

## O REKURENCYJNOŚCI WIDM CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH CZĘŚĆ II

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW) (\*)

Celem niniejszej pracy jest uogólnienie wyników otrzymanych w części I. Wyniki te rozszerzono na układy widm częstości własnych pokazane na wykresach widmowych. Przedyskutowano zarówno własności Sturm'a tych układów, jak i niektóre numeryczne osobliwości metod wyznaczania częstości własnych. Ustalono ogólne cechy zależności rekurencyjnej między częstościami własnymi i postaciami drgań własnych oraz zilustrowano je odpowiednio dobranymi przykładami. Nacisk położono na zagadnienia wielokrotnych częstości własnych i odpowiadających im form drgań.

### 1. WSTĘP

W pierwszej części pracy [6] omówiono podstawowe zależności zachodzące pomiędzy widmami i formami drgań własnych dwóch liniowo sprężystych układów mechanicznych  $S_n^{k-1}$  i  $S_n^k$  o skończonej liczbie stopni swobody. Analizę przeprowadzono wykorzystując koncepcję metody przemieszczeń, przy czym układ  $S_n^k$  powstawał z  $S_n^{k-1}$  w wyniku usunięcia kolejnego, pojedynczego więzu kinematycznego o numerze  $k$ . Związki rekurencyjne wyprowadzono na podstawie równania drgań własnych układu  $S_n^k$

$$(1.1) \quad (A_k - \lambda I) w_k = \begin{pmatrix} A_{k-1} - \lambda I & b_k \\ b_k^T & a_{kk} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ w \end{pmatrix} = 0,$$

w którym  $A_{k-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1})$  jest macierzą diagonalną utworzoną z wartości własnych układu  $S_n^{k-1}$ , równych kwadratam odpowiednich częstości kołowych.

W tej pracy, której założenia nie różnią się od przyjętych dla części pierwszej, zajmiemy się uogólnieniem na przypadek ciągu widm częstości, wyników otrzymanych poprzednio dla dwóch kolejnych widm. W punkcie 5 podano i omówiono odpowiednio dobrane przykłady i interpretacje mechaniczne, stanowiące ilustrację rozważań teoretycznych.

### OZNACZENIA

- $S_n^n \equiv S_n$  dany układ mechaniczny o  $n$  stopniach swobody,  
 $S_n^0$  układ podstawowy metody przemieszczeń,  
 $S_n^k, 0 < k < n$  układ pośredni o  $k$  stopniach swobody i usuniętych więzach o numerach 1, 2, ...,  $k$ ,

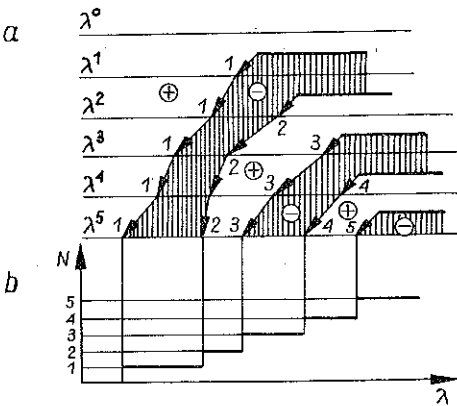
(\*) Pracę wykonano w ramach problemu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.

$\lambda = \theta^2$  parametr określamy umownie jako częstość,  
 $\lambda^k = (\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$  widmo częstości drgań własnych układu  $S_n^k$ ,  
 $\mu_i$   $m_i$  krotna częstość drgań własnych,  
 $Z_i = \{j: \lambda_j = \mu_i\}$ .

## 2. WŁASNOŚCI STURMA CIĄGU WIDM CZĘSTOŚCI [5, 14 i 15]

Rozważmy ciąg  $W = (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n)$ , którego elementy są widmami częstości drgań własnych, kolejnych układów pośrednich  $S_n^1, S_n^2, \dots, S_n^n \equiv S_n$ . Abstrahując celowo od konkretnych własności tych układów, zastosujemy podaną w pracy [6], ogólną zasadę tworzenia widma  $\lambda^k, k > 1$  na podstawie danego widma  $\lambda^{k-1}$ . Zasada ta polega na bezpośrednim wykorzystaniu następującej definicji: widmo  $\lambda^k, k > 1$  jest zbiorem elementów  $\lambda_i^k$  takich, że  $\lambda_i^k \in \gamma_i, i = 1, 2, \dots, k$ , gdzie  $\gamma_i = [\lambda_{i-1}^{k-1}, \lambda_i^{k-1}]$

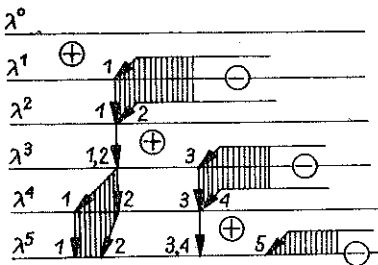
jest domkniętym przedziałem na osi częstości  $\lambda$ , przy czym zakłada się, że  $\lambda_0^{k-1} = 0, \lambda_k^{k-1} = \infty$ . Wynika stąd również inne sformułowanie, często spotykane w literaturze [1, 7 i 14]: elementy widma  $\lambda^{k-1} (\lambda^k)$  rozdzielają elementy widma  $\lambda^k (\lambda^{k-1})$  przynajmniej w sensie słabym, tzn.  $\lambda_{i-1}^k \leq \lambda_{i-1}^{k-1} \leq \lambda_i^k (\lambda_{i-1}^{k-1} \leq \lambda_i^k \leq \lambda_{i-1}^{k-1})$ . Prawdliwość tę można sprawdzić na przykładach ciągów  $W$  pokazanych na rys. 1a, 2 i 3.



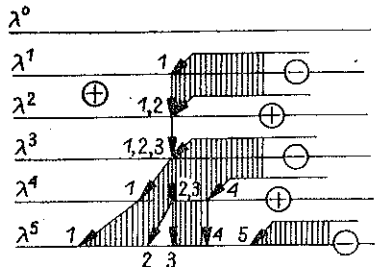
Rys. 1

Przytoczona definicja pozwala budować wszystkie teoretycznie możliwe ciągi  $W$  i analizować ich ogólne własności bez uciekania się do rozważań nad

konkretnymi przypadkami szczególnymi układów  $S_n$ . Takie ogólne postawienie zagadnienia umożliwia przeniesienie wszystkich wyników jego analizy na dowolne przypadki szczególne, co stanowi podstawową zaletę tego rodzaju postępowania.



Rys. 2



Rys. 3

Niech  $W$  będzie ciągiem widmowym pokazanym na rys. 1a, odznaczającym się całkowitym brakiem częstości wielokrotnych. Na rysunku tym, kolejnym elementom widm (częstościom własnym) przypisano ich numery porządkowe. Sąsiadujące

elementy o takich samych numerach połączono odcinkami skierowanymi uzyskując w ten sposób uporządkowaną rodzinę linii łamanych. Każdy z odcinków skierowanych określa przesunięcie odpowiedniego elementu widma, spowodowane usunięciem jednego więzu kinematycznego wywołującym przekształcenie się układu  $S_n^{k-1}$  w układ  $S_n^k$ ,  $k=2, 3, \dots, n$ .

Oznaczmy przez  $N_k(\lambda)$  funkcję określającą liczbę elementów  $\lambda_i^k$  widma  $\lambda^k$  o wartościach niewiększych od danej wartości  $\lambda$ , tzn.

$$(2.1) \quad N_k(\lambda) = \max_{\lambda_i^k \leq \lambda} i.$$

Na podstawie rys. 1a stwierdzamy, że wartość funkcji  $N_k(\lambda)$  można obliczyć w sposób następujący. Na osi częstości widma  $\lambda^k$  obieramy punkt o współrzędnej  $\lambda$  i prowadzimy przez niego w górę, pionową półprostą przecinającą wzmiankowane linie łamane, przebiegające powyżej osi widma  $\lambda^k$ . Liczba tych przecięć jest poszukiwaną wartością funkcji  $N_k(\lambda)$ .

Potraktujmy każde z widm ciągu  $W$  jako zbiór pierwiastków odpowiedniego wielomianu charakterystycznego. Ponieważ w rozważanym przypadku nie występują żadne częstości wielokrotne, więc każdemu elementowi widma odpowiada jedna zmiana znaku wartości tego wielomianu. Dla problemu własnego  $(A_k - \lambda I)v_k = 0$  układu  $S_n^k$ , jego wielomian charakterystyczny  $w_k(\lambda) = \det(A_k - \lambda I) > 0$ , gdy  $\lambda < \lambda_1^k$ . Wynika stąd, że linia łamana nr 1 (łącząca elementy o numerach 1) może być interpretowana jako «linia pierwszej zmiany znaku» oddzielająca «obszar» dodatni ( $\lambda < \lambda_1^k$ ) od «obszaru» ujemnego ( $\lambda_1^k < \lambda < \lambda_2^k$ ). Następna, druga zmiana znaku występuje «wzdłuż» linii łamanej nr 2 itd. Cała rodzina tych linii pozwala więc wyróżnić na rys. 1a kolejne «obszary» stałego znaku, na przemian raz dodatniego a raz ujemnego (zakreskowane).

Z powyższych rozważań wynika, że wartość funkcji  $N_k(\lambda)$  jest równa liczbie pierwiastków  $\lambda_i^k$  wielomianu charakterystycznego  $w_k(\lambda)$  takich, że  $\lambda_i^k \leq \lambda$ , i może być obliczona bez znajomości tych pierwiastków jako liczba zmian znaków występujących w ciągu liczbowym  $L = (w_0(\lambda), w_1(\lambda), \dots, w_k(\lambda))$ , w którym z definicji przyjęto  $w_0(\lambda) \equiv 1$ . Jest to własność podstawowa odkryta po raz pierwszy przez Sturma [5 i 10]. Wykres funkcji  $N_n(\lambda)$  dla widma  $\lambda^n$ ,  $n=5$ , z rys. 1a przedstawiono na rys. 1b.

Ny rys. 2 i 3 pokazano bardziej ogólne przypadki ciągów  $W$ , w których występują widma o wielokrotnych częstościach własnych. Okazuje się jednak, że również i w tych przypadkach, odpowiednie ciągi liczbowe  $L = (w_0(\lambda), w_1(\lambda), \dots, w_k(\lambda))$  zachowują opisaną powyżej, podstawową własność Sturma.

Wykorzystanie własności ciągów Sturma stało się podstawą wielu nowoczesnych, komputerowych metod obliczania częstości i wektorów własnych [2, 3, 4, 7, 11, 12, 13 i 15], odznaczających się wysoką sprawnością i dokładnością obliczeń. Zasadniczą ideą wszystkich tych metod jest obliczanie wartości funkcji  $N_k(\lambda)$  dla kolejnych, odpowiednio wybieranych wartości argumentu  $\lambda$ . Uzyskaną w ten sposób informację na temat liczby częstości własnych  $\lambda_i^k$  spełniających warunek  $\lambda_i^k \leq \lambda$ , wykorzystuje się najpierw dla szybkiej lokalizacji poszukiwanych częstości, a następ-

nie dla obliczenia ich dokładnych wartości. W tym ostatnim etapie, dla przyspieszenia procesu iteracji, stosowane są odpowiednie metody interpolacyjne.

