

STATYCZNE ZAGADNIENIE SZCZELINY DWUWYMIAROWEJ W LINIOWYM OŚRODKU COSSERATÓW ZE SWOBODNYMI OBROTAMI

STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

W pracy rozważono w ramach liniowej teorii niesymetrycznej sprężystości dla ośrodka ze swobodnymi obrotami jednorodną, izotropową i centrosymetryczną przestrzeń zawierającą szczelinę w obszarze $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{R}^3; x_1 = 0; -a \leq x_2 \leq a, x_3 \in \mathcal{R}\}$. Przyjęto, że szczelina jest rozciągana stałym ciśnieniem przyłożonym prostopadle i symetrycznie do górnej i dolnej jej powierzchni. Zagadnienie to sprowadzono do mieszanego zagadnienia brzegowego dla półpłaszczyzny $D = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 \in \mathcal{R}\}$. Stosując metodę transformacji Fouriera, otrzymano układ dualnych równań całkowych (2.8) na dwie funkcje niewiadome, który następnie rozwiązano. Otrzymano dokładne rozwiązanie postawionego zagadnienia szczeliny wyrażające się elementarnymi funkcjami. Następnie zanalizowano różnice między otrzymanym rozwiązaniem dla ośrodka Cosseratów a odpowiadającym rozwiązaniem zagadnienia szczeliny w ośrodku Cosseratów ze związanymi obrotami oraz w ośrodku Hooke'a.

1. WYKAZ OZNACZEŃ. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Symbole (x_1, x_2, x_3) oznaczają kartezjański układ współrzędnych,

$$(1.1) \quad \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{R}^3; x_1 = 0, -a \leq x_2 \leq a, x_3 \in \mathcal{R}\}$$

obszar zajęty przez szczelinę, $2a$ długość szczeliny,

$D = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 \in \mathcal{R}\}$ — półpłaszczyzna, $\lambda, \mu, \alpha, \gamma, \varepsilon$ stałe materiałowe, \mathbf{u} wektor przemieszczenia, $\boldsymbol{\varphi}$ wektor obrotu,

$$e = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$[\sigma_{ij}]$ tensor naprężeń siłowych ($i, j = 1, 2, 3$), $[\mu_{ij}]$ tensor naprężeń momentowych;

$$(1.2) \quad \mathcal{F}_s \{f(x_1, x_2), x_2 \rightarrow \xi\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x_1, x_2) \sin(\xi x_2) dx_2$$

sinusową transformację Fouriera,

$$\mathcal{F}_c \{f(x_1, x_2), x_2 \rightarrow \xi\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x_1, x_2) \cos(\xi x_2) dx_2$$

kosinusową transformację Fouriera,

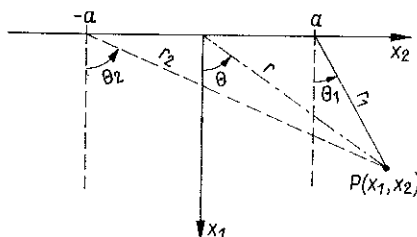
$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \quad \text{funkcja Heaviside'a,}$$

$$J_\nu(x) \text{ funkcją Bessela, } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{oraz} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctg \frac{x_2}{x_1},$$

$$(1.3) \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - a)^2}, \quad \theta_1 = \arctg \frac{x_2 - a}{x_1},$$

$$r_2 = \sqrt{x_1^2 + (x_2 + a)^2}, \quad \theta_2 = \arctg \frac{x_2 + a}{x_1}.$$



Rys. 1.

Przedmiotem rozważań w pracy będzie sprężysta, jednorodna, izotropowa, centrosymetryczna przestrzeń mikropolarna zawierająca szczelinę. Założymy, że szczelina zajmująca obszar Ω jest rozwierana stałym ciśnieniem przyłożonym prostopadłe i symetrycznie do górnej i dolnej jej powierzchni. W tym przypadku ośrodek znajdować się będzie w płaskim stanie odkształcenia opisanym przez wektory przemieszczenia \mathbf{u} i $\boldsymbol{\varphi}$ w postaci [1]

$$(1.4) \quad \mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0), \quad \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3).$$

