne (rys. 5b). Można więc napisać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \vartheta_A &= \vartheta'_A + \vartheta''_A + \vartheta'''_A, \\ \dot{\vartheta}_A &= \dot{\vartheta}'_A + \dot{\vartheta}''_A + \dot{\vartheta}'''_A. \end{aligned}$$

Odpowiednie kąty wynoszą

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \vartheta'_A &= \frac{\sqrt{g_{AA}}}{3D_A} \mathcal{W}_A, & \vartheta''_A &= -\frac{\sqrt{g_{AA}}}{6D_A} \mathcal{W}_A, \\ \vartheta'''_A &= -\frac{\sqrt{g_{AA}}}{6D_A} \mathcal{W}''_A, & \vartheta''''_A &= \frac{\sqrt{g_{AA}}}{3D_A} \mathcal{W}''_A. \end{aligned}$$

Są to kąty zgięcia wywołane momentami przywęzłowymi. We wzorach tych  $D_A$  oznacza sztywność giętą dowolnego pręta. Są to te same kąty, które występują w pracach [1 i 2]. Kąty  $\vartheta'''_A$  i  $\vartheta''''_A$  są to dodatkowe kąty zgięcia wywołane obciążeniem zewnętrznym. Obliczamy je dowolnym sposobem tak, jak dla belki podpartej zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 5b i obciążonej jak dany pręt. Kąty  $\vartheta'''_A$  i  $\vartheta''''_A$  pokazane na tym rysunku uważamy za dodatnie.



Rys. 5.

W naszej pracy kąty  $\vartheta'''_A$  i  $\vartheta''''_A$  uważane będą za znane. Będą one obliczane dla przykładów szczególnych. Można więc napisać

$$(3.6) \quad D_A \vartheta_A = \frac{\sqrt{g_{AA}}}{6} (2\mathcal{W}_A - \mathcal{W}''_A) + \mathcal{C}_A,$$

$$D_A \vartheta'_A = -\frac{\sqrt{g_{AA}}}{6} (\mathcal{W}_A - 2\mathcal{W}''_A) + \mathcal{C}'_A,$$

gdzie

$$(3.7) \quad \mathcal{C}'_A = D_A \vartheta'''_A, \quad \mathcal{C}_A = D_A \vartheta''''_A.$$

Rys. 5c stanowi schemat służący do określenia kąta skręcania pręta. Zgodnie z tym schematem można napisać

$$(3.8) \quad \varphi_A = \frac{\mathcal{H}_A \sqrt{g_{AA}}}{D_{0A}} + \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{F}_A^{(i)} \xi_A^{(i)}}{D_{0A}} = \varphi'_A + \varphi''_A,$$

gdzie  $D_{0A}$  oznacza sztywność skrętną dowolnego pręta. Symbol  $\varphi'_A$  oznacza kąt skręcania, związany z momentami przywęzłowymi  $\mathcal{H}_A$  i  $\mathcal{H}_{A'}$ , a więc jest tym samym kątem, który występuje w metodzie klasycznej, natomiast  $\varphi''_A$  stanowi dodatkowy kąt pochodzący od obciążenia zewnętrznego danego pręta. Po przekształceniach związek (3.6) i (3.7), uwzględniając wzory (3.3), można przepisać w postaci

$$(3.9) \quad \mathcal{W}_A = \frac{D_A}{\sqrt{g_{AA}}} \left\{ \varepsilon_{AB3}^* \frac{6\delta_A \mathcal{V}}{\sqrt{g_{AA}}} + \frac{2}{\sqrt{g^{BB}}} [g_t^B (3 + \delta_A) + \Gamma_{At}^B (1 + \delta_A)] \Omega^t \right\} - \frac{2}{\sqrt{g_{AA}}} (2\check{\mathcal{C}}_A + \check{\mathcal{C}}_A),$$

$$\mathcal{W}'_A = \frac{D_A}{\sqrt{g_{AA}}} \left\{ 6\varepsilon_{AB3}^* \frac{\delta_A \mathcal{V}}{\sqrt{g_{AA}}} + \frac{2}{\sqrt{g^{BB}}} [g_t^B (3 + 2\delta_A) + 2\Gamma_{tA}^B (1 + \delta_A)] \Omega^t \right\} - \frac{2}{\sqrt{g_{AA}}} (\check{\mathcal{C}}_A + 2\check{\mathcal{C}}_A),$$

