

NUMERYCZNA METODA WYZNACZANIA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ PŁYT KOŁOWO-SYMETRYCZNYCH (*)

JOANNA S O K Ó Ł - S U P E L (WARSZAWA)

Przedmiotem pracy jest rozwiązanie zagadnienia nośności granicznej zginanej płyty kołowej lub pierścieniowej pod obciążeniem kołowo-symetrycznym o jednym kierunku. Materiał płyty uplastycznia się według warunku plastyczności w postaci krzywej drugiego stopnia ze względu na momenty M_r i M_θ . Przedstawiono algorytm i metodę numerycznego całkowania równań statyki i ugięć dla takich płyt. Metodę zilustrowano przykładami płyt z materiału Hubera-Misesa i jego uogólnienia na przypadek ortotropii.

1. WSTĘP

Teoria nośności granicznej formułuje zasady i opracowuje metody wyznaczania udźwigu konstrukcji znajdujących się pod działaniem obciążeń narastających proporcjonalnie do jednego parametru. Posługuje się ona modelem idealnej sztywno-plastyczności.

W celu uzyskania rozwiązania zagadnienia nośności granicznej płyt trzeba rozwiązać układ (na ogół nieliniowych) równań różniczkowych. Wynikiem rozwiązania jest wartość obciążenia granicznego, pole sił wewnętrznych oraz mechanizm zniszczenia.

Na rodzaj nieliniowości równań różniczkowych istotny wpływ ma postać warunku plastyczności [7]. Tylko dla niektórych warunków plastyczności jest możliwe uzyskanie rozwiązań na drodze analitycznej. Dotychczasowe studia traktujące o udźwigu płyt podlegających warunkom plastyczności ograniczały się do rozpatrywania szczegółowych postaci tych warunków, a głównie warunku Hubera-Misesa [1–6, 8–9]. Opracowywane metody numeryczne odnosiły się do określonego typu zadań i celem ich było dostarczenie rozwiązania konkretnego przykładu, a nie przedstawienie algorytmu i techniki, dostatecznie elastycznych, które umożliwiłyby uzyskiwanie rozwiązań dla szerokiej klasy obciążeń oraz warunków plastyczności, włączając warunki odnoszące się do płyt anizotropowych i niejednorodnych. Analiza równań

(*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych” koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.

3. METODA ROZWIĄZYWANIA PODSTAWOWEGO UKŁADU RÓWNAŃ

Dla ułatwienia obliczeń wprowadzamy następujące wielkości bezwymiarowe:

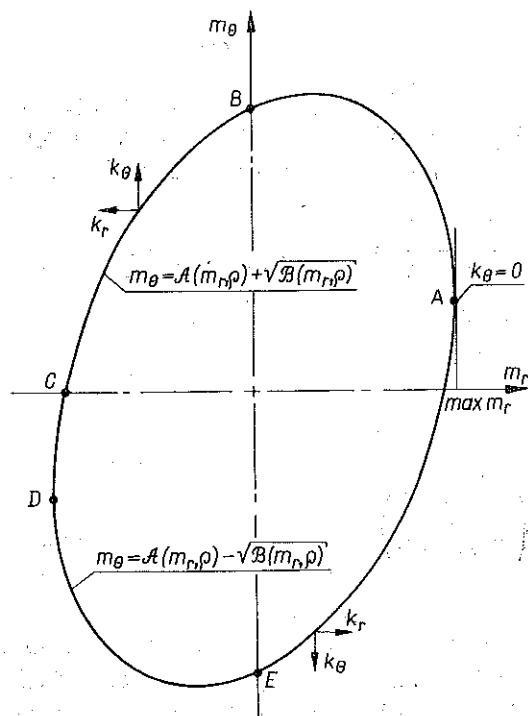
$$(3.1) \quad \begin{aligned} m_r &= \frac{M_r}{M_0}, & m_\theta &= \frac{M_\theta}{M_0}, & q_n &= \frac{Q_n R}{M_0}, & \rho &= \frac{r}{R}, \\ p_0 &= \frac{P_0 R^2}{M_0}, & q_0 &= \frac{Q_0 R}{M_0}, \\ k_r &= \frac{K_r R^2}{H}, & k_\theta &= \frac{K_\theta R^2}{H}, & w &= \frac{W}{H} \end{aligned}$$

gdzie M_0 oznacza jednostkowy moment plastyczny, R długość odniesienia, H grubość płyty, p_0 i q_0 bezwymiarowe obciążenia zewnętrzne, rozłożone i liniowe.