Stan naprężenia w ośrodku opisywać będą tensory naprężeń siłowych σ_{ij} i naprężeń momentowych μ_{ij} o następujących składowych:

$$(1.5) \quad \sigma_{11}(x_1, x_2) = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2) = (\mu + \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + (\mu - \alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - 2\alpha\varphi_3,$$

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & \sigma_{21}(x_1, x_2) = (\mu + \alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + (\mu - \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + 2\alpha \varphi_3, \\
 & \sigma_{33}(x_1, x_2) = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \\
 & \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} \equiv 0, \\
 & \mu_{i3}(x_1, x_2) = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_i} \quad (i=1, 2), \\
 & \mu_{3i}(x_1, x_2) = (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_i} \quad (i=1, 2), \\
 & \mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu_{12} = \mu_{21} \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Rozpatrywane w pracy zagadnienie jest uogólnieniem zagadnienia szczeliny Griffitha [2] na liniowy ośrodek Cosseratów, a także uogólnieniem zagadnień rozpatrywanych w ramach teorii niesymetrycznej sprężystości dla ośrodka ze związanymi obrotami ($\varphi = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}$) w pracy [3] na ośrodek ze swobodnymi obrotami. Celem pracy jest znalezienie rozkładu przemieszczeń, obrotów i naprężeń w każdym punkcie przestrzeni mikropolarnej zawierającej szczelinę.

Przyjęte na wstępie założenia dotyczące symetrii względem płaszczyzny $x_1 = 0$ i niezależności od x_3 pozwalają sprowadzić zagadnienie szczeliny do mieszanego zagadnienia brzegowego dla półpłaszczyzny D opisanego przez następujące równania.

Układ równań równowagi dla płaskiego stanu odkształcenia (pomijamy siły masowe i momenty masowe):

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad & (\mu + \alpha) \nabla^2 u_1 + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial e}{\partial x_1} + 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} = 0, \\
 & (\mu + \alpha) \nabla^2 u_2 + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial e}{\partial x_2} - 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} = 0, \\
 & [(\gamma + \varepsilon) \nabla^2 - 4\alpha] \varphi_3 + 2\alpha \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Warunki regularności w nieskończoności:

$$(1.7) \quad \sigma_{ij}, \mu_{ij} \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty \quad (i, j=1, 2, 3)$$

oraz następujące warunki brzegowe (dla $x_1 = 0$):

$$\begin{aligned}
 (1.8) \quad & \sigma_{11}(0, x_2) = -f_0, \quad \text{jeżeli} \quad |x_2| < a; \\
 & u_1(0, x_2) = 0, \quad \text{jeżeli} \quad |x_2| > a; \\
 & \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \text{jeżeli} \quad x_2 \in \mathcal{R}; \\
 & \mu_{13}(0, x_2) = 0, \quad \text{jeżeli} \quad |x_2| < a; \\
 & \varphi_3(0, x_2) = 0, \quad \text{jeżeli} \quad |x_2| > a,
 \end{aligned}$$

gdzie $f_0 = \text{const}$. Ponadto żądamy, aby szukane rozwiązanie spełniało warunki następujące:

$$u_1, u_2, \varphi_3 \in C^2 \left(\{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; \quad x_1 > 0, x_2 \in \mathcal{R}\} \right) \cap \\ \cap C^1 \left(\{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; \quad x_1 = 0, \quad x_2 \in \mathcal{R} \wedge |x_2| \neq a\} \right).$$

2. SPROWADZENIE ZAGADNIENIA SZCELINY DO UKŁADU DUALNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Rozpatrzmy najpierw półprzestrzeń sprężystą w płaskim stanie odkształcenia (zagadnienie statyczne bez uwzględnienia obciążeń masowych), na brzegu której działają obciążenia normalne $p(x_2)$ i momentowe $m(x_2)$.