Z punktu widzenia zastosowań praktycznych posługiwanie się funkcją  $N_k(\lambda)$  jest szczególnie efektywne w zagadnieniach dotyczących badania zjawisk rezonansowych, w których z reguły interesuje nas odpowiedź na pytanie, czy w danym przedziale  $(\lambda_1^n, \lambda_2^n)$  osi częstości  $\lambda$ , stanowiącym tzw. pasmo rezonansowe układu  $S_n$ , znajdują się częstości własne tego układu, czy też nie. Liczba częstości własnych występujących w rozważanym przedziale wynosi  $N_n(\lambda_2) - N_n(\lambda_1)$ . Obliczanie wartości tych częstości jest tutaj jednak zbędne, co decyduje o efektywności postępowania [12].

### 3. OBLICZANIE WARTOŚCI FUNKCJI $N_n(\lambda)$

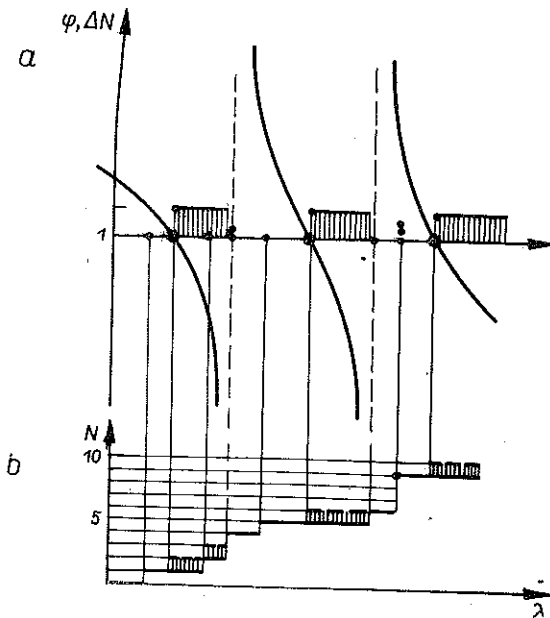
Omówimy teraz kilka problemów ogólnych, związanych z wykorzystaniem własności ciągu Sturm, dla obliczania wartości funkcji  $N_n(\lambda)$ . Zwrócimy przy tym uwagę na pewne osobliwości, które przy numerycznej realizacji przedstawianych w dalszym ciągu idei postępowania wymagają w praktyce stosowania całego szeregu dodatkowych zabiegów i chwytów obliczeniowych [2, 3, 7 i 51]. Szczegóły te, jakkolwiek bardzo istotne, nie mieszczą się w ramach obecnej pracy i dlatego zostaną potraktowane tylko marginesowo.

Bezpośrednie wykorzystanie własności Sturm wymaga określenia znaków kolejnych elementów ciągu  $L = (w_0(\lambda), w_1(\lambda), \dots, w_n(\lambda))$ , w którym  $w_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda I)$  jest  $i$ -tym minorem głównym macierzy  $A_n - \lambda I$ . Najprostszym sposobem postępowania jest więc obliczenie wartości  $\det(A_i - \lambda I)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , i ustalenie na tej podstawie liczby zmian znaków w ciągu  $L$ . Jeżeli  $\lambda \notin \lambda^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , to w tym przypadku proces obliczeń przebiega w sposób regularny. I tak np. dla ciągu  $W$  z rys. 3, gdy  $\lambda_3^5 < \lambda < \lambda_4^5$ , mamy z dokładnością do znaków:  $L_1 = (+, -, +, -, -, -)$ , skąd wynika, że  $N_5(\lambda) = 3$ . Podobnie regularna sytuacja występuje również i wtedy, gdy  $\lambda = \lambda_3^k$ , o ile jednak  $\lambda_3^k$  jest pojedynczą częstością własną. Na przykład dla  $W$  z rys. 1a, gdy  $\lambda = \lambda_3^4$ , otrzymujemy  $L_2 = (+, -, -, +, 0, -)$ , skąd po wykreśleniu zera wynika, że  $N_5(\lambda) = 3$ . W ogólności nie można jednak wykluczyć takiego przypadku, w którym  $\lambda$  jest równa wielokrotnej częstości własnej i kiedy w  $L$  pojawiają się ciągi zer. Przypadek taki ma miejsce np. dla  $W$  z rys. 3, gdy  $\lambda = \lambda_3^5$  i kiedy  $L_3 = (+, 0, 0, 0, 0)$ . Tym razem obliczenie  $N_5(\lambda)$  na podstawie  $L$  nie jest bezpośrednio możliwe [7 i 15]. Jeżeli jednak uzmiennimy  $\lambda$  i nadamy mu wartość  $\lambda + \varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon > 0$  jest dostatecznie małą liczbą, to  $L_3 = (+, -, +, -, -, -)$  i  $N_5(\lambda + \varepsilon) = N_5(\lambda) = 3$ . Dla  $\lambda - \varepsilon$  otrzymujemy  $L_3 = (+, +, +, +, -, +)$  i  $N_5(\lambda - \varepsilon) = 2$ . Na tej podstawie możemy stwierdzić, że rozważana wartość  $\lambda$  jest trzecią z kolei, pojedynczą ( $\Delta N = 1$ ) częstością widma  $\lambda^5$ . Osobliwość spowodowana jest tym, że  $\lambda_3^5$  jest częstością wielokrotną widm  $\lambda^k$ ,  $k = 2, 3, 4$ .

Badanie liczby zmian znaków w ciągu  $L$  można również przeprowadzić w inny sposób [7]. Wprowadźmy dla ilorazu kolejnych minorów głównych macierzy  $A_n - \lambda I$  oznaczenie  $f_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda I) / \det(A_{i-1} - \lambda I) = w_i(\lambda) / w_{i-1}(\lambda)$  i rozważmy ciąg  $L' = (f_0(\lambda), f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda))$ , w którym z definicji przyjmujemy  $f_0(\lambda) \equiv 1$ . W przy-

padku regularnym, tzn. gdy  $\lambda \notin \lambda^k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , wartość funkcji  $N_n(\lambda)$  jest równa liczbie ujemnych elementów ciągu  $L'$ . Pojawienie się elementu ujemnego oznacza bowiem, że kolejne minory główne różnią się znakiem. Dla rozważanego poprzednio ciągu  $L_1=(+, -, +, -, -, -)$  otrzymujemy zgodnie z definicją  $f_i(\lambda)$  ciąg  $L'_1=(+, -, -, -, +, +)$  o trzech elementach ujemnych, co oznacza, że  $N_5(\lambda)=3$ . Jednak dla ciągu  $L_2=(+, -, -, +, 0, -)$  otrzymujemy już ciąg  $L'_2=(+, -, +, -, 0, \infty)$  wykazujący pewne osobliwości. W tym przypadku wartość funkcji  $N_n(\lambda)$  musimy zdefiniować ogólniej, jako równą liczbie niedodatnich elementów ciągu  $L'$  z zastrzeżeniem, że chodzi tylko o elementy o wartościach skończonych. Sytuacja zupełnie osobliwa występuje w przypadku ciągu  $L_3=(+, 0, 0, 0, 0, 0)$ , którego odpowiednikiem jest  $L'_3=(+, 0, 0/0, 0/0, 0/0, 0/0)$ . Uzmiennienie  $\lambda$  do wartości  $\lambda+\varepsilon$  daje jednak wynik  $L'_3=(+, -, -, -, +, +)$ , który można już interpretować w sposób regularny.

W związku z pojawiającymi się osobliwościami powstaje pytanie, jaki sens ma posługiwanie się ciągami  $L'$ . Okazuje się mianowicie, że w pewnych przypadkach [7] ciągi te można generować na drodze rekurencyjnej, znacznie sprawniej od ciągów  $L$ . Dlatego też obydwa z omówionych sposobów obliczania liczby zmian znaków w ciągach Sturma znajdują zastosowanie z niemal równym powodzeniem. Z przy-



Rys. 4

toczonych przykładów widać jednak wyraźnie, że powodzenie to musi być okupione zastosowaniem właściwych algorytmów, w których wiele uwagi poświęca się np. problemom stabilności numerycznej, nabierającej znaczenia decydującego przy rozwiązywaniu zagadnień o dużym wymiarze [2, 3, 4, 7, 11, 12, 13, i 15].

Dla uzupełnienia ogólnych informacji na temat obliczania wartości funkcji  $N_n(\lambda)$  rozważmy jeszcze przypadek mający co prawda znaczenie przede wszystkim

teoretyczną. Oznaczmy przez  $\varphi_k(\lambda) = \Delta_k(\lambda)/\Delta_{k-1}(\lambda)$  iloraz dwóch wielomianów względnie pierwszych  $\Delta_k(\lambda)$  i  $\Delta_{k-1}(\lambda)$ , powstający z ilorazu kolejnych minorów głównych  $f_k(\lambda) = w_k(\lambda)/w_{k-1}(\lambda)$  w wyniku podzielenia obu tych minorów przez ich największy wspólny dzielnik.

Ponieważ krotności poszczególnych pierwiastków wielomianów  $w_{k-1}(\lambda)$ ,  $w_k(\lambda)$  mogą się różnić co najwyżej o 1 [6], przeto wielomiany  $\Delta_{k-1}(\lambda)$ ,  $\Delta_k(\lambda)$  mają tylko pierwiastki pojedyncze. Wynika stąd, że pierwiastkami wielomianu  $\Delta_k(\lambda)$  są częstości własne o wzrastającej krotności, w tym także i nowe, a pierwiastkami wielomianu  $\Delta_{k-1}(\lambda)$  — częstości własne o malejącej krotności, w tym także i znikające. Częstości nie zmieniające krotności nie są pierwiastkami żadnego z wielomianów  $\Delta_{k-1}(\lambda)$ ,  $\Delta_k(\lambda)$ . Tak więc zera funkcji  $\varphi_k(\lambda)$  odpowiadają częstościom o krotności rosnącej, bieguny zaś — częstościom o krotności malejącej.

Na podstawie powyższego stwierdzamy, że funkcja  $\varphi_k(\lambda)$  informuje nas tylko o zmianach, jakie następują w widmie układu  $S_n^{k-1}$ , po przekształceniu go w układ  $S_n^k$  przez usunięcie  $k$ -tego więzu kinematycznego. Zauważmy, że przy przekształceniu tym liczba częstości  $\lambda_i \leq \lambda$  powiększa się o 1 ( $\Delta N_k = 1$ ), gdy  $\varphi_k(\lambda) \leq 0$  i nie zmienia się ( $\Delta N_k = 0$ ), gdy  $\varphi_k(\lambda) > 0$ . Jak się okazuje,  $\Delta N_k = 0$  również i wtedy, gdy  $\varphi_k(\lambda) = \pm \infty$ .