$$\mathcal{H}_A = \frac{D_{0A}}{g_{AA}} g_{Ar} [g_t^r \delta_A + \Gamma_{At}^r (1 + \delta_A)] \Omega^t - \frac{1}{\sqrt{g_{AA}}} \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_A^{(i)} \xi_A^{(i)},$$

a wykorzystując wzory (2.3) określić pozostałe składowe podstawowego stanu napięcia:

$$(3.10) \quad \mathcal{N}_A = -\frac{6D_A \varepsilon_{AB3}^*}{g_{AA}} \left\{ 2 \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \mathcal{V} + \frac{1}{\sqrt{g^{BB}}} [g_t^B (2 + \delta_A) + \Gamma_{At}^B (1 + \delta_A)] \Omega^t \right\} + \frac{6\varepsilon_{AB3}^* (\check{\mathcal{C}}_A + \check{\mathcal{C}}_A)}{g_{AA}} - \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{\sqrt{g_{AA}}} \mathcal{Z}_A,$$

$$\mathcal{N}'_A = \frac{6D_A \varepsilon_{AB3}^*}{g_{AA}} \left\{ 2 \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \mathcal{V} + \frac{1}{\sqrt{g^{BB}}} [g_t^B (2 + \delta_A) + \Gamma_{At}^B (1 + \delta_A)] \Omega^t \right\} - \frac{6\varepsilon_{AB3}^* (\check{\mathcal{C}}_A + \check{\mathcal{C}}_A)}{g_{AA}} + \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{\sqrt{g_{AA}}} \mathcal{Z}_A - \mathcal{F}_A,$$

$$\mathcal{H}'_A = -\frac{D_{0A}}{g_{AA}} g_{Ar} [g_t^r \delta_A + \Gamma_{At}^r (1 + \delta_A)] \Omega^t + \frac{1}{\sqrt{g_{AA}}} \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_A^{(i)} \xi_A^{(i)} - \mathcal{F}_A.$$

Wzory powyższe różnią się od analogicznych wzorów napisanych dla zagadnienia klasycznego wyrazami pochodzącymi od obciążenia zewnętrznych prętów. Te dodat-



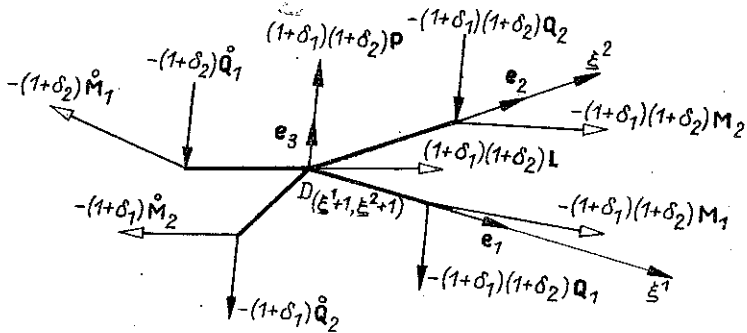
kowe wyrazy stanowiąc będą wielkości pomocnicze, obliczane dla konkretnych siatek i obciążeń. W przypadku braku obciążenia zewnętrznego wyrazy te przyjmują tożsamościowo wartość zero, a odpowiednie wzory przechodzą we wzory znane z rozwiązania [2].

4. RÓWNANIA RÓWNOWAGI PŁYTY SIATKOWEJ

Zgodnie z metodą przyjętą za pracę [1], równaniami tymi stają się równania równowagi dowolnego węzła ( $\xi^s+1$ ). Rys. 6 przedstawia układ sił działających na taki węzeł. Wektorowe równania równowagi tego węzła mają postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (1 + \delta_A)(1 + \delta_B) \mathbf{Q}_A + (1 + \delta_B) \dot{\mathbf{Q}}_A &= (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \mathbf{P}, \\ (1 + \delta_A)(1 + \delta_B) \mathbf{M}_A + (1 + \delta_B) \dot{\mathbf{M}}_A &= (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \mathbf{L}, \end{aligned}$$

gdzie  $A, B=1, 2, A \neq B$ , (sumować po  $A$ ).



Rys. 6.