Rozwiązanie tego zagadnienia (nazywać je będziemy pomocniczym) wykorzystywać będziemy do zagadnienia szczeliny. Ze względu na płaski stan odkształcenia wystarczy rozważyć zagadnienie brzegowe dla półpłaszczyzny $D = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; \quad x_1 \geq 0, x_2 \in \mathcal{R}\}$, którego rozwiązanie spełnia

- 1) układ równań równowagi (1.6) dla $x_1 > 0, x_2 \in \mathcal{R}$;
- 2) następujące warunki brzegowe dla $x_1 = 0, x_2 \in \mathcal{R}$:

$$(2.1) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = -p(x_2), \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = -m(x_2),$$

gdzie o funkcjach $p(x_2)$ i $m(x_2)$ zakładamy, że są całkowalne i przedziałami ciągłe dla $x_2 \in \mathcal{R}$;

- 3) dla $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ warunki regularności w nieskończoności (1.7).

Ponadto żądamy, aby $u_1, u_2, \varphi_3 \in C^2 \left(\{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; \quad x_1 > 0, x_2 \in \mathcal{R}\} \right)$ oraz $u_1, u_2, \varphi_3 \in C^1 \left(\{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; \quad x_1 = 0, x_2 \in \mathcal{R}\} \right)$ — z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów.

Rozwiązanie zagadnienia pomocniczego można znaleźć stosując np. zasadę superpozycji (ze względu na liniowość zagadnienia), tzn. sumując rozwiązania zagadnień spełniających na brzegu $x_1 = 0$ warunki:

$$1) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = -p(x_2), \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0 \quad \text{dla } x_2 \in \mathcal{R}$$

oraz

$$2) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = -m(x_2) \quad \text{dla } x_2 \in \mathcal{R}.$$

Zagadnienia te są rozwiązane (np. w pracy [5]). Wykorzystując je, otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia pomocniczego spełniające (1.6), (2.1) i (1.7) w postaci

$$(2.2) \quad u_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\mu} \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left[\left(\frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + x_1 \right) e^{-\xi x_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + x_1 \right) e^{-\xi x_1} + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \right\}, \quad \xi \rightarrow x_2;$$

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad u_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\mu} \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left[\left(-\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + x_1 \right) e^{-\xi x_1} + \right. \right. \\
 [ed.] \quad & \left. \left. + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} \left(\frac{\rho}{\xi} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) \left(-\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + x_1 \right) e^{-\xi x_1} + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} \left(\frac{\rho}{\xi} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] \right\}, \quad \xi \rightarrow x_2; \\
 \varphi_3(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\mu} \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left(e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right] \right\}, \quad \xi \rightarrow x_2,
 \end{aligned}$$

przy czym o funkcjach $p(x_2)$ i $m(x_2)$ zakładamy, że $p(-x_2) = p(x_2)$, $m(-x_2) = -m(x_2)$ dla $x_2 \in \mathcal{R}$.

Wykorzystując związki konstytutywne (1.5) oraz (2.2) możemy składowe tensorów naprężeń siłowych i momentowych zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\mathcal{F}_s \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left[(1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) (1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \right\}, \quad \xi \rightarrow x_2; \\
 \sigma_{12}(x_1, x_2) &= -\mathcal{F}_s \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left[x_1 \xi e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \frac{\xi}{\rho} \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) x_1 \xi e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \frac{\xi}{\rho} \right] \right\}, \quad \xi \rightarrow x_2; \\
 \sigma_{21}(x_1, x_2) &= -\mathcal{F}_s \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left[x_1 \xi e^{-\xi x_1} + 2a_0 \frac{\xi^3}{\rho} \left(\frac{\rho^2}{\xi^2} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) x_1 \xi e^{-\xi x_1} + 2a_0 \frac{\xi^3}{\rho} \left(\frac{\rho^2}{\xi^2} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] \right\}, \quad \xi \rightarrow x_2; \\
 (2.3) \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) &= \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left[(-1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) (-1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \right\}, \\
 & \quad \xi \rightarrow x_2; \\
 \mu_{13}(x_1, x_2) &= -2a_0 \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\xi \tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left(e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1} \right] \right\}, \quad \xi \rightarrow x_2;
 \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \mu_{23}(x_1, x_2) = 2a_0 \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\xi \tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left(e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right], \quad \xi \rightarrow x_2 \right\};$$

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

$$\mu_{3i} = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \mu_{i3} \quad (i=1, 2).$$