Funkcję  $\varphi_k(\lambda)$  można przedstawić w postaci

$$(3.1) \quad \varphi_k(\lambda) = \Delta_k(\lambda)/\Delta_{k-1}(\lambda) = a_{kk} - \lambda - \sum_{i=1}^l \frac{c_i^2}{\mu_i - \lambda},$$

gdzie  $\mu_i \in \lambda^{k-1}$ ,  $i=1, 2, \dots, l$  są różnymi częstościami własnymi układu  $S_n^{k-1}$  o krotnościach  $m_i$ ,  $i=1, 2, \dots, l$ ,  $c_i^2 = \sum_{j \in Z_i} b_{jk}^2$  ([6]).

Dzięki temu, że  $d\varphi_k/d\lambda \leq -1$  funkcja  $\varphi_k$  jest monotonicznie malejąca. Jej wykres, sporządzony dla pewnego przypadku szczególnego, pokazano na rys. 4a, na którym naniesiono również wartości funkcji  $\Delta N_k$ . Rysunek 4b ilustruje dwa wykresy funkcji:  $N_{k-1}$  i  $N_k$ . Zgodnie z definicją (2.1) funkcji  $N_k$ , jej wartości w punktach nieciągłości są równe granicom prawostronnym.

Oznaczmy przez  $\Phi = (\varphi_0(\lambda), \varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda))$  ciąg, w którym z definicji przyjmujemy  $\varphi_0(\lambda) \equiv 1$ . Zgodnie z określeniem funkcji  $\varphi_k(\lambda)$ , wyrazy tego ciągu mogą przyjmować dowolne wartości liczbowe z przedziału  $(-\infty, \infty)$ , przy czym są one zawsze określone lub równe  $\pm \infty$ . Jeżeli w ciągu  $\Phi$  wykreśliśmy te jego elementy, które mają wartości nieskończone (a więc nieokreślonego znaku), to pozostałe elementy tworzą już ciąg regularny, przy czym wartość funkcji  $N_n(\lambda)$  jest równa liczbie niedodatnich elementów tego ciągu.

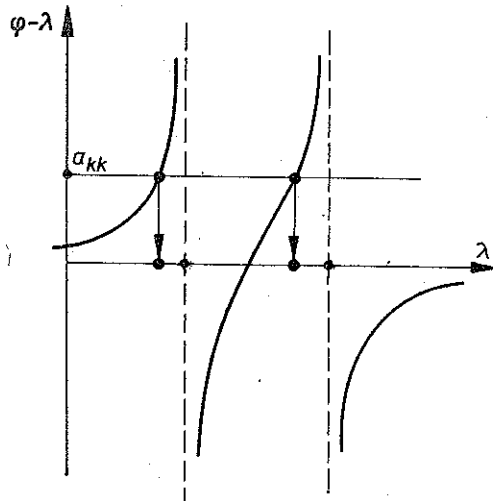
#### 4. BEZMASOWE WIĘZY KINEMATYCZNE

W dotychczasowych rozważaniach przez  $n$  oznaczaliśmy liczbę kinematycznych stopni swobody układu  $S_n$  i milcząco zakładaliśmy, że jest ona równa liczbie jego dynamicznych stopni swobody. Przyjmiemy teraz że liczba  $m$  tych ostatnich może być mniejsza od  $n$  i wprowadzimy do rozważań  $N$  tzw. bezmasowych stopni swobody. W tym przypadku więc będziemy mieć  $n = m + N$  (rys. 17).

W przypadku występowania więzów bezmasowych rekurencyjne równanie częstości podane w pracy [6] przybiera nieco ogólniejszą postać

$$(4.1) \quad a_{kk} - \alpha\lambda = \sum_{i=1}^l \frac{c_i^2}{\mu_i - \lambda},$$

gdzie  $\alpha=1$ , gdy więz  $k$  odpowiada dynamicznemu stopniowi swobody (tzw. więz masowy) i  $\alpha=0$ , gdy więz  $k$  jest bezmasowy. Jak wynika z rys. 5, ilustrującego graficzny sposób rozwiązania równania (4.1) w przypadku  $\alpha=0$ , przy usuwaniu więzów bezmasowych zachodzi relacja  $\lambda_i^{k-1} \geq \lambda_i^k$ ,  $i=1, 2, \dots, m'$ , gdzie  $m'$  jest liczbą usuniętych poprzednio więzów masowych.



Rys. 5

Z podanej na rys. 19a ilustracji ciągu  $W$  dla układu z rys. 17 wynika (por. rys. 3), że również i w przypadku występowania więzów bezmasowych ciągi widmowe zachowują podstawową własność Sturma i omówione poprzednio sposoby obliczania wartości funkcji  $N_k(\lambda)$  nadal pozostają w mocy. Rys. 19b przedstawia ciąg widmowy układu z rys. 17a, w którym powiększona została sztywność jego środkowego przęsła.

## 5. INTERPRETACJE MECHANICZNE

Z algebraicznego punktu widzenia dowolny układ  $S_n$  stanowi pewien określony operator liniowy  $L$  działający w przestrzeni  $R^n$  i odwzorowujący ją na siebie. W ujęciu metody przemieszczeń mechaniczny sens odwzorowania  $L: R^n \rightarrow R^n$  polega na przyporządkowaniu każdemu  $n$ -wyrazowemu ciągowi liczb rzeczywistych, opisującemu stan przemieszczenia układu  $S_n$ , takiego samego ciągu określającego stan obciążenia tego układu.

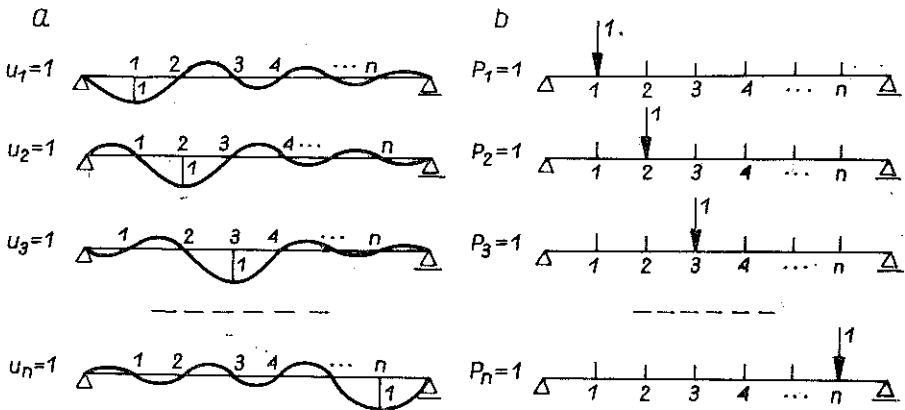
Własności operatora  $L$  wynikają z mechanicznych własności układu  $S_n$  i dlatego są niezależne od rodzaju bazy przyjętej w  $R^n$ . Przyjęcie bazy ma natomiast zasadniczy

wpływ na macierzową postać operatora  $L$ . Przyjmując odpowiednie bazy w  $R^n$  możemy więc dzięki temu uzyskiwać takie reprezentacje macierzowe operatora, jakie są najwygodniejsze dla przeprowadzanych rozważań.

Przy posługiwaniu się układami pośrednimi  $S_n^k$ , działanie operatora  $L$  zaveżamy do podprzestrzeni  $R^k \subset R^n$ , przy czym odwzorowanie  $L: R^k \rightarrow R^k$  może być wtedy interpretowane bądź za pomocą ciągów  $k$ -wyrazowych, bądź też  $n$ -wyrazowych o  $n-k$  zerowych elementach.

Ustalmy następujące dwa izomorfizmy  $l_1, l_2$  nazywane w dalszym ciągu izomorfizmami naturalnymi. Izomorfizm  $l_1$ : stanowi przemieszczenia, w którym przez  $u_i, i=1, 2, \dots, n$  oznaczono przemieszczenie  $i$ -tego więzu układu  $S_n$ , odpowiada wektor (ciąg)  $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)^T, u_i \in R$ . Izomorfizm  $l_2$ : stanowi obciążenia, w którym przez  $P_i, i=1, 2, \dots, n$ , oznaczono obciążenie  $i$ -tego więzu układu  $S_n$  — odpowiada wektor (ciąg)  $P=(P_1, P_2, \dots, P_n)^T, P_i \in R$ .

Bazę naturalną w  $R^n$ , którą oznaczymy przez  $(e)_1$ , tworzy  $n$  rzeczywistych ciągów liczbowych  $e^i=(e_1^i, e_2^i, \dots, e_i^i, \dots, e_n^i), i=1, 2, \dots, n$ , takich, że  $e_j^i=\delta_j^i$  (symbol Kroneckera). Dzięki określeniu izomorfizmów  $l_1$  i  $l_2$ , bazy  $(e)_1$  w  $R^n$ , odpowiadają bazy stanów przemieszczeń i obciążeń układu  $S_n$  pokazane na rys. 6a, b.



Rys. 6

Istotną cechą izomorfizmu naturalnego  $l_1$  ( $l_2$ ) jest to, że przemieszczenie  $u_i$  (obciążenie  $P_i$ )  $i$ -tego więzu układu  $S_n$  jest równocześnie  $i$ -tą współrzędną wektora  $u$  ( $P$ ) liczoną względem bazy naturalnej  $(e)_1$ .

Macierzową reprezentacją naturalną operatora  $L$ , odpowiadającą przyjęciu bazy  $(e)_1$  w  $R^n$ , jest kanoniczny układ równań metody przemieszczeń

$$(5.1) \quad (K - \lambda M)u = P, \quad \lambda = \theta^2,$$

w którym przez  $K$  i  $M$  oznaczono  $n \times n$ -wymiarowe macierze sztywności i bezwładności układu  $S_n$ , a przez  $u$  i  $P$  — jego wektory przemieszczenia i obciążenia o częstości kołowej  $\theta$ . Macierz  $K - \lambda M$  nazywana jest macierzą sztywności dynamicznej układu  $S_n$ .

Równanie (5.1) można przekształcić do postaci standardowej

$$(5.2) \quad (A - \lambda I)v = R,$$



posługując się rozkładem macierzy  $M$  na czynniki trójkątne metodą Choleskiego [9],

$$(K - \lambda M)u = (K - \lambda C^T C)u = (KC^{-1} - \lambda C^T)Cu = P,$$

i wprowadzając oznaczenia

$$(5.3) \quad v = Cu, \quad R = C^{-T}P, \quad A = C^{-T}KC^{-1},$$

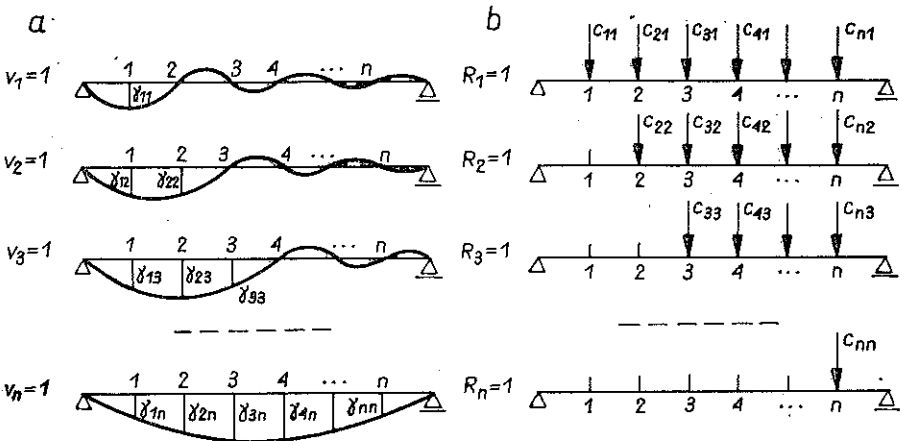
gdzie  $C$  jest macierzą górnotrójkątną.