Nieliniowość równań (2.1)–(2.5) powoduje, że rozwiązać je można tylko drogą całkowania numerycznego. Aby je sprowadzić do postaci wygodniejszej dla rozwiązywania numerycznego, z (2.4) wyznaczamy moment obwodowy m_θ . Ponieważ zakładamy, że warunek plastyczności jest krzywą stopnia drugiego, przeto moment m_θ można przedstawić w postaci następującej sumy:

$$(3.2) \quad m_\theta = \mathcal{A}(m_r, \rho) \pm \sqrt{\mathcal{B}(m_r, \rho)}$$

Dla sformułowania metody numerycznego całkowania nie jest konieczna znajomość funkcji \mathcal{A} i \mathcal{B} . Tym samym warunek plastyczności (2.4) odnosić się może tak do



Rys. 2.

plyt plastycznych, kołowo-symetrycznych prowadzi do wniosku, że jest możliwe opracowanie takiej właśnie ogólnej metody całkowania numerycznego.

W pracy rozważane są płyty, których kształt, warunki podparcia i obciążenie spełniają wymagania kołowej symetrii, ich zaś materiał uplastycznia się według warunku plastyczności w postaci krzywej stopnia drugiego. Przedstawiamy algorytm i metodę numerycznego całkowania równań statyki i ugięć dla takich płyt. Metoda jest zilustrowana przykładami rozwiązań dla płyt spełniających warunek Hubera-Misesa oraz jego uogólnienie na przypadek materiałów ortotropowych.

2. RÓWNIANIA PODSTAWOWE

Podstawowy układ równań i warunków opisujących zginanie plastyczne płyt, w przypadku spełnionych wymagań kołowej symetrii jest następujący.

a) Równania równowagi elementu płyty (rys. 1)

$$(2.1) \quad (rQ_r)' + r\mu P_0 = 0$$

oraz

$$(2.2) \quad (rM_r)' - M_\theta - rQ_r = 0,$$

w których $P_0 = P_0(r)$ oznacza rozłożone obciążenie zewnętrzne, prostopadłe do płaszczyzny środkowej płyty i posiadające ten sam zwrot, μ jest liczbą określającą intensywność obciążenia granicznego. Przecinkiem oznaczyliśmy różniczkowanie względem r .

b) Zależności kinematyczne

$$(2.3) \quad K_r = -\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}, \quad K_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r},$$

wiążące ze sobą prędkość ugięcia W powierzchni środkowej i prędkości zmian jej krzywizn K_r i K_θ .

c) Warunek plastyczności

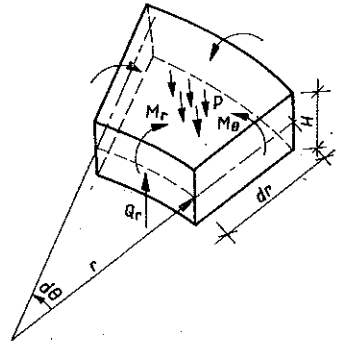
$$(2.4) \quad f(M_r, M_\theta, r) = 0,$$

o którym zakładamy, że przedstawia krzywą stopnia drugiego względem momentów M_r i M_θ .

d) Stowarzyszone prawo płynięcia

$$(2.5) \quad K_r = v \frac{\partial f}{\partial M_r}, \quad K_\theta = v \frac{\partial f}{\partial M_\theta}, \quad v > 0.$$

Dla wyznaczenia siedmiu nieznanymi funkcji mamy zatem wystarczającą liczbę równań.



Rys. 1.

plyt izotropowych jak i anizotropowych. Jedynym ograniczeniem, jakie wprowadzamy jest, aby określał on krzywą zamkniętą i wklęsłą w stosunku do początku układu współrzędnych. Zastrzeżenie to jest spełnione wtedy, gdy krzywa ta jest elipsą rzeczywistą (rys. 2).

Po podstawieniu do równania (2.1) i (2.2) wyrażenia (3.2) i odpowiednich przekształceniach otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne określające moment radialny

$$(3.3) \quad \frac{dm_r}{d\rho} = \frac{1}{\rho} (-m_r + \mathcal{A}(m_r, \rho) \pm \sqrt{\mathcal{B}(m_r, \rho) + q_r \rho}),$$

gdzie

$$(3.4) \quad q_r \rho = -\mu [QR(\rho) - \beta QR(1)],$$

$$(3.5) \quad QR(\rho) = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{c_j}^{c_{j+1}} p_j(s) s ds + \int_{c_k}^{\rho} p_k(s) s ds + \sum_{i=1}^l q_i b_i,$$

$$(3.6) \quad QR(1) = \sum_{j=1}^m \int_{c_k}^{c_{j+1}} p_j(s) s ds + \sum_{i=1}^n q_i b_i.$$

Oznaczenia we wzorach (3.4)–(3.6) wyjaśnia rys. 3, na którym pokazany jest schemat obciążenia płyty. Tak więc $p_j = p_j(\rho)$, $j=1, 2, 3, \dots, n$; q_i , $i=1, 2, 3, \dots, m$ oznaczają odpowiednio bezwymiarowe obciążenia rozłożone i liniowe, P^* całkowite obciążenie płyty,

$$(3.7) \quad P^* = 2\pi QR(1),$$

oraz $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$ współczynnik liczbowy, określający reakcję podpory.