We wzorach (2.2) i (2.3) wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$(2.4) \quad \rho \equiv \rho(\xi) = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{l^2}},$$

$$(2.5) \quad \Delta_0 \equiv \Delta_0(\xi) = 1 + 2a_0 \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\rho} \right),$$

$$(2.6) \quad l^2 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}{4\alpha\mu}, \quad a_0 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)},$$

$$(2.7) \quad \tilde{p}_c(\xi) = \mathcal{F}_c \{ (p(x_2), x_2 \rightarrow \xi) \}; \\ \tilde{m}_s(\xi) = \mathcal{F}_s \{ (m(x_2), x_2 \rightarrow \xi) \}.$$

Wykorzystamy teraz otrzymane rozwiązanie pomocnicze (wzory (2.2) i (2.3)) do rozwiązania mieszanego zagadnienia brzegowego dla półpłaszczyzny D postawionego w punkcie 1 pracy wzorami (1.6), (1.7) i (1.8), opisującego zagadnienie szczeliny. Zauważmy, że rozwiązanie pomocnicze spełnia układ równań równowagi (1.6), warunki regularności w nieskończoności (1.7) oraz warunek brzegowy (1.8)₃ dla dowolnych funkcji $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$. Przy tym o $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$ przyjmuje się tylko, że są takie, iż

$$u_1, u_2, \varphi_3 \in C^2 \left(\{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2; \quad x_1 > 0, \quad x_2 \in \mathcal{R}\} \right) \cap \\ \cap C^1 \left(\{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2, \quad x_1 = 0, \quad |x_2| \neq a\} \right).$$

Aby więc rozwiązać zagadnienie szczeliny postawione we wstępie pracy, należy tak dobrać $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$, żeby spełnione były pozostałe warunki brzegowe z (1.8). Przyjmując więc $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$ jako niewiadome, możemy na podstawie (2.3)₁, (1.8)₁, (2.2)₁, (1.8)₂, (2.3), (1.8)₄, (2.2)₃ i (1.8) napisać

$$(2.8) \quad \mathcal{F}_c \{ \tilde{p}_c(\xi); \xi \rightarrow x_2 \} = f_0, \\ \mathcal{F}_s \{ \tilde{m}_s(\xi); \xi \rightarrow x_2 \} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x_2 < a; \\ \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\xi \Delta_0} - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi^2 \Delta_0} (1 - \Delta_0); \xi \rightarrow x_2 \right\} = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > a; \\ \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} \left(1 - \frac{\xi}{\rho} \right) - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi \Delta_0} \left(1 - \Delta_0 - \frac{\xi}{\rho} \right); \xi \rightarrow x_2 \right\} = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > a.$$

Otrzymaliśmy więc układ dualnych równań całkowych na dwie funkcje niewiadome $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$. Wyznaczając z (2.8) i podstawiając je do (2.2) i (2.3) otrzymamy rozwiązanie zagadnienia szczeliny przedstawione w postaci całek Fouriera.

3. ROZWIĄZANIE DUALNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH (2.8)

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie

TWIERDZENIE 1. *Układ dualnych równań całkowych (2.8) jest równoważny dwóm następującym układom dualnych równań całkowych:*

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_s \{ \xi \Phi(\xi); \xi \rightarrow x_2 \} &= 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x_2 < a, \\ \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\xi}{\Delta_0 \rho} \Phi(\xi); \xi \rightarrow x_2 \right\} &= 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > a \end{aligned}$$

oraz

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_c \{ \tilde{p}_c(\xi); \xi \rightarrow x_2 \} &= f_0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x_2 < a, \\ \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\xi}; \xi \rightarrow x_2 \right\} &= -\mathcal{F}_c \left\{ \frac{1}{\xi \Delta_0} (1 - \Delta_0) \Phi(\xi); \xi \rightarrow x_2 \right\} \quad \text{dla} \quad x_2 > a, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.3) \quad \Phi(\xi) = \tilde{p}_c(\xi) - \frac{1}{2a_0 \xi} \tilde{m}_s(\xi).$$

Dowód. Wykażemy najpierw, że jeżeli $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$ spełniają (2.8), to także spełniają (3.1) i (3.2) (przy oznaczeniu (3.3)).