Na podstawie (5.3) otrzymujemy

$$(5.4) \quad u = C^{-1}v, \quad P = C^T R,$$

skąd wynika, że wektor  $u(P)$  powstaje jako kombinacja liniowa kolumn macierzy  $C^{-1}(C^T)$  o współczynnikach równych wartościom kolejnych elementów ciągu  $v(R)$ . Elementy ciągu  $v(R)$  można więc interpretować jako współrzędne wektora  $u(P)$  względem bazy  $(e)_2'$  ( $(e)_2''$ ) utworzonej w  $R^n$  przez kolumny macierzy  $C^{-1}(C^T)$ .

Standardowa reprezentacja (5.2) operatora  $L$  odpowiada więc przyjęciu w  $R^n$  dwu baz wzajemnych  $(e)_2'$  i  $(e)_2''$ , którym poprzez izomorfizmy  $I_1$  i  $I_2$  odpowiadają bazy stanów przemieszczeń i obciążeń pokazane na rys. 7a, b. Na rysunkach tych przez  $\gamma_{ij}$ ,  $c_{ij}$  oznaczono odpowiednie elementy macierzy  $C^{-1}$ ,  $C^T$ .



Rys. 7

Najprostszą reprezentację operatora  $L$  uzyskuje się wykorzystując dla utworzenia baz wzajemnych w  $R^n$  jego unormowane wektory (formy) własne. Oznaczmy przez  $V^l$  macierz o rozmiarach  $n \times m_l$ , której kolumny są wzajemnie ortogonalnymi i unormowanymi wektorami własnymi operatora  $L$  w reprezentacji standardowej, odpowiadającymi  $m_l$ -krotnej częstości własnej  $\mu_l$ . Jeżeli  $l$  jest liczbą różnych częstości własnych tego operatora, to macierz  $V = (V^1, V^2, \dots, V^l)$  jest jego ortonormalną macierzą własną.

Własną reprezentację operatora  $L$

$$(5.5) \quad (A - \lambda I)w = F$$

otrzymamy z (5.2) posługując się przekształceniem

$$(5.6) \quad v = Vw$$

i wprowadzając oznaczenia

$$(5.7) \quad F = V^T R, \quad A = V^T A V = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

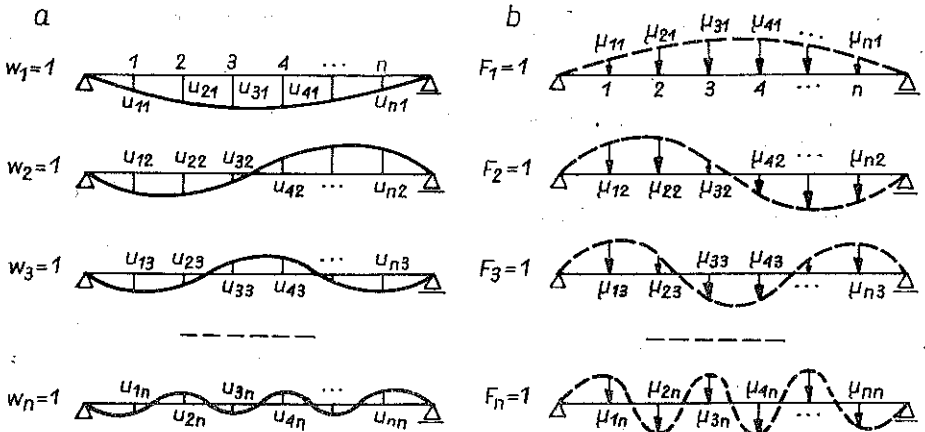
Na podstawie (5.4), (5.6) i (5.7) stwierdzamy, że

$$(5.8) \quad u = C^{-1} V w = U w, \quad P = C^T V F = U^{-T} F = M U F,$$

gdzie  $U = C^{-1} V$  jest macierzą własną operatora  $L$  w reprezentacji naturalnej, przy czym  $U^T M U = I$  [6].

Z (5.8) wynika, że elementy ciągu  $w$  ( $F$ ) możemy interpretować jako współrzędne wektora  $u$  ( $P$ ) względem bazy  $(e'_3)$  ( $(e''_3)$ ), jaką w  $R^n$  tworzą kolumny macierzy  $U$  ( $MU$ ).

Własna reprezentacja operatora  $L$  wymaga więc posługiwania się dwiema bazami wzajemnymi  $(e'_3)$  i  $(e''_3)$ , którym odpowiadają bazy stanów przemieszczeń i obciążeń układu  $S_n$  pokazane na rys. 8a, b. Na rysunkach tych przez  $u_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  oznaczono odpowiednie elementy macierzy  $U$ ,  $MU$ . Elementy bazy  $(e'_3)$  są kolejnymi formami drgań własnych układu  $S_n$ , elementy zaś bazy  $(e''_3)$  są obciążeniami wprawiającymi ten układ w takie drgania wymuszone, których formy są formami odpowiednich drgań własnych.



Rys. 8

Jako ostatnią, zajmiemy się rekurencyjną reprezentacją operatora  $L$  zawężonego do podprzestrzeni  $R^k \subset R^n$ :

$$(5.9) \quad \begin{pmatrix} A_{k-1} - \lambda I & b_k \\ b_k^T & a_{kk} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F \end{pmatrix}.$$

Reprezentacja ta powstaje z (5.2) napisanego dla układu  $S_n^k$

$$(5.10) \quad (A_k - \lambda I) v_k = \begin{pmatrix} A_{k-1} - \lambda I & b_{k-1} \\ b_{k-1}^T & a_{kk} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{k-1} \\ R \end{pmatrix} = R_k$$

po zastosowaniu transformacji

$$(5.11) \quad \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ w \end{pmatrix},$$

w której przez  $V_{k-1}$  oznaczono ortonormalną standardową macierz własną układu  $S_n^{k-1}$ , i po wprowadzeniu oznaczeń

$$(5.12) \quad \begin{aligned} A_{k-1} &= V_{k-1}^T A_{k-1} V_{k-1} = \text{diag}(\lambda_1^{k-1}, \lambda_2^{k-1}, \dots, \lambda_{k-1}^{k-1}), \\ b_k &= V_{k-1}^T b_{k-1}, \\ \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V_{k-1}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{k-1} \\ R \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na podstawie (5.4), (5.11) i (5.12) otrzymujemy

$$(5.13) \quad \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ u \end{pmatrix} = C_k^{-1} \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{k-1}^{-1} & \gamma_k \\ 0 & \gamma_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{k-1} & \gamma_k \\ 0 & \gamma_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ w \end{pmatrix},$$

$$(5.14) \quad \begin{pmatrix} P_{k-1} \\ P \end{pmatrix} = C_k^T \begin{pmatrix} R_{k-1} \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{k-1}^T & 0 \\ c_k^T & c_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} M_{k-1} U_{k-1} & 0 \\ m_k^T U_{k-1} & c_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F \end{pmatrix},$$

gdzie przez  $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \gamma_{kk} \end{pmatrix}$ ,  $(C_k^T, c_{kk})$  oznaczono  $k$ -tą kolumnę i  $k$ -ty wiersz macierzy  $C_k^{-1}$ ,  $C_k^T$ , a przez  $m_k^T$  —  $k$ -ty wiersz macierzy  $M_k$  nie zawierający elementu  $m_{kk}$ .

Jak wynika z (5.13), elementy ciągu  $w$  można interpretować jako współrzędne wektora  $u$  względem bazy  $(e)_4'$ , jaką w  $R^k$  tworzą kolumny macierzy

$$\begin{pmatrix} U_{k-1} & \gamma_k \\ 0 & \gamma_{kk} \end{pmatrix}.$$

Baza ta jak widać powstaje z  $k-1$  unormowanych form drgań własnych układu  $S_n^{k-1}$ , do których zostaje dołączona forma drgania wymuszonego, określona przez ostatnią kolumnę macierzy  $C_k^{-1}$  (rys. 9a). Bazę wzajemną  $(e)_4''$  w  $R^k$  stanowią kolumny macierzy

$$\begin{pmatrix} M_{k-1} U_{k-1} & 0 \\ m_k^T U_{k-1} & c_{kk} \end{pmatrix},$$

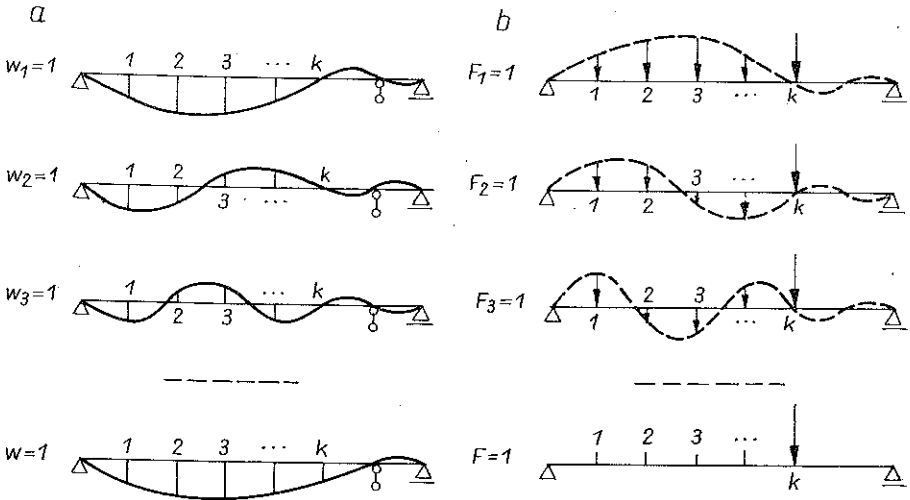
którym odpowiadają obciążenia układu  $S_n^k$  pokazane na rys. 9b.

Zajmiemy się teraz badaniem szczególnego przypadku drgań wymuszonych układu  $S_n^k$ , jakie wykonuje on pod wpływem obciążenia tylko jedną siłą skupioną działającą w punkcie  $k$ . Zauważmy przy tym, że jeżeli  $F_{k-1} = 0$ ,  $F \neq 0$ , to na podstawie (5.14) mamy również  $P_{k-1} = 0$ ,  $P \neq 0$ . Z (5.13) wynika natomiast, że jeżeli  $w = 0$ , to także  $u = 0$ . Zwróćmy też uwagę na fakt, że rozważane drgania układu  $S_n^k$  stają się jego swobodnymi drganiami własnymi, gdy  $F = 0$ . W przypadku jednak gdy  $w = 0$ , drgania te przekształcają się w drgania własne układu  $S_n^{k-1}$ .