W postaci skalarowej byłyby to układ trzech równań z sześcioma niewiadomymi składowymi wzajemnego stanu napięcia. Przyjmując metodę rozwiązania w przemieszczeniach, równania te doprowadza się do następującej postaci operatorowej:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} E_A \mathcal{V} + E_{At} \Omega^t &= E_0 P + E_{A0}, \\ E_A^T \mathcal{V} + E_{At}^T \Omega^t &= E_{0t}^T I^t + E_{A0}^T \quad (T=1, 2). \end{aligned}$$

Poszczególne operatory mają postać następującą:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} E_A &= -12(1 + \delta_B) \delta_A \frac{D_A}{(\sqrt{g_{AA}})^3} \delta_A, \\ E_{At} &= -6\epsilon_{AB3}^* (1 + \delta_B) \delta_A \frac{D_A}{g_{AA} \sqrt{g^{BB}}} [g_t^B (2 + \delta_A) + \Gamma_{tA}^B (1 + \delta_A)], \\ E_A^T &= 6\epsilon_{AB3}^* (g_r^T + \Gamma_{rB}^T) (1 + \delta_B) [(g_t^r + \Gamma_{tA}^r) (1 + \delta_A) g^{Bt} + g^{Br}] \frac{D_A}{g_{AA} \sqrt{g^{BB}}} \delta_A, \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad E_{A_i}^T = (g_r^T + \Gamma_{rB}^T)(1 + \delta_B) \left\{ (g_s^r + \Gamma_{sA}^r)(1 + \delta_A) \frac{D_A}{\sqrt{g_{AA}}} \left\{ 6 \frac{g^{Bs}}{g^{BB}} g_i^B + \left( 2 \frac{g^{Bs}}{g^{BB}} g_i^B - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{D_{0A}}{D_A} \frac{g_A^s g_{A1}}{g_{AA}} \right) [g_i^s \delta_A + \Gamma_{iA}^s (1 + \delta_A)] \right\} + \frac{D_A}{\sqrt{g_{AA}}} \left\{ 6 \frac{g^{Br}}{g^{BB}} g_i^B + \right. \\ \left. + \left( 4 \frac{g^{Br}}{g^{BB}} g_i^B + \frac{D_{0A}}{D_A} \frac{g_r^A g_{A1}}{g_{AA}} \right) [g_i^r \delta_A + \Gamma_{iA}^r (1 + \delta_A)] \right\} \right\},$$

$$E_{0i}^T = (g_r^T + \Gamma_{r2}^T)(1 + \delta_2)(g_i^r + \Gamma_{i1}^r)(1 + \delta_1), \quad E_0 = (1 + \delta_1)(1 + \delta_2),$$

$$E_{A0} = (1 + \delta_B) \left\{ \mathcal{F}_A + \varepsilon_{AB3} \delta_A \left[ -\frac{6(\check{\mathcal{C}}_A + \check{\mathcal{C}}_A)}{g_{AA}} + \frac{\mathcal{Z}_A}{\sqrt{g_{AA}}} \right] \right\},$$

$$E_{A0}^T = -(g_r^T + \Gamma_{rB}^T)(1 + \delta_B) \left\{ (g_i^r + \Gamma_{iA}^r)(1 + \delta_B) \left[ -\frac{2g^{Br}}{\sqrt{g_{AA}g^{BB}}} (2\check{\mathcal{C}}_A + \check{\mathcal{C}}_A) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{g_A^r}{\sqrt{g_{AA}}} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{F}_A^{(i)} \xi_A^{(i)}}{\sqrt{g_{AA}}} - \mathcal{F}_A \right) \right] - \left[ \frac{2g^{Br}}{\sqrt{g_{AA}g^{BB}}} (\check{\mathcal{C}}_A + 2\check{\mathcal{C}}_A) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{g_A^r}{g_{AA}} \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_A^{(i)} \xi_A^{(i)} \right] \right\}.$$

Operatory  $E_{A0}$  i  $E_{A0}^T$  określają dodatkowe wyrazy, które różnią układ równań (4.2) od analogicznych równań dla zagadnienia klasycznego. Należy zaznaczyć, że postać pozostałych operatorów jest znana ([1 i 2]). Wymienione operatory  $E_{A0}$  i  $E_{A0}^T$  określają wpływ różnorodnego obciążenia działającego na pręty — na warunki równowagi węzłów rozpatrywanej płyty siatkowej. Liczba równań (4.3) jest dla danej siatki taka sama jak w zagadnieniu klasycznym. Oznacza to, że przy tej samej liczbie równań i tych samych niewiadomych uwzględniony został wpływ różnorodnego obciążenia prętów na wielkość tych niewiadomych (przemieszczeń węzłów siatki), a zarazem na rozkład sił wewnętrznych w siatce.

Całość obliczeń dla przypadków szczególnych siatek i obciążenia daje się łatwo zaprogramować na komputer, co ułatwia obliczenia. Równania (4.3) trzeba w tym przypadku przedstawić w postaci algebraicznej, zamieniając odpowiednie przyrosty różnicami oraz uzupełniając równaniami brzegowymi. Sposób budowy równań brzegowych jest omówiony w pracy [1] i nie będzie ponownie przytaczany.