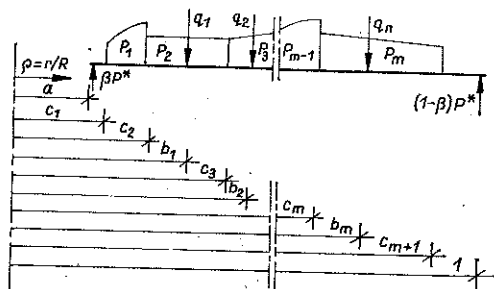
Równania (2.3) i (2.5) opisujące kinematykę płyty, po wyeliminowaniu z nich współczynnika v , sprowadzamy do jednego równania różniczkowego

$$(3.8) \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \frac{\partial f}{\partial m_0} - \frac{\partial w}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial m_r} = 0,$$

z którego po scałkowaniu uzyskujemy wzór na prędkość ugięcia:

$$(3.9) \quad w = C_1 \int_a^{\rho} \exp[u] dt + C_2,$$

$$u = \int_a^t \frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial m_r} / \frac{\partial f}{\partial m_0} \right) ds;$$



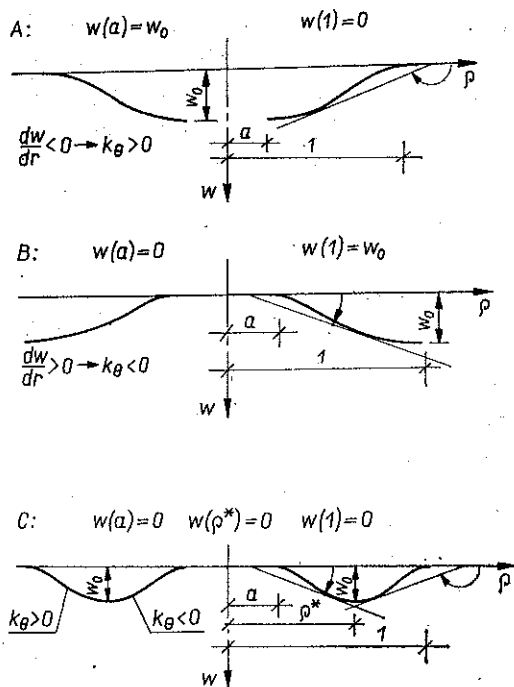
Rys. 3

stałe C_1 i C_2 wyznacza się z kinematycznych warunków brzegowych.

Zauważmy, że w płytach kołowych i pierścieniowych spotyka się trzy typy kinematycznych warunków brzegowych (rys. 4). Spostrzeżenie to w przypadku płyt, znajdujących się pod obciążeniem o stałym kierunku na całej płaszczyźnie, pozwala w zależności od kinematycznych warunków brzegowych z góry ustalić

znak krzywizny obwodowej k_θ i na tej podstawie część warunku plastyczności (rys. 3), po której może poruszać się wektor momentów w płycie. Jest to jednoznaczne z rozstrzygnięciem, które z równań (3.3) opisuje pole momentów w płycie.

Warunki typu *A* i *B* (rys. 4) obejmują wszystkie płyty statycznie zewnętrznie wyznaczalne. Do tej grupy należą tylko płyty pierścieniowe o jednej krawędzi swobodnej i płyty kołowe. Warunki kinematyczne *C* spełniają płyty pierścieniowe



Rys. 4.

statycznie niewyznaczalne. Dla tych płyt dodatkowym warunkiem, uzupełniającym równania statyki, jest równanie wynikające z istnienia takiego promienia $\rho = \rho^*$, dla którego obwodowa krzywizna zmienia znak. Wtedy wzdłuż okręgu o promieniu ρ^* powstaje przegub plastyczny lub krzywizna obwodowa się zeruje, $k_\theta = 0$. Moment m_r osiąga w obu przypadkach swoje maksimum, a zatem tym dodatkowym równaniem jest następujące:

$$(3.10) \quad \frac{dm_r}{d\rho} = 0,$$

dla

$$\rho = \rho^*,$$

$$m_r(\rho^*) = \max m_r.$$

Pole momentów w płycie statycznie niewyznaczalnej w obszarze $a \leq \rho \leq \rho^*$, w którym powierzchnia ugięcia ma ujemną krzywiznę obwodową, określone jest równaniem

(3.3) z minusem (dolna część elipsy, rys. 2), a w obszarze $\rho^* \leq \rho \leq 1$, gdzie $k_0 > 0$, z pulsem.