Różniczkując stronami równanie (2.8)₃ względem x_2 otrzymujemy

$$(3.4) \quad \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0} - \frac{1}{2a_0} \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi \Delta_0} (1 - \Delta_0); \xi \rightarrow x_2 \right\} = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > a.$$

Odejmując stronami (2.8)₄ i (3.4), dostajemy

$$(3.5) \quad \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\xi}{\rho \Delta_0} \left[\tilde{p}_c(\xi) - \frac{1}{2a_0} \tilde{m}_s(\xi) \right]; \xi \rightarrow x_2 \right\} = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > a.$$

Można zauważyć, że równanie (3.1)₂ przy oznaczeniu (3.3) jest identyczne z (3.5), a więc $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$ spełniają równanie (3.1)₂.

Różniczkując stronami równanie (2.8)₁ względem x_2 mamy

$$(3.6) \quad \mathcal{F}_s \{ \xi \tilde{p}_c(\xi); \xi \rightarrow x_2 \} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x_2 < a;$$

następnie mnożąc stronami przez $1/2a_0$ równanie (2.8)₂ i odejmując je stronami od (3.6), dostajemy:

$$(3.7) \quad \mathcal{F}_s \left\{ \xi \left[\tilde{p}_c(\xi) - \frac{1}{2a_0 \xi} \tilde{m}_s(\xi) \right]; \xi \rightarrow x_2 \right\} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x_2 < a.$$

Równanie (3.7) jest identyczne z (3.1)₁ (przy oznaczeniu (3.3)). Także (2.8)₁ jest identyczne z (3.2)₁, a (2.8)₃ z (3.2)₂ (wraz z (3.3)). Jeśli więc $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$ spełnia układ dualnych równań całkowych (2.8), to także spełnia równania (3.1) i (3.2) (wraz z (3.3)).

Wykażemy teraz, że jeśli $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$ spełniają (3.1) i (3.2), to także spełniają równania (2.8).

Oczywiście (2.8)₁ jest identyczne z (3.2)₁ oraz (2.8)₃ z równaniem (3.2)₂ (wraz z (3.3)).

Z (3.1)₁, podstawiając (3.3), znajdziemy

$$(3.8) \quad \mathcal{F}_s \{ \xi \Phi(\xi); \xi \rightarrow x_2 \} = \mathcal{F}_s \{ \xi \tilde{p}_c(\xi); \xi \rightarrow x_2 \} - \frac{1}{2a_0} \mathcal{F}_s \{ \tilde{m}_s(\xi); \xi \rightarrow x_2 \} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x_2 < a.$$

Jednakże z (3.2)₁ wynika, że $\mathcal{F}_s \{ \xi \tilde{p}_c(\xi); \xi \rightarrow x_2 \} = 0$ dla $0 \leq x_2 < a$, stąd na podstawie (3.8) mamy równanie (2.8)₂.

Dalej z (3.2)₂, różniczkując je względem x_2 , otrzymujemy

$$(3.9) \quad \mathcal{F}_s \{ \tilde{p}_c(\xi); \xi \rightarrow x_2 \} = -\mathcal{F}_s \left\{ \frac{1}{A_0} (1 - A_0) \Phi(\xi); \xi \rightarrow x_2 \right\} \quad \text{dla} \quad x_2 > a,$$

a podstawiając do (3.9) za $\Phi(\xi)$ wyrażenie (3.3), dostajemy

$$(3.10) \quad \mathcal{F}_s \left\{ \frac{1}{A_0} \tilde{p}_c(\xi) - \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{2a_0 \xi A_0} (1 - A_0); \xi \rightarrow x_2 \right\} = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > a.$$

Odejmując teraz stronami (3.10) od równania (3.1)₂ (gdzie za $\Phi(\xi)$ wstawiamy (3.3)), otrzymujemy

$$(3.11) \quad \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{A_0} \left(1 - \frac{\xi}{\rho} \right) - \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{2a_0 \xi A_0} \left(1 - A_0 - \frac{\xi}{\rho} \right); \xi \rightarrow x_2 \right\} = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > a.$$

Równanie (3.11) jest identyczne z (2.8)₄, co kończy dowód twierdzenia.

Przejdziemy teraz do rozwiązania dualnych równań całkowych (3.1) i (3.2).