## 5. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

### 5.1. Płyta siatkowa biegunowa

Rozpatrzony zostanie szczególny przypadek płyty siatkowej geometrycznie biegunowo-symetrycznej oraz biegunowo-symetrycznie obciążonej (rys. 7). Oznacza to, że wszystkie wielkości związane z tą płytą są funkcją jedynie współrzędnej promie-

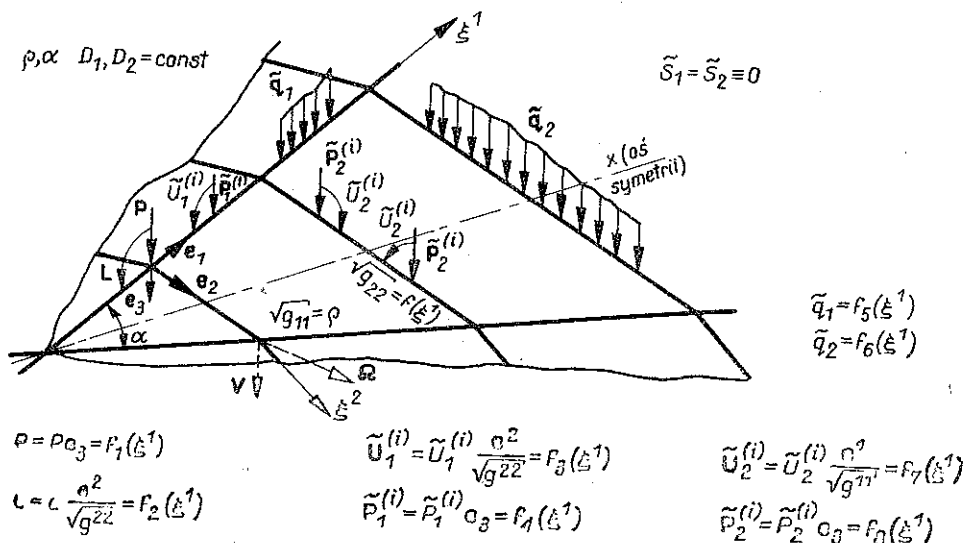
niowej  $\xi^1$ . Przyjmiemy dodatkowo, że obciążenie zewnętrzne jest symetryczne względem osi  $x$  (rys. 7). Zakładamy, że kształt siatki, jej metryka oraz współczynniki koneksji są znane [1]. Stan przemieszczenia będzie w tym przypadku określony następująco:

$$(5.1) \quad \mathbf{V} = \mathcal{V} \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{\Omega} = \omega \frac{\mathbf{e}^2}{\sqrt{g^{22}}},$$

czyli

$$\Omega^1 = \omega \frac{g^{21}}{\sqrt{g^{22}}}, \quad \Omega^2 = \omega \sqrt{g^{22}},$$

gdzie  $\omega$  oznacza kąt obrotu węzłów siatki.



Rys. 7.

Związki fizyczne przyjmą w tym przypadku postać

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \frac{6D_1}{\rho^2} \delta_1 \mathcal{V} + \frac{2D_1}{\rho} (3 + \delta_1) \omega - \frac{2}{\rho} (2\mathcal{C}_1 + \dot{\mathcal{C}}_1), \\ \mathcal{W}'_1 &= \frac{6D_1}{\rho^2} \delta_1 \mathcal{V} + \frac{2D_1}{\rho} (3 + 2\delta_1) \omega - \frac{2}{\rho} (\mathcal{C}_1 + 2\dot{\mathcal{C}}_1), \\ \mathcal{W}_2 &= -\mathcal{W}'_2 = \frac{D_2}{\rho} \frac{\omega}{\xi^1} - \frac{\mathcal{C}_2}{\rho \xi^1 \sin \frac{\alpha}{2}}, \\ \mathcal{N}_1 &= -\frac{12D_1}{\rho^3} \delta_1 \mathcal{V} - \frac{6D_1}{\rho^2} (2 + \delta_1) \omega + \frac{6}{\rho^2} (\mathcal{C}_1 + \dot{\mathcal{C}}_1) - \frac{1}{\rho} \mathcal{X}_1, \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \begin{matrix} \dot{\mathcal{N}}_1 = -\mathcal{N}_1 - \mathcal{F}_1, \\ \text{[c.d.]} \end{matrix} \quad \mathcal{N}_2 = \dot{\mathcal{N}}_2 = -\frac{1}{2} \mathcal{F}_2.$$