Algorytmy dla rozwiązania przedmiotowych płyt zbudowano uwzględniając podział ich na trzy grupy A, B, C w zależności od warunków kinematycznych (rys. 4). Przez to równania (3.2), (3.3) i (3.9) są określone przed rozpoczęciem obliczeń i nie musimy wykonywać czasochłonnych poszukiwań właściwego dla danej płyty rozkładu naprężeń.

Algorytm dla płyt statycznie wyznaczalnych jest dla obu grup warunków kinematycznych A i B taki sam. Inne są tylko równania. Dla grupy A równanie (3.3) jest ze znakiem plus, dla grupy B ze znakiem minus (rys. 4). Zadanie polega na rozwiązaniu odpowiedniego równania (3.3) z warunkami brzegowymi. Wygodniej będzie je napisać w następującej skróconej postaci. Rozwiązać równanie

$$(3.11) \quad \frac{dm_r}{d\rho} = \varphi(m_r, \rho, \mu)$$

w przedziale $0 \leq \rho \leq 1$ z warunkami

$$a) m_r(a) = m_a, \quad b) m_r(1) = m_1.$$

Dla rozwiązania zadania (3.11) stosujemy metodę kolejnych przybliżeń ze względu na parametr μ . W pierwszym przybliżeniu całkujemy równanie z warunkiem początkowym a) i dla obranego $\mu = \mu_{pocz}$ obliczamy różnicę $F(\mu_{pocz}) = m_r(1) - m_1$. Następnie zwiększamy μ_{pocz} , ponawiamy obliczenia dla μ_2 i sprawdzamy znak iloczynu $F(\mu_{pocz}) F(\mu_2)$. Postępujemy w ten sposób aż $\text{sign } F(\mu_i) F(\mu_{i+1}) = -1$. Oznacza to, że przedział, w którym znajduje się rozwiązanie μ , został zlokalizowany. W dalszym ciągu wartości μ szukamy metodą bisekcji.

W wyniku otrzymujemy funkcję $m_r = m_r(\rho)$ i wartość parametru μ , które spełniają równanie (3.11) wraz z warunkami a) i b).

Aby proces iteracyjny był zbieżny wartość początkowa μ_{pocz} musi spełniać nierówność

$$(3.12) \quad 0 \leq \mu_{pocz} \leq \mu.$$

Obserwuje się, że $F(\mu)$ jest funkcją monotoniczną, rosnącą lub malejącą w zależności od grupy zadań. To spostrzeżenie pozwala już w drugim kroku wyeliminować niewłaściwie przyjęte μ_{pocz} . Jeżeli dla $\mu_{pocz} = 0$ program sygnalizuje niewłaściwie przyjęte μ_{pocz} oznacza; to, że rozwiązanie zadania w ramach przyjętych założeń nie istnieje.

Algorytm dla płyt statycznie niewyznaczalnych jest nieco bardziej skomplikowany od poprzedniego. W skróconej postaci zadanie można sformułować w następujący sposób.

Rozwiązać równanie

$$(3.13) \quad \frac{dm_r}{d\rho} = \varphi_1(m_r, \rho, \mu, \beta)$$

w przedziale $a \leq \rho \leq \rho^*$ z warunkami

$$a) m_r(a) = m_a, \quad b) m_r(\rho^*) = \max m_r$$

oraz

$$\frac{dm_r}{d\rho} = \varphi_2(m_r, \rho, \mu, \beta)$$

w przedziale $\rho^* \leq \rho \leq 1$ z warunkami

$$b) m_r(\rho^*) = \max m_r, \quad c) m_r(1) = m_1.$$

Promień ρ^* jest rozwiązaniem równania (3.10), które symbolicznie przedstawiamy w postaci

$$(3.14) \quad \alpha(\rho, \mu, \beta) = 0.$$

Dla rozwiązania zadania stosujemy dwustopniową metodę kolejnych przybliżeń. W pierwszym przybliżeniu ustalamy β_{pocz} i rozwiązujemy równanie (3.12) z warunkami a) i b) wg algorytmu dla płyt statycznie wyznaczalnych. W wyniku otrzymujemy pewne μ^* . Ponieważ położenie warunku brzegowego b) zależy od μ i β , przeto dodatkowo przy każdej zmianie μ trzeba rozwiązać równanie (3.14) ze względu na ρ . Po wykonaniu tej części zadania całkujemy równanie (3.13) z warunkiem początkowym b) przy założeniu, że $\mu = \mu^*$ i $\beta = \beta_{pocz}$; następnie sprawdzamy, czy $\Phi(\beta_{pocz}) = m_r(1) - m_1 \approx 0$. Na ogół warunek ten nie jest spełniony, powtarzamy więc cały proces dla zwiększonego β aż do chwili, gdy $\text{sign } \Phi(\beta_i) \Phi(\beta_{i+1}) = -1$. Dalej metodą bisekcji zawężamy przedział $\langle \beta_i, \beta_{i+1} \rangle$, podobnie jak to czyniliśmy dla μ w algorytmie dla płyt statycznie wyznaczalnych.