Odpowiedź układu  $S_n^k$  obciążonego siłą  $F$  o częstotliwości  $\lambda \notin \lambda^{k-1}$  obliczymy na podstawie równania (5.9) uwzględniając nieosobliwość macierzy  $A_{k-1} - \lambda I$ :

$$(A_{k-1} - \lambda I)w_{k-1} + b_k w = 0,$$

$$b_k^T w_{k-1} + (a_{kk} - \lambda)w = F.$$



Rys. 9

Mamy zatem

$$(5.15) \quad \begin{aligned} w_{k-1} &= -(A_{k-1} - \lambda I)^{-1} b_k w, \\ -b_k^T (A_{k-1} - \lambda I)^{-1} b_k w + (a_{kk} - \lambda)w &= F, \\ \left( a_{kk} - \lambda - \sum_{i=1}^l c_i^2 / (\mu_i - \lambda) \right) w &= F \end{aligned}$$

lub (por. (3.1))

$$(5.16) \quad \varphi_k(\lambda) w = F.$$

Możemy teraz przyjąć

$$(5.17) \quad F = \varphi_k(\lambda)$$

i wtedy zamiast (5.15) i (5.16) otrzymamy wzór

$$(5.18) \quad w_{k-1} = -(A_{k-1} - \lambda I)^{-1} b_k, \quad w = 1,$$

określający drgania wymuszone siłą (5.17). Ten sam wzór opisuje również drgania własne układu  $S_n^k$  po podstawieniu wartości  $\lambda = \lambda_i^k \in \lambda^k$  takiej, że  $\varphi_k(\lambda_i^k) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Poszukiwanie odpowiedzi układu  $S_n^k$  w przypadku obciążenia go siłą  $F$  o częstości  $\lambda = \mu_i \in \lambda^{k-1}$  musimy przeprowadzić nieco inaczej. Napiszmy równanie (5.9) w postaci

$$(5.19) \quad \begin{aligned} (A'_{k-1} - \mu_i I) w'_{k-1} + b'_k w &= 0, \\ (A''_{k-1} - \mu_i I) w''_{k-1} + b''_k w &= 0, \\ (b'_k)^T w'_{k-1} + (b''_k)^T w''_{k-1} + (a_{kk} - \mu_i) w &= F, \end{aligned}$$

gdzie  $A'_{k-1} = \text{diag}(\mu_i, \mu_i, \dots, \mu_i) = \mu_i I$ . Wobec tego, że  $A'_{k-1} - \mu_i I \equiv 0$  spełnienie pierwszej grupy równań (5.19) jest możliwe tylko wtedy, gdy  $b'_k w = 0$ .

Rozważmy najpierw przypadek, gdy  $b'_k = 0$ . Zamiast (5.19) otrzymujemy

$$(A''_{k-1} - \mu_i I) w''_{k-1} + b''_k w = 0, \quad (b''_k)^T w''_{k-1} + (a_{kk} - \mu_i) w = F,$$

przy czym pierwsza grupa równań (5.19) spełniona jest dla dowolnego  $w'_{k-1}$ . Oznacza to, że niewiadome amplitudy form drgań własnych  $w'_{j, k-1}$ ,  $j \in Z_i$  układu  $S_n^k$  pozostają nieokreślone i drgania te mogą występować zupełnie niezależnie od działającego obciążenia  $F$ , które nie ma na te drgania żadnego wpływu. Pozostałe niewiadome  $w''_{k-1}$  i  $w$  są od tego obciążenia zależne i obliczamy je tak samo, jak dla przypadku  $\lambda \notin \lambda^{k-1}$ , otrzymując

$$(5.20) \quad w''_{k-1} = -(A''_{k-1} - \mu_i I)^{-1} b''_k, \quad w = 1, \quad F = \varphi_k(\mu_i).$$

Jeżeli  $F = \varphi_k(\mu_i) \neq 0$ , to drgania  $w''_{k-1}$ ,  $w$  układu  $S_n^k$  określane przez (5.20) są jego drganiami wymuszonymi. W tym przypadku jedynymi drganiami własnymi tego układu są omawiane powyżej drgania  $w'_{k-1}$ . Drgania te są równocześnie drganiami własnymi układu  $S_n^{k-1}$ , gdyż przy dowolnych  $w'_{k-1}$  i  $w''_{k-1} = w = 0$  spełnione są dwie pierwsze grupy równań (5.19). W rozważanym przypadku nie następuje więc zmiana krotności  $m_i$  częstotliwości własnej  $\mu_i$ . Jeżeli jednak  $F = \varphi_k(\mu_i) = 0$ , to (5.20) określa drgania własne układu  $S_n^k$  odpowiadające częstotliwości pozornie nowej  $\mu_i$ , jakościowo różne od  $m_i$  drgań własnych  $w'_{j, k-1}$ ,  $j \in Z_i$ . W tym przypadku następuje wzrost krotności częstotliwości  $\mu_i$  i powiększenie wymiaru podprzestrzeni własnej odpowiadającej tej częstotliwości.

Przyjmijmy teraz, że  $w = 0$ . Układ równań (5.19) przybiera postać

$$(A'_{k-1} - \mu_i I) w'_{k-1} = 0, \quad (b'_k)^T w'_{k-1} + (b''_k)^T w''_{k-1} = F,$$

przy czym podobnie jak w poprzednim przypadku niewiadome  $w'_{k-1}$  pozostają nieokreślone. Wobec nieosobliwości macierzy  $A'_{k-1} - \mu_i I$  mamy jednak  $w''_{k-1} = 0$  i ostatnia grupa równań upraszcza się:

$$(5.21) \quad (b'_k)^T w'_{k-1} = F.$$

Ponieważ  $w''_{k-1} = w = 0$ , przeto mamy tu do czynienia jedynie z drganiami  $w'_{k-1}$  o nieokreślonych amplitudach, występującymi niezależnie od działającego obciążenia  $F$ . W przypadku gdy  $(b'_k)^T w'_{k-1} = F \neq 0$  drgania te, w liczbie  $m_i$ , są drganiami własnymi układu  $S_n^{k-1}$ , gdyż spełniają pierwsze dwie grupy równań (5.19) dzięki temu, że  $w''_{k-1} = w = 0$ . Jeżeli jednak  $(b'_k)^T w'_{k-1} = F = 0$ , to mamy do czynienia z drga-

niami własnymi układu  $S_n^k$ . Z konieczności spełnienia warunku  $F=0$  wynika, że formy drgań własnych układu  $S_n^k$  powstają jako odpowiednie kombinacje liniowe form  $w'_{j,k-1}$ ,  $j \in Z_i$ . Liczba liniowo niezależnych form drgań własnych tego układu, odpowiadających częstości  $\mu_i$  maleje więc o 1, co świadczy o zmniejszaniu się krotności tej częstości.

Rozważmy teraz otrzymane wyniki pod kątem możliwości wywoływania rezonansu w układach  $S_n^k$  i  $S_n^{k-1}$  za pomocą wymuszeń działających tylko w punkcie  $k$ .

Rezonans w układzie  $S_n^k$  z częstością  $\lambda \in \lambda^k$  objawia się, zgodnie z podaną poprzednio interpretacją, występowaniem w tym układzie drgań o skończonych amplitudach, określonych przez (5.18) lub (5.20), wymuszonych obciążeniem o zerowej wartości ( $F=0$ ).

Jeżeli chodzi o rezonans w układzie  $S_n^{k-1}$  z częstością  $\lambda = \mu_i \in \lambda^{k-1}$ , to możliwe są tu dwie interpretacje wynikające z (5.18) lub (5.20). Wyobraźmy sobie, że przyczyną występowania drgań układu jest wymuszenie kinematyczne o ustalonej wartości  $w=1$  i częstości  $\lambda$ , działające w punkcie  $k$ . Jeżeli częstość wymuszenia  $\lambda = \mu_i \in \lambda^{k-1}$ , to jak wynika z (5.17), (5.18) i (5.20), mamy dla  $j \in Z_i$ :  $w_{j,k-1} = \infty$ ,  $F = \infty$ , o ile tylko  $b_{jk} \neq 0$  ( $c_i \neq 0$ ). Jeżeli  $b_{jk} = 0$  ( $c_i = 0$ ), to wywołanie rezonansu w układzie nie jest możliwe przy częstości  $\lambda = \mu_i$ . Dzieląc  $w_{j,k-1}$ ,  $w$ ,  $F$  przez liczbę nieskończenie wielką, otrzymujemy drugą interpretację rezonansu w układzie  $S_n^{k-1}$ , według której  $w=0$  przy nieokreślonych  $w_{j,k-1}$ ,  $F$ ,  $j \in Z_i$ .

Z rozważań przeprowadzonych poprzednio nad obliczaniem odpowiedzi układu w przypadku  $b'_k \neq 0$ ,  $w=0$  wynika, że możliwość wywołania rezonansu o częstości  $\mu_i$  świadczy o tym, że częstość ta nie powiększa swojej krotności. W szczególności krotność nie zmienia się, gdy  $F=0$  (lub jest nieokreślona) i maleje o 1, gdy  $F \neq 0$  (lub jest nieskończenie wielkie) (por. (5.21)). Wniosek ten, jak zobaczymy, jest bardzo istotny dla zastosowań, które ilustrujemy poniżej kilkoma przykładami.

Kierując się powyższymi interpretacjami stwierdzamy, że iloraz

$$(5.22) \quad F/w = \varphi_k(\lambda)$$

można interpretować jako sztywność dynamiczną układu  $S_n^k$ , która zgodnie z własnościami funkcji  $\varphi_k(\lambda)$  informuje nas o zmianach jego własności dynamicznych, rejestrowanych w punkcie  $k$ , w zależności od częstości działającego w tym punkcie wymuszenia  $F$ . Tak więc sztywność dynamiczna  $F/w$ : 1) zeruje się, gdy  $\lambda \in \lambda^k$  jest częstością nową lub o wzrastającej krotności (rezonans w układzie  $S_n^k$ ); 2) osiąga wartość nieskończoną, gdy  $\lambda \in \lambda^{k-1}$  jest częstością znikającą lub o malejącej krotności (rezonans w układzie  $S_n^{k-1}$ ); 3) jest dodatnia, gdy  $\lambda \in (b_i, z_{i+1})$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, g$ ; 4) jest ujemna, gdy  $\lambda \in (z_i, b_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, g$ ,  $g+1$ , gdzie przez  $z_i$ ,  $b_i$  oznaczono kolejne zera ( $z$ ) i bieguny ( $b$ ) funkcji  $\varphi_k(\lambda)$ , przy czym  $b_0=0$ ,  $b_{g+1}=\infty$  oraz  $z_{g+1} \leq \infty$ .

Mimo że pojedyncza funkcja  $\varphi_k(\lambda)$  nie daje żadnych informacji na temat częstości powtórnych o niezmiennych się krotnościach, to jednak ciąg funkcji  $\varphi_i(\lambda)$ ,  $i=1, 2, \dots, k$  dostarcza pełnej informacji o widmie  $\lambda^k$ .

Zilustrujemy teraz dotychczasowe rozważania konkretnymi przykładami, w których główny nacisk położymy na jakościową stronę zagadnienia.