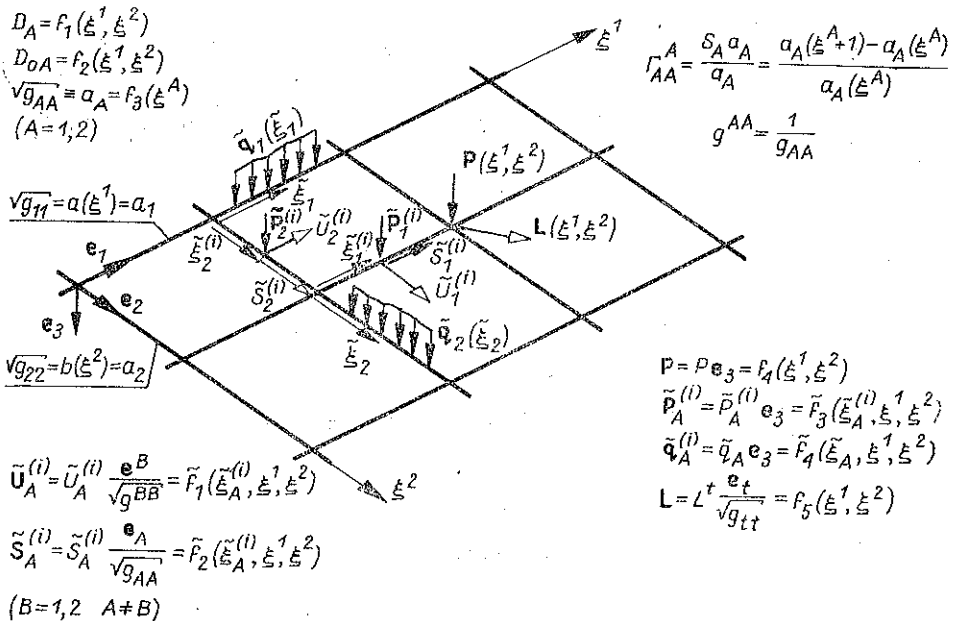
Układ równań równowagi sprowadza się do dwóch równań następującej postaci:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} -\frac{12D_1}{\rho^3} \delta_1 \delta_1 \mathcal{V} - \frac{6D_1}{\rho^2} (2 + \delta_1) \delta_1 \omega &= (1 + \delta_1) \mathcal{P} + \mathcal{F}_1 + (1 + \delta_1) \mathcal{F}_2 + \\ &+ \frac{\delta_1 \mathcal{L}_1}{\rho} - \frac{6}{\rho^2} \delta_1 (\mathcal{C}_1 + \dot{\mathcal{C}}_1), \\ \frac{2D_1}{\rho} \left[ (6 + 6\delta_1 + \delta_1 \delta_1) + \frac{D_2}{D_1} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \xi^1} (1 + \delta_1) \right] \omega &+ \frac{6D_1}{\rho^2} (2 + \delta_1) \delta_1 \mathcal{V} = \\ &= (1 + \delta_1) \mathcal{L} + \frac{2}{\rho} (1 + \delta_1) (2\mathcal{C}_1 + \dot{\mathcal{C}}_1) + \frac{2}{\rho} (\mathcal{C}_1 + 2\dot{\mathcal{C}}_1) + \frac{2}{\rho} \frac{(1 + \delta_1) \mathcal{C}_2}{1 + \xi^1}. \end{aligned}$$

W pracy [4] rozwiązany został w sposób przybliżony, metodą klasyczną, przypadek płyty siatkowej biegunowej obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym. Płytę tę rozwiązujemy ponownie stosując wyżej podane równania w celu określenia błędu poprzedniego rozwiązania. Błąd ten wynosi 16,65%. Wskazuje to na potrzebę dokładnego rozwiązywania tego typu siatek.

### 5.2. Płyta siatkowa prostokątna

Rozpatrzona zostanie płyta siatkowa prostokątna o dowolnym kształcie i dowolnie obciążona (rys. 8). W tym przypadku wszystkie wielkości związane z płytą



Rys. 8.

będą funkcją dwu zmiennych  $\xi^1$  i  $\xi^2$ . Stan przemieszczenia, podobnie jak dla przypadku ogólnego, będzie określony następująco:

$$(5.4) \quad \mathbf{V} = \mathcal{V} \mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega^i \mathbf{e}_i = \omega^i \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

czyli

$$\Omega^1 = \frac{1}{a(\xi^1)} \omega^1, \quad \Omega^2 = \frac{1}{b(\xi^2)} \omega^2,$$

gdzie  $\omega^1, \omega^2$  oznaczają kąty obrotu węzłów.