W wyniku obliczeń otrzymujemy rozkład momentu radialnego $m_r = m_r(\rho)$ i wartości parametrów μ i β spełniające równania (3.12) i (3.13) ze swoimi warunkami.

Zbieżność przedstawionej metody zależy od właściwego przyjęcia wartości początkowych μ i β . Z opisu metody wynika, że przede wszystkim wartości początkowe μ i β muszą spełniać nierówności

$$(3.15) \quad 0 < \mu_{pocz} \leq \mu, \quad 0 < \beta_{pocz} \leq \beta.$$

Ponadto analiza równania (3.14) prowadzi do jeszcze jednego wspólnego ograniczenia dla μ i β . Analiza ta zależy w sposób istotny od warunku plastyczności (2.4), dlatego przeprowadzimy ją w następnym rozdziale na przykładach.

Rozkład momentu obwodowego $m_\theta = m_\theta(\rho)$ i prędkości ugięcia $w = w(\rho)$ w obu wypadkach uzyskujemy z równań (3.2) i (3.9) po podstawieniu do nich poprzednio otrzymanego momentu m_r .

4. PRZYKŁADY

Poniżej przedstawiamy przykłady zastosowania opisanych algorytmów do rozwiązywania płyt izotropowych i ortotropowych.

4.1. Płyty izotropowe

Warunek (2.4) przyjmuje klasyczną postać warunku plastyczności Hubera-Misesa

$$(4.1) \quad m_r^2 - m_r m_\theta + m_\theta^2 - 1 = 0.$$

Na przykładzie płyty pierścieniowej statycznie niewyznaczalnej najpierw sformułujemy zadanie (3.12)–(3.13) dla warunku (4.1), a następnie pokażemy wyniki rozwiązania konkretnej płyty.

Zadanie (3.12, 3.13) polega w tym przypadku na rozwiązaniu następujących równań:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{dm_r}{d\rho} &= \frac{1}{\rho} \left(-\frac{1}{2} m_r - \frac{1}{2} \sqrt{4-3m_r^2} + q_r \rho \right), & 0 \leq \rho \leq \rho^*, \\ \frac{dm_r}{d\rho} &= \frac{1}{\rho} \left(-\frac{1}{2} m_r + \frac{1}{2} \sqrt{4-3m_r^2} + q_r \rho \right), & \rho^* \leq \rho \leq 1 \end{aligned}$$

z warunkami

$$m_r(a) = m_a, \quad m_r(\rho^*) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad m_r(1) = m_1.$$

Możemy teraz sprecyzować funkcję α w równaniu (3.14):

$$(4.3) \quad \alpha(\rho, \mu, \beta) = -\mu [QR(\rho) - \beta QR(1)] - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

i ustalić ograniczenie na wartości początkowe μ i β wynikające z wymagania, aby równanie $\alpha(\rho) = 0$ miało rozwiązanie w przedziale $\langle a, 1 \rangle$. Przy spełnionym założeniu, że płyta obciążona jest prostopadłe do płaszczyzny środkowej o tym samym zwrocie na całej powierzchni, takie rozwiązanie jest tylko jedno, tzn.

$$(4.4) \quad \alpha(1) \alpha(a) \leq 0,$$

nierówność ta jest spełniona jednocześnie z warunkami następującymi:

$$(4.5) \quad \left(\alpha(1) = -\mu QR(1) (1 - \beta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \wedge (\mu > 0) \wedge (0 < \beta < 1) \wedge (QR(1) > 1) \\ \Rightarrow \alpha(1) < 0.$$

Z nierówności (4.4) i (4.5) wynika, że $\alpha(a) \geq 0$, a ponieważ $QR(a) = 0$, przeto otrzymujemy z (4.3) ograniczenia, które mają spełniać parametry μ i β na każdym kroku obliczeń,

$$(4.6) \quad \mu \beta QR(1) \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Jeżeli nie istnieją takie $\mu > 0$ i $\beta > 0$, dla których nierówność (4.6) jest spełniona to znaczy, że rozwiązania zadania w ramach przyjętych założeń nie ma.