*Przykład 1.* Niech układem  $S_4$  będzie belka pokazana na rys. 10a, której przekształcenie w układ podstawowy  $S_4^0$  wymaga wprowadzenia czterech więzów kinematycznych (rys. 10b). Usunięcie pierwszego więzu i zastąpienie go reakcją  $F$  jest równoważne z rozważaniem drgań wymuszonych układu  $S_4^1$  z częstością  $\lambda$  (rys. 10c). Wartość ilorazu  $F/w$  jest zgodnie z (5.22) równa wartości funkcji  $\varphi_1(\lambda)$  pokazanej na rys. 11a. Drgania wymuszone układu  $S_4^1$  stają się jego drganiami własnymi, gdy  $\varphi_1(\lambda)=0$ . Równanie to określa częstość własną  $\lambda_1^1$ .

Po nadaniu wartości zero reakcji pierwszego więzu i określeniu na tej podstawie częstości własnej  $\lambda_1^1$ , możemy przystąpić do usunięcia drugiego więzu i zastąpienia go reakcją  $F$  (rys. 10d). Otrzymany w ten sposób układ  $S_4^2$  wykonuje drgania wymuszone z częstością  $\lambda$ . Wartości  $\lambda_1^2$  i  $\lambda_2^2$  zmiennej  $\lambda$ , dla których  $\varphi_2(\lambda)=0$  (rys. 11b) są częstościami własnymi układu  $S_4^2$ , którym

odpowiada zerowanie się siły wymuszającej  $F$ . Przy wymuszaniu z częstością  $\lambda = \lambda_1^1$  układ  $S_4^2$  drga w taki sposób, że  $w=0$ , przy czym  $F/w=\infty$ . Na rys. 10d odpowiednią formę drgań pokazano linią przerywaną, przy czym widać wyraźnie, że nie różni się ona od formy drgań własnych układu  $S_4^1$  pokazanej na rys. 10c.

Kontynuując opisany sposób postępowania, kolejno pozbywamy się działania wszystkich więzów kinematycznych układu podstawowego posługując się każdorazowo odpowiednią funkcją  $\varphi_i(\lambda)$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ , dla wyznaczenia nowych częstości własnych.

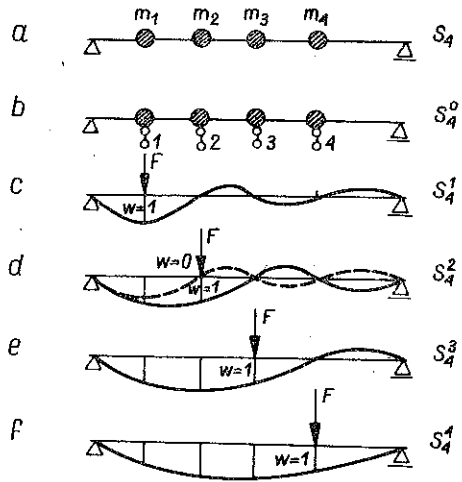
Z własności rozważanego układu wynika, że za pomocą wymuszenia działającego w punkcie  $k$  układu  $S_n^k$ ,  $k=2, 3, 4$  można wywoływać rezonanse ze wszystkimi częstościami  $\lambda \in \lambda^{k-1}$  układu  $S_n^{k-1}$  (rys. 10c-f). Oznacza to, że kolejne widma nie zawierają częstości powtórnych i spełnione są nierówności  $\lambda_{i-1}^{k-1} < \lambda_{i-1}^k < \lambda_i^k < \lambda_i^{k-1}$  świadczące o tym, że elementy widm  $\lambda^{k-1}$  i  $\lambda^k$  przedzielają się wzajemnie w ścisłym sensie. Zostało to uwidocznione na rys. 12 przedstawiającym ciąg widmowy  $W$  układu z rys. 10a.

*Przykład 2.* Rozważmy układ  $S_3$  pokazany na rys. 13a, którego drgania wymuszone opisane są równaniem

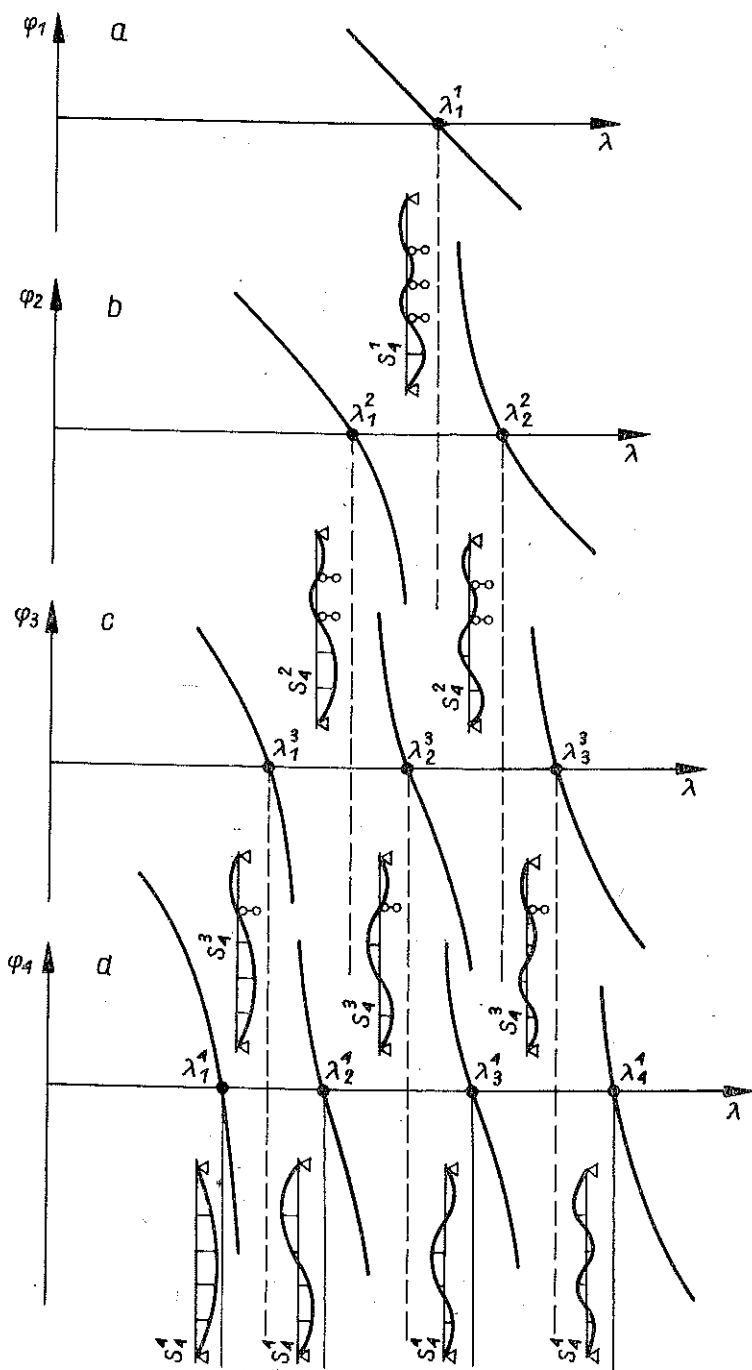
$$(5.23) \quad (K - \lambda M)u = P,$$

gdzie

$$\lambda = \frac{7ma^3 \theta^2}{3EI}, \quad M = I, \quad K = A = \begin{pmatrix} 23 & 9 & -22 \\ 9 & 23 & -22 \\ -22 & -22 & 32 \end{pmatrix}.$$

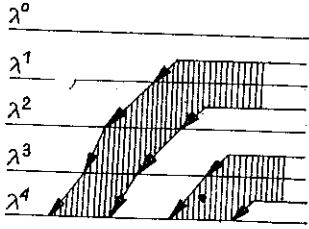


Rys. 10

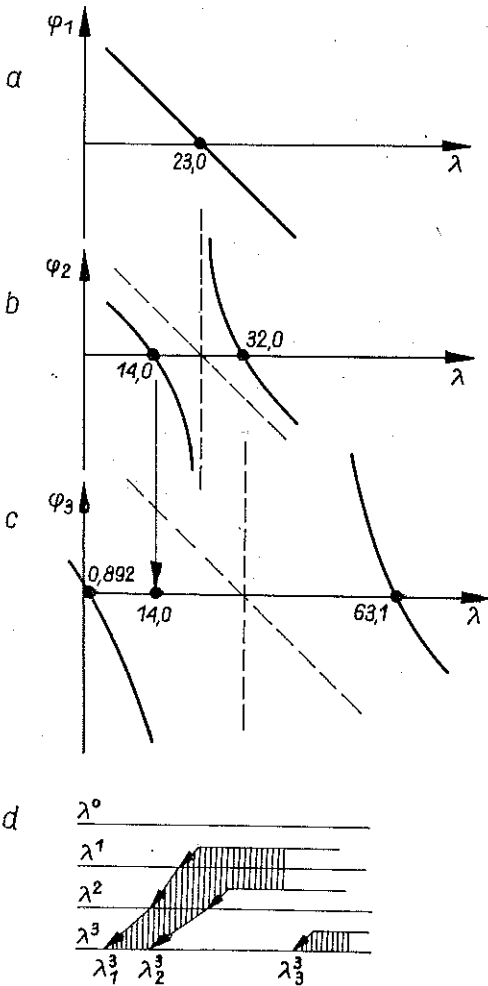


Rys. 11

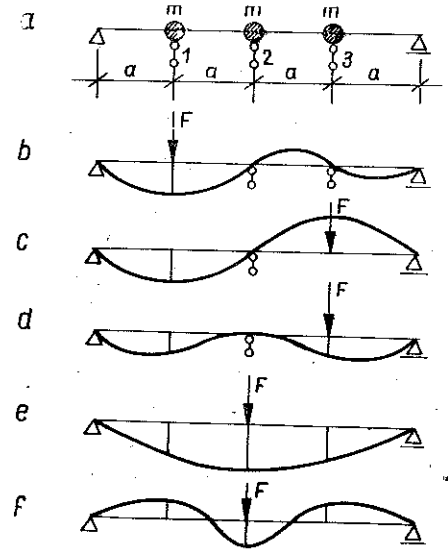




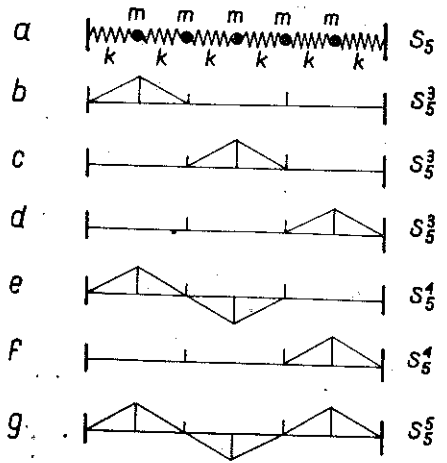
Rys. 12



Rys. 14



Rys. 13



Rys. 15

Dla układu  $S_3^1$  mamy

$$(23 - \lambda)u = P,$$

skąd  $\varphi_1(\lambda) = P/u = 23 - \lambda$  (rys. 14a). Wartość  $\lambda = \lambda_1^1 = 23$  jest częstotliwością własną układu  $S_3^1$ , której odpowiada forma drgania pokazana na rys. 13b.