Związki fizyczne przyjmują w tym przypadku postać:

$$\mathcal{W}_A = \frac{D_A}{a_A} \left[ 6 \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{a_A} \delta_A \mathcal{V} + 2(3 + \delta_A) \omega^B \right] - \frac{2}{a_A} (2\tilde{\mathcal{C}}_A + \overset{\circ}{\mathcal{C}}_A),$$

$$\mathcal{W}_A^{\circ} = \frac{D_A}{a_A} \left[ 6 \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{a_A} \delta_A \mathcal{V} + 2(3 + 2\delta_A) \omega^B \right] - \frac{2}{a_A} (\tilde{\mathcal{C}}_A + 2\overset{\circ}{\mathcal{C}}_A),$$

$$\mathcal{H}_A = -\frac{D_{0A}}{a_A} \delta_A \omega^A + \frac{1}{a_A} \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_A^{(i)} \xi_A^{(i)} - \mathcal{F}_A,$$

$$(5.5) \quad \mathcal{H}_A^{\circ} = \frac{D_{0A}}{a_A} \delta_A \omega^A - \frac{1}{a_A} \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_A^{(i)} \xi_A^{(i)},$$

$$\mathcal{N}_A = -\frac{6D_A \varepsilon_{AB3}^*}{(a_A)^2} \left[ 2 \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{a_A} \delta_A \mathcal{V} + (2 + \delta_A) \omega^B \right] + \frac{6(\tilde{\mathcal{C}}_A + \overset{\circ}{\mathcal{C}}_A)^*}{(a_A)^2} \varepsilon_{AB3} - \frac{\mathcal{L}_A^* \varepsilon_{AB3}}{a_A},$$

$$\mathcal{N}_A^{\circ} = \frac{6D_A \varepsilon_{AB3}^*}{(a_A)^2} \left[ 2 \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{a_A} \delta_A \mathcal{V} + (2 + \delta_A) \omega^B \right] - \frac{6(\tilde{\mathcal{C}}_A + \overset{\circ}{\mathcal{C}}_A)^*}{(a_A)^2} \varepsilon_{AB3} + \frac{\mathcal{L}_A^{\circ*} \varepsilon_{AB3}}{a_A} - \mathcal{F}_A^{\circ}.$$

Układ równań równowagi sprowadza się do trzech równań o następującej postaci ( $\psi = 1, 2, 3$ ):

$$(5.6) \quad A_1^{\psi} \mathcal{V}_{(\xi^1, \xi^2+1)} + A_2^{\psi} \mathcal{V}_{(\xi^1+1, \xi^2)} + A_3^{\psi} \mathcal{V}_{(\xi^1+1, \xi^2+1)} + \\ + A_4^{\psi} \mathcal{V}_{(\xi^1+2, \xi^2+1)} + A_5^{\psi} \mathcal{V}_{(\xi^1+1, \xi^2+2)} + B_1^{\psi} \omega^2_{(\xi^1, \xi^2+1)} + B_2^{\psi} \omega^2_{(\xi^1+1, \xi^2)} + \\ + B_3^{\psi} \omega^2_{(\xi^1+1, \xi^2+1)} + B_4^{\psi} \omega^2_{(\xi^1+2, \xi^2+1)} + B_5^{\psi} \omega^2_{(\xi^1+1, \xi^2+2)} + \\ + C_1^{\psi} \omega^1_{(\xi^1, \xi^2+1)} + C_2^{\psi} \omega^1_{(\xi^1+1, \xi^2)} + C_3^{\psi} \omega^1_{(\xi^1+1, \xi^2+1)} + \\ + C_4^{\psi} \omega^1_{(\xi^1+2, \xi^2+1)} + C_5^{\psi} \omega^1_{(\xi^1+1, \xi^2+2)} = E_0^{\psi}.$$

gdzie

$$A_1^1 = -12 \frac{D_{1(\xi^1, \xi^2+1)}}{a^3(\xi^1)}, \quad A_2^1 = -12 \frac{D_{2(\xi^1+1, \xi^2)}}{b^3(\xi^2)}, \quad A_4^1 = -12 \frac{D_{1(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a^3(\xi^1+1)},$$