Po rozwiązaniu zadania (4.2) obliczamy ze wzorów (3.2) i (3.9) moment m_θ i prędkość ugięcia w , które dla warunku (4.1) są następujące:

w przedziale $a \leq \rho \leq \rho^*$,

$$(4.7) \quad \begin{aligned} m_\theta &= \frac{1}{2} (m_r - \sqrt{4-3m_r^2}), \\ w &= \frac{\int_a^{\rho^*} \exp \left[\int_a^t \left(\frac{-3m_r(s)}{2s \sqrt{4-3m_r^2}} - \frac{1}{2s} \right) ds \right] dt}{\int_a^{\rho^*} \exp \left[\int_a^t \left(\frac{-3m_r(s)}{2s \sqrt{4-3m_r^2}} - \frac{1}{2s} \right) ds \right] dt}; \end{aligned}$$

DATA 30 (03) 77

PRZYKŁAD 3.001

OBCIĄŻENIE ROZŁOŻONE $M=2$

$C_1=0.200$

$P_1(R)=-5.000 \quad R(1)+2.200$

$C_2=0.400$

$P_2(R)=+2.200$

$C_3=1.000$

OBCIĄŻENIE LINIOWE $N=2$

$B_1=0.600 \quad Q_1=1.000$

$B_2=0.800 \quad Q_2=.500$

$A=0.200$

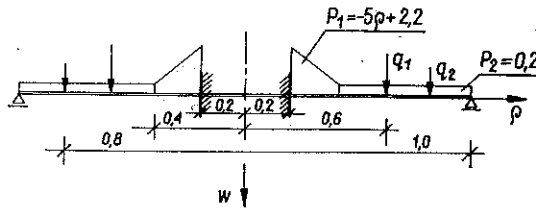
$MR(A)=-1.1540 \quad MR(1)=0.0000$

$MI \text{ POCZĄTKOWE}=6.00$

$\text{PODZIAŁ}=9$

$\text{DOKŁADNOŚĆ } MI=0.001000$

$\text{BETA POCZĄTKOWE}=.300$



ROZWIĄZANIE ZUPEŁNE (HUBER-MISES)

$MI=6.662$

$BETA=0.423$

$RO \times =0.600$

ROZKŁAD MOMENTÓW I PRĘDKOŚCI UGIĘĆ

RO	MR	MT	W
0.200	-1.1540	-0.6118	0.0000
0.300	-0.1060	-1.0488	0.3136
0.400	0.4358	-0.7081	0.5816
0.500	0.8218	-0.2916	0.8026
0.600	1.1547	0.5774	1.0000
0.700	0.9975	1.0024	0.8671
0.800	0.8274	1.1112	0.5880
0.900	0.4032	1.1387	0.2936
1.000	0.0000	1.0000	0.0000

Rys. 5

w przedziale $\rho^* \leq \rho \leq 1$

$$m_\theta = \frac{1}{2} (m_r + \sqrt{4 - 3m_r^2}),$$

$$(4.8) \quad w = 1 - \frac{\int_{\rho^*}^{\rho} \exp \left[\int_{\rho^*}^t \left(\frac{3m_r(s)}{2s\sqrt{4-3m_r^2}} - \frac{1}{2s} \right) ds \right] dt}{\int_{\rho^*}^1 \exp \left[\int_{\rho^*}^t \left(\frac{3m_r(s)}{2s\sqrt{4-3m_r^2}} - \frac{1}{2s} \right) ds \right] dt}$$

Dla rozwiązania płyt statycznie wyznaczalnych i statycznie niewyznaczalnych został napisany w języku ALGOL 1204 program na maszynie cyfrową ODRA 1204. Rys. 5 przedstawia przykład wydruku wyników rozwiązania wraz ze schematem rozwiązywanej płyty. Obszerny zbiór rozwiązań uzyskanych z wykorzystaniem tego programu jest podany w [11].

4.2. Płyty ortotropowe

Przyjmujemy warunek plastyczności (2.4) w postaci

$$(4.9) \quad f = A_r m_r^2 + 2A_{r\theta} m_r m_\theta + A_\theta m_\theta^2 - 1 = 0.$$

W przypadku gdy współczynniki A_r , $A_{r\theta}$, A_θ są stałe, jest to warunek, który odpowiada ortotropowym płytom jednorodnym. Aby krzywa (4.9) była elipsą rzeczywistą, zgodnie z przyjętymi wcześniej założeniami, współczynniki w równaniu muszą spełniać warunki

$$(4.10) \quad (A_r A_\theta - A_{r\theta}^2 > 0) \wedge (A_r + A_\theta > 0),$$

czyli A_r i A_θ muszą być dodatnie.