Dla układu  $S_3^2$  otrzymujemy

$$(5.24) \quad \begin{pmatrix} 23 - \lambda & 9 \\ 9 & 23 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix},$$

skąd  $\varphi_2(\lambda) = P/u_2 = 23 - \lambda - 81/(23 - \lambda)$  (rys. 14b). Z równania  $\varphi_2(\lambda) = 0$  otrzymujemy dwie częstotliwości własne układu  $S_3^2$ :  $\lambda_1^2 = 14,0$  i  $\lambda_2^2 = 32,0$ . Formy drgań własnych tego układu pokazano na rys. 13c, d. Zniknięcie z widma częstotliwości  $\lambda_1^1 = 23,0$  wiąże się z możliwością wywoływania w układzie  $S_3^1$  rezonansu z tą częstotliwością — przez wymuszenie  $P$  działające w punkcie 2. Wynika to z faktu, że  $b_1 = 9 \neq 0$ , dzięki czemu z układu równań (5.24) po podstawieniu  $\lambda = 23,0$  otrzymujemy:  $9u_2 = 0$ ,  $9u_1 = P$ , skąd  $u_1 = P/9$ ,  $u_2 = 0$  (rys. 13b).

Przekształcenie macierzy układu równań (5.23) do postaci rekurencyjnej wymaga zastosowania transformacji

$$u = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w,$$

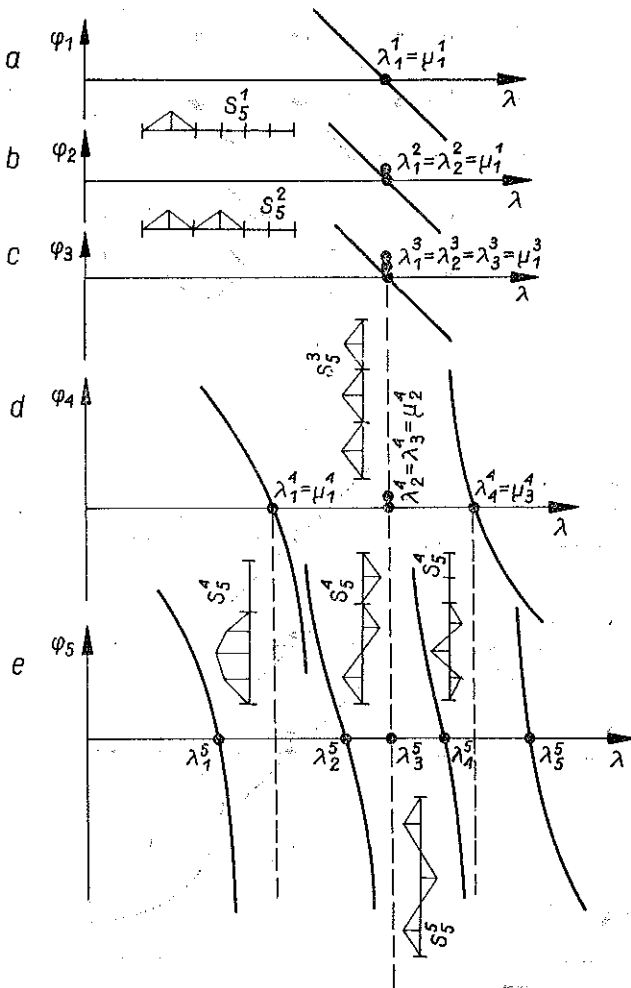
gdzie  $U$  jest macierzą utworzoną z unormowanych form drgań własnych układu  $S_3^2$ . W wyniku przeprowadzenia transformacji otrzymujemy zgodnie z (5.9)–(5.12):

$$\begin{pmatrix} 14 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 32 - \lambda & -22\sqrt{2} \\ 0 & -22\sqrt{2} & 32 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix},$$

skąd  $\varphi_3(\lambda) = 32 - \lambda - (-22\sqrt{2})^2/(32 - \lambda) = 32 - \lambda - 968/(32 - \lambda)$  (rys. 14c). Pierwiastkami równania  $\varphi_3(\lambda) = 0$  są częstotliwości własne układu  $S_3$ :  $\lambda_1^3 = 0,892$  i  $\lambda_3^3 = 63,1$ . Odpowiadające im formy drgań własnych pokazano na rys. 13e, f. Powtórnią częstotliwością własną układu  $S_3$  jest  $\lambda_2^3 = \lambda_1^2 = 14,0$ , tym razem bowiem wywołanie rezonansu z tą częstotliwością w układzie  $S_3^2$  nie jest możliwe z uwagi na to, że  $b_1 = 0$ . Forma drgań pokazana na rys. 13c jest w rozważanym przypadku formą własną zarówno dla układu  $S_3^2$ , jak też i dla  $S_3$ . Ponieważ forma ta jest antysymetryczna, a wymuszenie działające w punkcie 3 symetryczne, więc znajdujemy tu wyjaśnienie przyczyny, dla której wywołanie rezonansu z częstotliwością  $\lambda = 14,0$  w rozważanym przypadku nie jest możliwe ( $b_1 = 0$ ). Ciąg  $W$  dla układu z rys. 13a pokazano na rys. 14d.

*Przykład 3.* Układ  $S_5$  drgający podłużnie (rys. 15a) składa się z pięciu jednakowych mas  $m$  i sześciu sprężyn o jednakowych sztywnościach  $k$ . Przy przyjętej numeracji stopni swobody równanie drgań wymuszonych tego układu ma postać

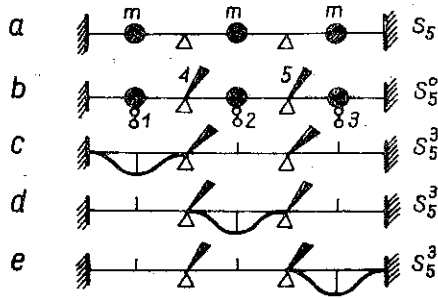
$$(5.25) \quad \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} u = P, \quad \lambda = \frac{m\theta^2}{k}$$



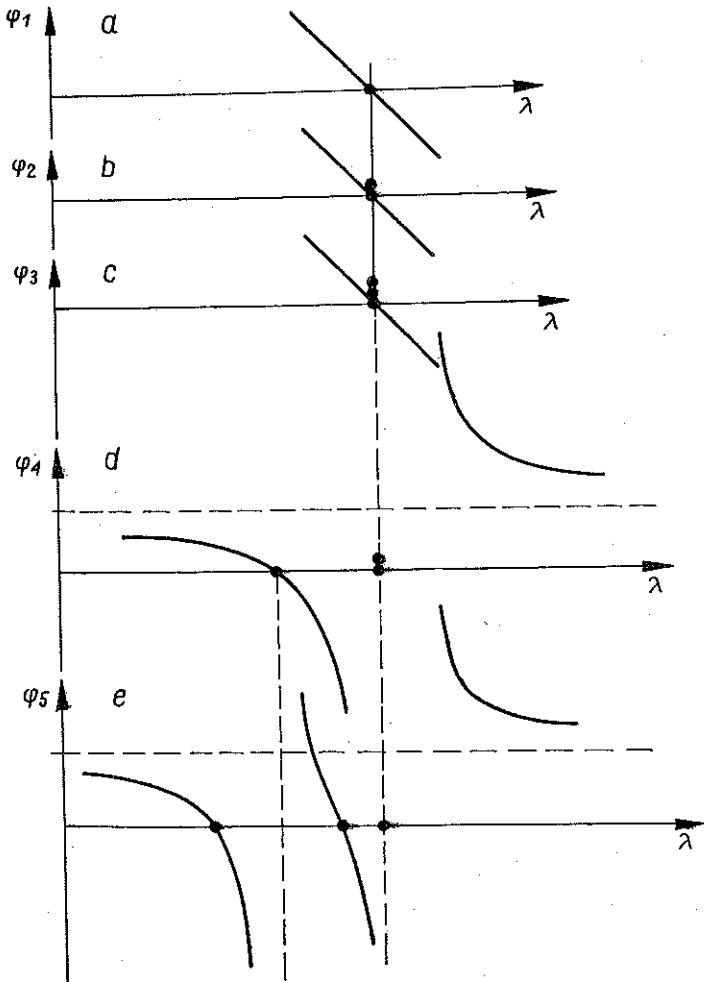
Rys. 16

Przy kolejnym usuwaniu trzech pierwszych więzów kinematycznych stwierdzamy, że  $\varphi_i(\lambda) = 2 - \lambda$ ,  $i = 1, 2, 3$ , przy czym krotność częstości własnej  $\mu_1 = 2,0$  za każdym razem wzrasta o 1 (rys. 16a, b, c). Układ  $S_5^3$  składa się więc z trzech identycznych podukładów, zupełnie od siebie odizolowanych za pomocą więzów 4 i 5 i stanowiących jak gdyby powielenie układu  $S_5^1$ . W układzie  $S_5^3$  mogą występować trzy zupełnie od siebie niezależne drgania własne o tej samej częstości  $\mu_i = 2,0$ , które pokazano na rys. 15 b, c, d.

Na podstawie równania (5.25) otrzymujemy bezpośrednio dla układu  $S_5^4$ :  $\varphi_4(\lambda) = 2 - \lambda - 2/(2 - \lambda)$ . W widmie  $\lambda^4$  pojawiają się dwie częstości istotnie nowe  $\lambda_1^4$  i  $\lambda_4^4$  będące pierwiastkami równania  $\varphi_4(\lambda) = 0$ , ponadto zaś występuje częstość powtórna  $\lambda_2^4 = \lambda_3^4 = \mu_1^1$  o zmniejszonej krotności (rys. 16d). Częstości tej odpowiada podprzestrzeń własna o wymiarze 2, rozpięta na dwóch liniowo niezależnych formach własnych pokazanych przykładowo na rys. 15 e, f.

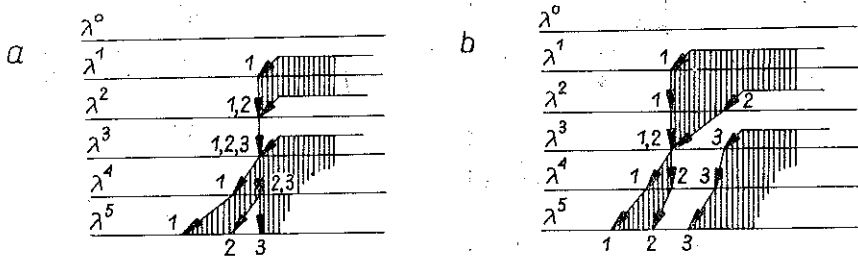


Rys. 17



Rys. 18

Usunięcie ostatniego z więzów (o numerze 5) sprawia, że w widmie układu  $S_5$  pojawiają się cztery częstości istotnie nowe:  $\lambda_i^5$ ,  $i=1, 2, 4, 5$  (rys. 16e). Występująca nadal w tym widmie częstość powtórna  $\lambda_3^5 = \mu_1^4$  jest już tylko jednokrotna i odpowiada jej forma pokazana na rys. 15g.