$$A_5^1 = -12 \frac{D_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b^3(\xi^2+1)}, \quad A_3^1 = -(A_1^1 + A_2^1 + A_4^1 + A_5^1),$$

$$B_1^1 = 6 \frac{D_{1(\xi^1, \xi^2+1)}}{a^2(\xi^1)}, \quad B_2^1 = 0, \quad B_4^1 = -6 \frac{D_{1(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a^2(\xi^1+1)},$$

$$B_3^1 = B_1^1 + B_4^1, \quad B_5^1 = 0,$$

$$C_1^1 = 0, \quad C_2^1 = -6 \frac{D_{2(\xi^1+1, \xi^2)}}{b^2(\xi^2)}, \quad C_4^1 = 0, \quad C_5^1 = 6 \frac{D_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b^2(\xi^2+1)},$$

$$C_3^1 = C_2^1 + C_5^1;$$

$$A_1^2 = -6 \frac{D_{1(\xi^1, \xi^2+1)}}{a^2(\xi^1)}, \quad A_2^2 = 0, \quad A_4^2 = 6 \frac{D_{1(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a^2(\xi^2+1)},$$

$$A_3^2 = -(A_1^2 + A_4^2), \quad A_5^2 = 0,$$

$$B_1^2 = 2 \frac{D_{1(\xi^1, \xi^2+1)}}{a(\xi^1)}, \quad B_2^2 = -\frac{D_{02(\xi^1+1, \xi^2)}}{b(\xi^2)},$$

$$(5.7) \quad B_3^2 = 4 \left( \frac{D_{1(\xi^1, \xi^2+1)}}{a(\xi^1)} + \frac{D_{1(\xi^1+1, \xi^2)}}{a(\xi^1+1)} \right) + \frac{D_{02(\xi^1+1, \xi^2)}}{b(\xi^2)} + \frac{D_{02(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b(\xi^2+1)},$$

$$B_4^2 = 2 \frac{D_{1(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a(\xi^1+1)}, \quad B_5^2 = -\frac{D_{02(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b(\xi^2+1)},$$

$$C_1^2 = C_2^2 = C_3^2 = C_4^2 = C_5^2 = 0,$$

$$A_1^3 = 0, \quad A_2^3 = 6 \frac{D_{2(\xi^1+1, \xi^2)}}{b^2(\xi^2)}, \quad A_4^3 = 0, \quad A_5^3 = -6 \frac{D_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b^2(\xi^2+1)},$$

$$A_3^3 = -(A_2^3 + A_5^3),$$

$$B_1^3 = B_2^3 = B_3^3 = B_4^3 = B_5^3 = 0, \quad C_1^3 = -\frac{D_{01(\xi^1, \xi^2+1)}}{a(\xi^1)},$$

$$C_2^3 = 2 \frac{D_{2(\xi^1+1, \xi^2)}}{b(\xi^2)}, \quad C_5^3 = 2 \frac{D_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b(\xi^2+1)},$$

$$C_3^3 = 4 \left( \frac{D_{2(\xi^1+1, \xi^2)}}{b(\xi^2)} + \frac{D_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b(\xi^2+1)} \right) + \left( \frac{D_{01(\xi^1, \xi^2+1)}}{a(\xi^1)} + \frac{D_{01(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a(\xi^1+1)} \right),$$

$$C_4^3 = -\frac{D_{01(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a(\xi^1+1)},$$

$$(5.7) E_0^1 = \mathcal{P}_{(\xi^1+1, \xi^2+1)} + \mathcal{F}_{1(\xi^1, \xi^2+1)} + \mathcal{F}_{2(\xi^1+1, \xi^2)} + \frac{\mathcal{L}_{1(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1+1)}} - \frac{\mathcal{L}_{1(\xi^1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1)}} -$$

$$[\text{ed.}] - \frac{\mathcal{L}_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{(\xi^2+1)}} + \frac{\mathcal{L}_{2(\xi^1+1, \xi^2)}}{b_{(\xi^2)}} - 6 \frac{(\mathcal{C}_1 + \overset{\circ}{\mathcal{C}}_1)_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a^2_{(\xi^1+1)}} +$$

$$+ 6 \frac{(\mathcal{C}_1 + \overset{\circ}{\mathcal{C}}_1)_{(\xi^1, \xi^2+1)}}{a^2_{(\xi^1)}} + 6 \frac{(\mathcal{C}_2 + \overset{\circ}{\mathcal{C}}_2)_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b^2_{(\xi^2+1)}} - 6 \frac{(\mathcal{C}_2 + \overset{\circ}{\mathcal{C}}_2)_{(\xi^1+1, \xi^2)}}{b^2_{(\xi^2)}}$$