Zbadamy warunek plastyczności, dla którego $A_r = 1$, $A_{r\theta} = -b$, $A_\theta = c^2$, czyli

$$(4.11) \quad f = m_r^2 - 2bm_r m_\theta + c^2 m_\theta^2 - 1.$$

Równanie (4.11) jest odpowiednio przekształconym równaniem (4.9) i opisuje tę samą klasę krzywych. Taka postać jest wygodniejsza w obliczeniach numerycznych. Zgodnie z (4.10) parametry b , c muszą spełniać nierówność

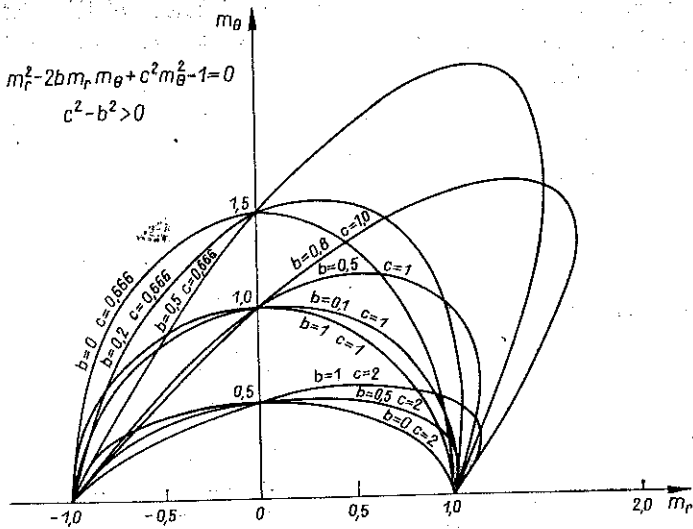
$$(4.12) \quad c^2 > b^2.$$

Na rys. 6 przedstawiono kilka krzywych (4.11) dla różnych par (b, c) . Parametry b i c zależą od modułów plastycznych i powinny być wyznaczone z doświadczenia.

Parametr c jest odwrotnością współczynnika ortotropii A czyli

$$(4.13) \quad c = \frac{1}{A} = \frac{M_{0r}}{M_{0\theta}},$$

gdzie $M_{0\theta}$ i $M_{0r} = M_0$ są odpowiednio granicznymi momentami zginającymi obwodowym i radialnym.



Rys. 6

Żeby skorzystać z algorytmów przedstawionych w części 3 należy w równaniach (3.2), (3.3), i (3.14) przyjąć

$$(4.14) \quad \mathcal{A}(m_r, \rho) = \frac{b}{c^2} m_r,$$

$$(4.15) \quad \mathcal{B}(m_r, \rho) = \frac{c^2 - (c^2 - b^2)m_r^2}{c^4},$$

$$(4.16) \quad \alpha(\rho, \mu, \beta) = -\mu [QR(\rho) - \beta QR(1)] - \frac{c^2 - b}{c \sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Dla wyprowadzenia warunku, który muszą spełniać wartości początkowe parametrów μ i β , przeprowadzamy analizę równania $\alpha(\rho) = 0$, podobnie jak w p. 4.1. W tym celu badamy znak wyrażenia

$$(4.17) \quad \alpha(1) = -\mu [QR(1)(1 - \beta)] - \frac{c^2 - b}{c \sqrt{c^2 - b^2}};$$

gdym

$$(4.18) \quad c^2 - b \geq 0$$

zawsze spełniona jest nierówność $\alpha(1) \leq 0$; dalsza analiza przebiega identycznie jak w p. 4.1 i prowadzi do warunku

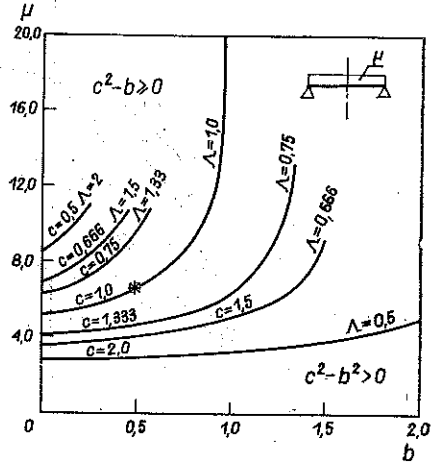
$$(4.19) \quad \mu \beta QR(1) \geq \frac{c^2 - b}{c \sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Jeżeli parametr $c \geq 1$, to nierówność (4.18) zachodzi zawsze, ponieważ wynika ze spełnionej z założenia nierówności (4.12).