Można zauważyć, że rozwiązaniem równań (3.1) jest funkcja

$$(3.12) \quad \Phi(\xi) = 0 \quad \text{dla} \quad \xi \geq 0.$$

Podstawiając (3.12) do (3.2)₂ dostajemy dualne równania całkowe na funkcję $\tilde{p}_c(\xi)$ w postaci

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_c \{ \tilde{p}_c(\xi), \xi \rightarrow x_2 \} &= f_0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x_2 < a; \\ \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\xi}, \xi \rightarrow x_2 \right\} &= 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > a. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań (3.13) jest następujące (np. [2]):

$$(3.14) \quad \tilde{p}_c(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f_0 a J_1(a\xi).$$

Z kolei na podstawie (3.3), (3.12) i (3.14) znajdziemy

$$(3.15) \quad \tilde{m}_s(\xi) = 2a_0 \xi \tilde{p}_c(\xi) = \sqrt{2\pi} f_0 a_0 a \xi J_1(a\xi).$$

4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA SZCZELINY

Podstawiając za $\tilde{p}_c(\xi)$ wyrażenie (3.14) i za $\tilde{m}(\xi)$ wyrażenie (3.15) do rozwiązania pomocniczego (2.2), (2.3) otrzymujemy,

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\mu} f_0 a \int_0^\infty \left(\frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + x_1 \right) e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \cos(\xi x_2) d\xi, \\ u_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\mu} f_0 a \int_0^\infty \left(-\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + x_1 \right) e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \varphi_3(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\mu} \frac{(2\mu + \lambda)}{\lambda + \mu} f_0 a \int_0^\infty e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma_{11}(x_1, x_2) &= -f_0 a \int_0^\infty (1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) &= -f_0 a \int_0^\infty x_1 \xi e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) &= -f_0 a \int_0^\infty x_1 \xi e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma_{22}(x_1, x_2) &= f_0 a \int_0^\infty (-1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \mu_{13}(x_1, x_2) &= -2a_0 f_0 a \int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \mu_{23}(x_1, x_2) &= 2a_0 f_0 a \int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma_{33}(x_1, x_2) &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} [\sigma_{11}(x_1, x_2) + \sigma_{22}(x_1, x_2)], \\ \mu_{3i}(x_1, x_2) &= \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \mu_{i3}(x_1, x_2) \quad (i=1, 2). \end{aligned}$$

Wykorzystamy następujące całki [6] do wyznaczenia składowych wektorów przemieszczenia i obrotu oraz tensorów naprężeń siłowych i momentowych:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \cos(\xi x_2) d\xi &= \frac{1}{a} \left[\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) - r \cos \theta \right], \\ \int_0^\infty e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \cos(\xi x_2) d\xi &= \frac{1}{a} \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \cos(\xi x_2) d\xi = \frac{a}{(r_1 r_2)^{3/2}} \cos \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2), \\
 [od.] \quad & \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \sin(\xi x_2) d\xi = \frac{a}{(r_1 r_2)^{3/2}} \sin \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2), \\
 & \int_0^{\infty} e^{-\xi x_1} J_1(a\xi) \sin(\xi x_2) d\xi = \frac{1}{a} \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right), \\
 & \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{\xi x_1} J_1(a\xi) \sin(\xi x_2) d\xi = \frac{1}{a} \left[r \sin \theta - \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right],
 \end{aligned}$$

gdzie $r, r_1, r_2, \theta, \theta_1$ i θ_2 określone są (zgodnie z rys. 1) wzorami (1.3).

Podstawiając (4.2) do (4.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad u_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\mu} f_0 \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \left[\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) - r \cos \theta \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{2\mu} f_0 r \cos \theta \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right) \right], \\
 u_2(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\mu}{\lambda + \mu} f_0 \left[r \sin \theta - \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{2\mu} f_0 \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \theta \sin \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right), \\
 \varphi_3(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\mu} \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} f_0 \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right)
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad \sigma_{11}(x_1, x_2) &= f_0 \left[\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right) - \right. \\
 & \quad \left. - 1 - \frac{a^2 r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \cos \theta \cos \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right], \\
 \sigma_{12}(x_1, x_2) &= -f_0 \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} r \cos \theta \sin \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2), \\
 \sigma_{21}(x_1, x_2) &= \sigma_{12}(x_1, x_2), \\
 \sigma_{22}(x_1, x_2) &= f_0 \left[\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right) - \right. \\
 & \quad \left. - 1 + \frac{a^2 r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \cos \theta \cos \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right], \\
 \mu_{13}(x_1, x_2) &= -2a_0 f_0 \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \sin \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2);
 \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad \hat{\mu}_{23}(x_1, x_2) = 2a_0 f_0 \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \cos \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2).$$

[cd.]