$$E_0^2 = \mathcal{L}^2_{(\xi^1+1, \xi^2+2)} + \mathcal{L}_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \mathcal{P}_2^{(i)} \xi_2^{(i)}\right)_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{(\xi^1+1)}} +$$

$$+ \frac{\left(\sum_{i=1}^n \mathcal{P}_2^{(i)} \xi_2^{(i)}\right)_{(\xi^1+1, \xi^2)}}{b_{(\xi^2)}} + 2 \frac{(2\mathcal{C}_1 + \overset{\circ}{\mathcal{C}}_1)_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1+1)}} + 2 \frac{(\mathcal{C}_1 + 2\overset{\circ}{\mathcal{C}}_1)_{(\xi^1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1)}}$$

$$E_0^3 = \mathcal{L}^1_{(\xi^1+1, \xi^2+1)} + \mathcal{L}_{1(\xi^1+1, \xi^2+1)} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \mathcal{P}_1^{(i)} \xi_1^{(i)}\right)_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1+1)}} +$$

$$+ \frac{\left(\sum_{i=1}^n \mathcal{P}_1^{(i)} \xi_1^{(i)}\right)_{(\xi^1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1)}} + 2 \frac{(2\mathcal{C}_2 + \overset{\circ}{\mathcal{C}}_2)_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{(\xi^2+1)}} + 2 \frac{(\mathcal{C}_2 + 2\overset{\circ}{\mathcal{C}}_2)_{(\xi^1+1, \xi^2)}}{b_{(\xi^2)}}$$

W równaniach tych  $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2$  oznaczają momenty zewnętrzne. Równania zapisane w tej postaci nadają się do analizy numerycznej na komputerach.

### 6. UWAGI KOŃCOWE

Celem pracy było przedstawienie dokładnej metody obliczania płyt siatkowych dowolnie obciążonych na długości swoich prętów. Przyjmując metodę postępowania znaną z prac np. [2 i 4], przedstawiono kolejno związki fizyczne i równania równowagi siatki zawierające wyrazy pochodzące od dowolnego obciążenia działającego na pręty. Podanie tych wyrazów odróżnia rozpatrywane zagadnienie od zagadnienia, w którym zakładano, że obciążenie działa wyłącznie na węzły. Otrzymana liczba równań równowagi jest taka sama, jak i we wspomnianym zagadnieniu klasycznym. Te same są również niewiadome. Ułatwia to ocenę wpływu różnorodnego obciążenia prętów na wielkość tych niewiadomych (przemieszczeń węzłów siatki) jak i na wielkość i charakter przebiegu sił wewnętrznych w płytach siatkowych. Opisana metoda jest metodą przemieszczeniową. Otrzymane równania dla siatek: biegunowej i prostokątnej nadają się szczególnie do analizy numerycznej na maszynach cyfrowych. Praca będzie wykorzystana do obliczenia konkretnych konstrukcji inżynierskich.

### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *The bending problem of plate grates of discrete structures*, AMS, 22, 2, 1970.

3. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
4. J. LEWIŃSKI, *Zagadnienie płyty siatkowej obciążonej w węzłach i między węzłami*, Rozpr. Inż., 22, 2, 1974.

## Резюме

## СЕТЧАТАЯ ПЛИТА ПРОИЗВОЛЬНО НАГРУЖЕННАЯ

В работе приведён более точный (по сравнению с уже известными) метод решения задачи сетчатой плиты, произвольно нагруженной вдоль длины стержня. Представлены последовательно уравнения равновесия стержней, физические соотношения и уравнения равновесия сетки, в которых содержатся члены происходящие от нагружения стержней. Эти члены определяют влияние нагрузки стержней на величину перемещений узлов сетки, а также на величину и характер распределения внутренних сил в сетчатой плите. Работа иллюстрирована частными примерами полярной и ортогональной сеток.

## SUMMARY

## GRID PLATE ARBITRARILY LOADED

The paper deals with a new method (of which is more exact in comparison to known approaches) of solution of a grid plate loaded arbitrarily along the length of the rods. The equilibrium equations for rods, constitutive and equilibrium equations for the grid, in which the terms resulting from loading of rods are taken into account, were derived consecutively. These terms determine an influence of the rod loadings on the magnitude for displacement of the grid nodes and on the magnitude and character of distribution of internal forces in the grid plate. The paper is illustrated by examples of polar and rectangular grids.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 lutego 1977 r.*

---