Jeżeli parametr $c < 1$, to nierówność (4.18) jest silniejsza od (4.12) i dlatego może się zdarzyć, że nie jest spełniona. Wtedy na znak $\alpha(1)$ mają wpływ oba składniki sumy (4.17) i przed ustaleniem warunku dla μ i β trzeba obliczyć wartość funkcji $\alpha(1)$. Jeżeli $\text{sign } \alpha(1) = -1$ przyjmujemy warunek (4.19); jeżeli $\text{sign } \alpha(1) = 1$, to z (4.4) wynika, że $\text{sign } \alpha(a) = -1$. Stąd otrzymujemy dla μ i β nierówność przeciwną do (4.19):

$$(4.20) \quad \mu\beta QR(1) \leq \frac{c^2 - b}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Podobnie jak dla płyt izotropowych, według algorytmów przedstawionych w p. 3 został zbudowany program na EMC, który służy do rozwiązywania płyt anizotropowych. Na przykładzie kołowej płyty swobodnie podpartej i obciążonej równomiernie (rys. 7) pokazano, jak anizotropia wpływa na nośność graniczną tej płyty. Gwiazdką zaznaczono na rysunku punkt odpowiadający płycie izotropowej. W tym przypadku zwiększenie momentu granicznego w kierunku obwodowym, czyli np. wprowadzenie pierścieniowych żeber, może znacznie podwyższyć nośność graniczną płyty. Wymieniony program umożliwia taką analizę dla dowolnej płyty w ramach przyjętych założeń.



Rys. 7

5. ZAKOŃCZENIE

Z przytoczonych przykładów wynika, że proponowane algorytmy umożliwiają rozwiązanie obszernej klasy zadań nośności granicznej dla płyt kołowo-symetrycznych. Dotychczas zostały wykonane i sprawdzone programy na komputery służące do rozwiązywania jednorodnych płyt izotropowych i ortotropowych. Nie ma żadnych przeszkód, żeby je rozszerzyć np. na płyty niejednorodne.

Proponowana metoda może być także stosowana do analizy płyt wzmocnianych żebrami.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. EASON, *Velocity fields for circular with the von Mises yield condition*, J. Mech. Phys. Solids, 6, 231-235, 1958.
2. G. GUERLEMENT, D. O. LAMBLIN, *Analyse limite de plaques circulaires avec la condition de plasticité de von Mises*, Bull. Techn. de la Suisse Romande, 98, 1, 1972.
3. H. GÜNTHER, G. BRÄUNING, *Die Traglast rotationssymmetrisch belasteter Kreisplatten mit radial veränderlicher Plattendicke und Fließspannung*, Wiss. Z. d. Techn. Hochsch, Karl-Marx-Stadt, 10, 5, 579-581, 1968.
4. H. GÜNTHER, G. BRÄUNING, *Zur Traglast anisotroper Kreisplatten*, Wiss. Z. d. Techn. Hochsch, Karl-Marx-Stadt, 14, 5, 587-592, 1972.

5. H. M. HAYDL, A. N. SHERBOURNE. *Limit loads of variable thickness circular plates in bending*, Nuclear Eng. Design, **22**, 2, 296–300, 1972.
6. H. M. HAYDL, A. N. SHERBOURNE. *Limit loads of variable thickness circular plates accounting for transverse shear*, J. Strain Analys., **8**, 2, 1973.
7. P. G. HODGE, Jr. *Plastic plate theory*, Quart. Appl. Mathem., **22**, 74–77, 1964.
8. H. G. HOPKINS, A. J. WANG. *Load-carrying capacities for circular plates of perfectly-plastic material with arbitrary yield condition*, J. Mech. Phys. Solids, **3**, 117–129, 1954.
9. D. NIEPOSTYN. *Nośność graniczna płyt kołowo-symetrycznych*, Czasopismo Tech., **3**, 1963.
10. A. OSCHATZ. *Bestimmung der Traglast von Kreis- und Kreisringplatten mit Berücksichtigung der Querkraftschubspannungen*, ZAMM, **48**, 5, 325–332, 1968.
11. J. SOKÓŁ-SUPEL, A. GRABARSKI, A. SAWCZUK. *Nośność graniczna metalowych płyt kołowych*, Prace IPPT 41/1975.

Резюме

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КРУГОВОГО-СИММЕТРИЧНЫХ ПЛИТ

Предметом работы является решение задачи предельной несущей способности изгибаемой круговой или кольцевой плиты под равнонаправленной кругового-симметричной нагрузкой. Материал плиты подлелжит пластичности согласно условию пластичности в виде кривой второго порядка по отношению к моментам M_r и M_θ . Представлены алгоритм и метод численного интегрирования уравнений статики и прогибов для таких плит. Метод иллюстрирован примерами плит из материала Губера-Мизеса и его обобщения на случай ортотропных материалов.

SUMMARY

NUMERICAL METHOD FOR EVALUATION OF BEARING CAPACITY OF SYMMETRIC CIRCULAR PLATES

The paper deals with the solution of bearing capacity of bent circular or ring plate subjected to one-directional circularly-symmetric load. Material of the plate yields plastically according to the yield condition having a form of second degree curve with respect to M_r and M_θ . The algorithm and method of numerical integration of static equations and deflections of such plates is presented. The method is illustrated by the examples of plates made of Huber-Mises material and its generalization to the orthotropy case.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 kwietnia 1977 r.