Napiszemy z kolei otrzymane rozwiązanie na szczelinie i jej przedłużeniu (tzn. dla $x_1 = 0$).

Zgodnie z rys. 1 i oznaczeniami (1.3) mamy

$$r = |x_2|, \quad r_1 = |x_2 - a|, \quad r_2 = |x_2 + a| \quad \text{dla} \quad x_1 = 0;$$

$$(4.5) \quad \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 > 0, \\ \frac{3}{2}\pi & \text{dla } x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 < 0, \end{cases}$$

$$\theta_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 > a, \\ \frac{3}{2}\pi & \text{dla } x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 < a, \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 > -a, \\ \frac{3}{2}\pi & \text{dla } x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 < -a. \end{cases}$$

Podstawiając (4.5) do (4.3) i (4.4) otrzymujemy

$$(4.6) \quad u_1(0, x_2) = \frac{1}{2\mu} \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} f_0 \sqrt{a^2 - x_2^2} H(a - |x_2|),$$

$$u_2(0, x_2) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\mu}{\lambda + \mu} f_0 \operatorname{sgn} x_2 [|x_2| H(a - |x_2|) + (|x_2| + \sqrt{x_2^2 - a^2}) H(|x_2| - a)],$$

$$\varphi_3(0, x_2) = -\frac{1}{4\mu} \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} f_0 \operatorname{sgn} x_2 \frac{|x_2|}{\sqrt{a^2 - x_2^2}} H(a - |x_2|),$$

$$\sigma_{11}(0, x_2) = -f_0 \left[H(a - |x_2|) + \left(1 - \frac{|x_2|}{\sqrt{x_2^2 - a^2}} \right) H(|x_2| - a) \right],$$

$$\sigma_{12}(0, x_2) = \sigma_{21}(0, x_2) = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 \in \mathcal{R},$$

$$\sigma_{22}(0, x_2) = \sigma_{11}(0, x_2) \quad \text{dla} \quad x_2 \in \mathcal{R},$$

$$\mu_{13}(0, x_2) = -2a_0 \operatorname{sgn} x_2 \frac{a}{\sqrt{(x_2^2 - a^2)^3}} H(|x_2| - a),$$

$$\mu_{23}(0, x_2) = 2a_0 f_0 \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x_2^2)^3}} H(a - |x_2|).$$

5. UWAGI KOŃCOWE

Z otrzymanego rozwiązania zagadnienia szczeliny dwuwymiarowej, znajdującej się w przestrzeni mikropolarnej, danego wzorami (4.3) i (4.4) (oraz dla $x_1=0$ danego w (4.6)) można wyciągnąć następujące wnioski:

1) Składowe $u_1, u_2, \varphi_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{33}$ mają taką samą postać jak w rozwiązaniu analogicznego zagadnienia szczeliny w ośrodku Hooke'a (np. [2]).

2) Tylko składowe tensora naprężeń momentowych $\mu_{13}, \mu_{23}, \mu_{31}, \mu_{32}$ zależą od stałych materiałowych γ i ε .

3) Rozwiązanie nie zależy od stałej materiałowej α .

4) Przechodząc do granicy $a_0 \rightarrow 0$ w rozwiązaniu określonym przez (4.3) i (4.4), otrzymamy, że $\mu_{i3}, \mu_{3i} \rightarrow 0$ ($i=1, 2$), a pozostałe składowe, tj. $u_1, u_2, \varphi_3, \sigma_{ij}, \sigma_{33}$ ($i, j=1, 2$), mają taką samą postać, jak w rozwiązaniu analogicznego zagadnienia szczeliny w ramach klasycznej teorii sprężystości.