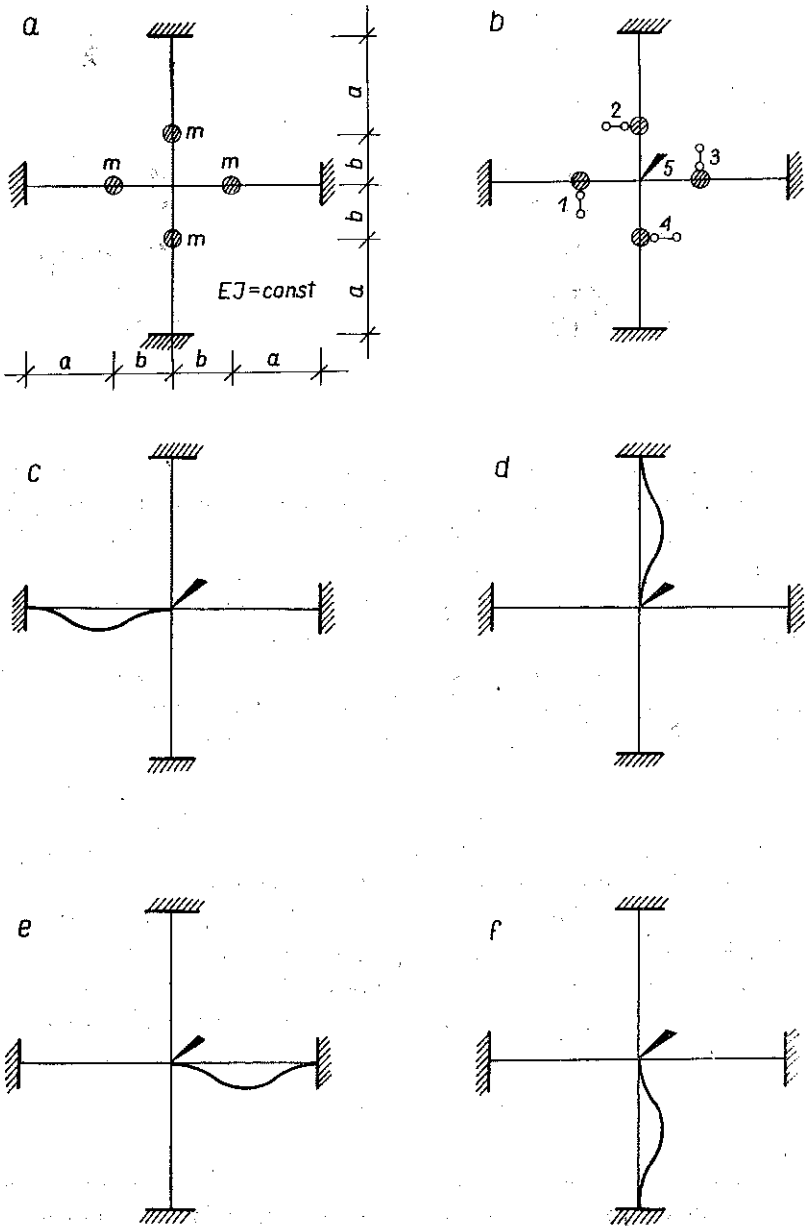
Rys. 19

*Przykład 4.* Rozważmy jeszcze układ  $S_5$  pokazany na rys. 17a. Usuwanie jego trzech pierwszych więzów kinematycznych odbywa się w sposób podobny do opisanego w poprzednim przykładzie. W efekcie otrzymujemy układ  $S_3^5$  pokazany na rys. 17c, d, e, o potrójnej częstości własnej (rys. 18c), drgający trzema zupełnie od siebie niezależnymi formami własnymi. Ponieważ więzy 4 i 5 są bezmasowe, ich usuwanie nie powiększa już liczby częstości własnych lecz jedynie modyfikuje widmo w sposób pokazany na rys. 18 d, e. Na rys. 19 a przedstawiono ciąg widmowy  $W$  układu z rys. 17a o jednakowej sztywności wszystkich trzech przęseł, a na rys. 19b ciąg  $W$  dla układu, w którym powiększona została sztywność jego środkowego przęśla.

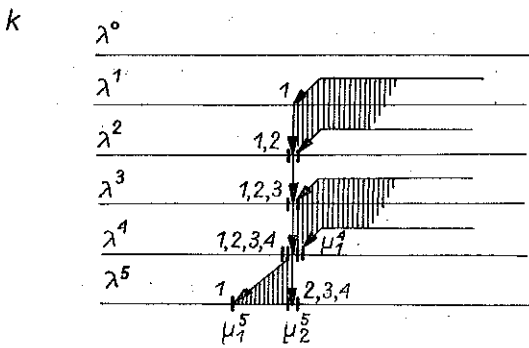
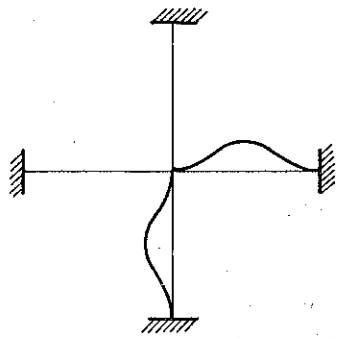
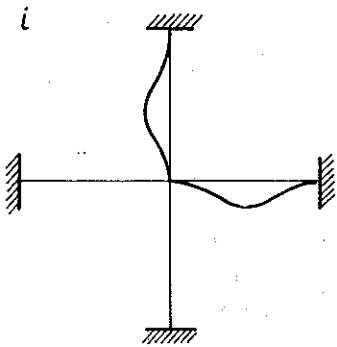
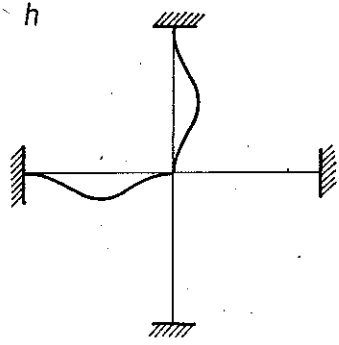
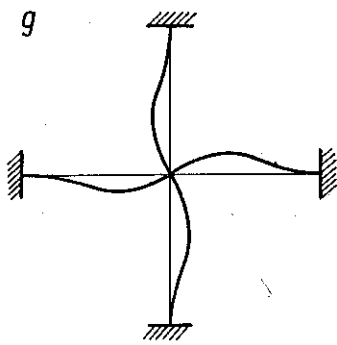
*Przykład 5.* Na zakończenie omówimy jeszcze układ  $S_5$  z rys. 20a, dla którego przyjęto układ podstawowy pokazany na rys. 20b. W wyniku zwolnienia więzów o numerach 1, 2, 3 i 4 otrzymuje się układ  $S_5^4$  o poczwórnej częstości własnej  $\mu_1^4$  (rys. 20k), której odpowiadają cztery liniowo niezależne formy drgań (rys. 20 c-f). Zwolnienie więzu nr 5 sprawia, że pojawia się nowa częstość własna  $\mu_1^5$  (rys. 20 k) o odpowiadającej jej formie z rys. 20 g. Potrójnej, powtórnej częstości własnej  $\mu_2^5 = \mu_1^4$  odpowiadają trzy liniowo niezależne formy pokazane na rys. 20 h-j.

## 6. ZAKOŃCZENIE

W pracy omówiono ogólne własności ciągów widmowych, stanowiące podstawę jakościowej analizy widm częstości drgań własnych, układów konstrukcyjnych. Postępowanie przedstawione w przykładach 3, 4 i 5 punktu 5, w wyniku którego układ  $S_n$  rozpadał się na niezależnie od siebie drgające podukłady o jednym stopniu swobody, może być bezpośrednio uogólnione na przypadki podukładów bardziej złożonych o wielu a nawet nieskończenie wielu stopniach swobody [15]. Kolejne zwalnianie pojedynczych więzów kinematycznych można zastąpić równoczesnym zwalnianiem dowolnej liczby tych więzów.



Rys. 20



Rys. 20

W ten sposób dochodzimy więc do sformułowania nie omawianych dotąd zagadnień, mających istotne znaczenie dla zastosowań praktycznych. Omówienia tych zagadnień staną się tematami oddzielnych opracowań autora.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. H. GOULD, *Variational methods for eigenvalue problems*, Oxford University Press, London 1966.
2. K. K. GUPTA, *Vibration of frames and other structures with banded stiffness matrix*, Int. J. num. Meth. Engng., 2, 221–228, 1970.
3. K. K. GUPTA, *Solution of eigenvalue problems by Sturm sequence method*, Int. J. num. Meth. Engng., 4, 379–404, 1972.
4. K. K. GUPTA, *On a combined Sturm sequence and inverse iteration technique for eigenproblem solution of spinning structures*, Int. J. num. Meth. Engng., 7, 509–518, 1973.
5. A. MOSTOWSKI, M. STARK, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1958.
6. B. OLSZOWSKI, *O rekurencyjności widm częstości drgań własnych. Część I*, Rozpr. Inżyn., 26, 1, 1978.
7. G. PETERS, J. H. WILKINSON, *Eigenvalues of  $Ax = \lambda Bx$  with band symmetric  $A$  and  $B$* , Computer J., 12, 398–404, 1969.
8. I. M. RABINOWICZ, *Liniejnye kolebanija složnoj stierźnievoj sistiemy s konečnym čislom stiepienij svobody i kolebanija jeje elementov*, Issledovanija po teorii sooruzenij, Wyp. 11, 115–126, Moskwa 1962.
9. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.
10. A. TUROWICZ, *Geometria zer wielomianów*, PWN, Warszawa 1967.
11. F. W. WILLIAMS, W. H. WITTRICK, *An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures*, Int. J. Mech. Sci., 12, 781–791, 1970.
12. F. W. WILLIAMS, *Rapid analysis of the effects of structural modifications on inconveniently situated eigenvalues*, Computer and Structures, 3, 1465–1471, 1973.
13. F. W. WILLIAMS, W. H. WITTRICK, *Efficient calculation of natural frequencies of certain marine structures*, Int. J. Mech. Sci., 15, 833–843, 1973.
14. J. H. WILKINSON, *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, Oxford 1965.
15. W. H. WITTRICK, F. W. WILLIAMS, *A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 24, 3, 263–284, 1971.

#### Резюме

#### ОБ РЕКУРЕНТНЫХ СВОЙСТВАХ СПЕКТРОВ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ. Ч. II

Статья имеет целью обобщение результатов, полученных в I части, на случай рядов частотных спектров, указанных с помощью соответствующих спектральных графиков. Обсуждаются штурмовые свойства этих рядов и некоторые особенности способов вычисления собственных частот. Установлены общие черты рекуррентной зависимости собственных частот и форм колебаний и проиллюстрированы соответствующими примерами. В рассуждениях особое внимание уделяется вопросам многократных собственных частот и соответствующих колебаний.



## SUMMARY

## ON THE RECURSIVNESS OF EIGENFREQUENCY SPECTRA (PART II)

The aim of this paper is to generalize the results obtained in the part I. These results are extended on the sets of eigenfrequency spectra visualized by means of spectral diagrams. Sturm properties of the sets as well as some numerical singularities of eigenfrequency calculating procedures are discussed. The general features of the recursive dependence for eigenfrequencies and eigenmodes are established and illustrated by appropriate chosen examples. Emphasis is laid on the problems referring to multiple eigenfrequencies and corresponding eigenmodes.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 stycznia 1977 r.*

---