Porównując otrzymane rozwiązanie z wynikami dla analogicznego zagadnienia szczeliny, rozpatrzonego w ramach niesymetrycznej teorii sprężystości dla ośrodka ze związanymi obrotami (w [3] wyniki są przybliżone), można zauważyć następujące różnice:

1) inny jest rząd osobliwości składowych wektora obrotu i tensora naprężeń momentowych w końcach szczeliny,

2) inne są współczynniki intensywności naprężeń siłowych.

W tej pracy rozpatrzyliśmy zagadnienie szczeliny rozwieranej stałym ciśnieniem. Jeśli natomiast siły rozwierające szczelinę byłyby przyłożone normalnie i symetrycznie do jej górnej powierzchni i zależały od x_2 , to należałoby zastąpić w warunkach brzegowych (1.8) f_0 daną funkcją $f(x_2)$.

Przyjmując, że $f(x_2) = f(-x_2)$ dla $x_2 \in (-a, a)$ należałoby w (2.8)₁ zastąpić f_0 przez $f(x_2)$ i wtedy na miejsca zera po prawej stronie równania (3.1)₁ trzeba wpisać $-df(x_2)/dx_2$ oraz w (3.2) za f_0 wpisać $f(x_2)$. W tym przypadku dualne równania (3.1) można sprowadzić do jednego równania całkowego Fredholma II-go rodzaju z ciągłym i symetrycznym jądrem, a dla równań (3.2) można znaleźć dokładne rozwiązanie.

Otrzymane w tej pracy wyniki można potwierdzić stosując do zagadnienia brzegowego (1.6), (1.7), (1.8) opisującego szczelinę — metodą H. SCHAEFERA [5] stosowaną np. w [4].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. I. N. SNEDDON, *Zagadnienia szczelin w matematycznej teorii sprężystości*, PAN Biuro Kształc. i Dosc. Kadr. Nauk., 1962.
3. E. STERNBERG, R. MUKI, *The effect of couple-stress on the stress concentration around a crack*, Int. J. Solids Structures, 3., 1967.
4. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, *Osobliwość naprężeń siłowych i momentowych w ciele mikropolarnym wywołane obciążeniami skupionymi*, Mech. Teor. i Stos., 11, 4, 1973.
5. H. SCHAEFER, *Das Cosserat-Kontinuum*, ZAMM, 47, 8, 1967.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рижик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Изд. Наука, Москва 1971.

Резюме

СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДВУХМЕРНОЙ ТРЕЩИНЫ В ЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ КОССЕРА СО СВОБОДНЫМИ ВРАЩЕНИЯМИ

В рамках линейной теории несимметрической упругости для среды со свободными вращениями рассмотрено однородное изотропное и центросимметрическое пространство, содержащее в области $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0, -a \leq x_2 \leq a, x_3 \in \mathbb{R}\}$ трещину. Предположено, что трещина расширяется под влиянием постоянного давления приложенного перпендикулярно и симметрично к нижней и верхней её поверхности. Эта проблема сводится к смешанной граничной задаче для полуплоскости $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Применяя метод преобразования Фурье, получена система парных интегральных уравнений (2.8) для двух неизвестных функций, которая далее решена. Получено точное решение поставленной задачи трещины, выражающееся элементарными функциями. В дальнейшем анализируется разница между полученным решением для среды Коссера, а соответствующим решением задачи трещины в среде Гука и в среде Коссера со связанными вращениями.

SUMMARY

STATIC PROBLEM OF TWO-DIMENSIONAL CRACK IN LINEAR COSSERAT MEDIUM WITH FREE ROTATIONS

In a frame of a linear theory of asymmetric elasticity for a medium with free rotations the homogeneous isotropic and centrosymmetric space containing crack in a region $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0, -a \leq x_2 \leq a, x_3 \in \mathbb{R}\}$ is considered. It is assumed that the crack is opened by a constant pressure applied perpendicularly and symmetrically to its upper and lower surface. The problem was reduced to the mixed boundary-value problem for the half-space $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Applying Fourier transform technique the system of dual integral equations (2.8) for two unknown functions is obtained and solved. An exact solution of the posed crack problem was obtained in terms of the elementary functions. Then the differences between actual solution for Cosserat medium and corresponding solutions of the crack problem in Cosserat medium with rotations and in a Hooke medium were analyzed.

UNIwersytet Warszawski
Instytut Mechaniki

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 listopada 1976 r.