

MODELOWANIE METODĄ SES UKŁADÓW MECHANICZNYCH MAJĄCYCH OKRESOWO ZMIENNĄ SZTYWNOŚĆ

WIESŁAW OSTACHOWICZ (GDAŃSK)

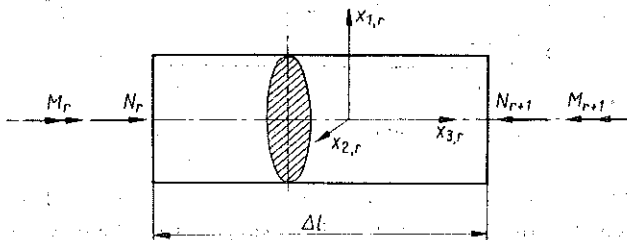
W pracy przedstawiono zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do modelowania układów mechanicznych, których sztywności zmieniają się okresowo w czasie. Na przykładzie analizy drgań giętnych wału podano sposób tworzenia macierzy sztywności o zmiennych w czasie elementach. Algorytm obliczeń opracowano pod kątem wykorzystania elektronicznej techniki obliczeniowej. Przedstawiono przykład zastosowania.

1. WSTĘP

W pracy zastosowano metodę sztywnych elementów skończonych (SES) do modelowania układów mechanicznych, których sztywności zmieniają się okresowo w czasie. Założenie zmiennej sztywności układu w podany sposób jest zgodne z modelem wielu układów rzeczywistych, a zwłaszcza wałów w przypadku ich drgań giętnych względem ustalonej płaszczyzny [1 i 3]. Na przykładzie analizy drgań giętnych wału podano sposób tworzenia macierzy sztywności o zmiennych w czasie elementach. Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do modelowania opisanych układów rozszerza zakres możliwości obliczeń drgań dla bardziej złożonych konstrukcji.

2. TWORZENIE MACIERZY SZTYWNOŚCI

Rozpatrzmy odcinek wału numer r o stałym przekroju poprzecznym (rys. 1). Zakładamy, że wspomniany odcinek wału obciążają osiowe siły przekrojowe N_r i N_{r+1} oraz przekrojowe momenty skręcające M_r i M_{r+1} o wartościach stałych w czasie. Ponadto zakładamy, że główne geometryczne momenty bezwładności



Rys. 1. Odcinek wału o stałym przekroju poprzecznym.

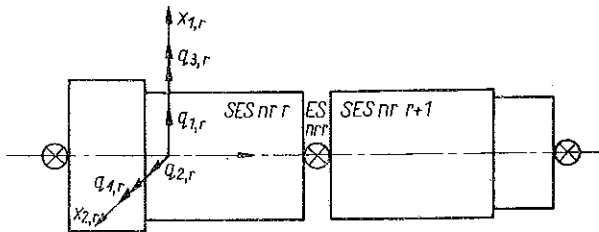
przekroju poprzecznego wału są niejednakowe i dla wspomnianego odcinka wału wynoszą odpowiednio J_{1r} oraz J_{2r} (gdzie $J_{1r} > J_{2r}$). Podobnie pola powierzchni przenoszące obciążenie poprzeczne w ogólnym przypadku przyjmujemy jako nierówne (w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach) $F_{1r} > F_{2r}$.

Zasadą modelowania ciągłych fragmentów konstrukcji sztywnymi elementami skończonymi jest przeprowadzenie wstępnego podziału wspomnianych fragmentów konstrukcji na odcinki i skupienie własności sprężystych tych odcinków w ich środkach geometrycznych [5]. W ten sposób jeżeli w pierwszym etapie dzielimy wał na $u - 1$ odcinków, to w drugim etapie otrzymuje się łącznie u sztywnych elementów skończonych.

Współczynniki sztywności elementu zastępującego własności sprężyste nieruchomego odcinka wału o długości Δl wyznaczamy przy założeniu, że pod wpływem takich samych obciążeń rzeczywisty odcinek wału odkształca się tak samo jak element zastępczy. Zakładając nieodkształcalność osiową i skrętną wału określamy współczynniki sztywności wspomnianego odcinka o długości Δl wzorami następującymi [5]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \alpha_{1,r} &= \frac{GF_{1r}}{\Delta l}, \\ \alpha_{2,r} &= \frac{GF_{2r}}{\Delta l}, \\ \alpha_{3,r} &= \frac{EJ_{1r}}{\Delta l}, \\ \alpha_{4,r} &= \frac{EJ_{2r}}{\Delta l}, \end{aligned}$$

gdzie E jest modułem Younga, G modułem Kirchhoffa. Współczynniki $\alpha_{1,r}$ i $\alpha_{2,r}$ są współczynnikami ścinania, a $\alpha_{3,r}$ i $\alpha_{4,r}$ oznaczają współczynniki zginania w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach $x_{1r}x_{3r}$ oraz $x_{1r}x_{2r}$ (rys. 1). Przemieszczenie r -tego SES opisują cztery współrzędne uogólnione (rys. 2). Współrzędne $q_{1,r}$ i $q_{2,r}$



Rys. 2. Podział wału na sztywne elementy skończone.

opisują przemieszczenia translacyjne, a współrzędne $q_{3,r}$ i $q_{4,r}$ przemieszczenia rotacyjne. W przypadku drgań giętych wału wirującego z prędkością kątową θ współczynniki ścinania $c_{1,r}$ i $c_{2,r}$ oraz współczynniki zginania $c_{3,r}$ i $c_{4,r}$ w wyżej wymienio-

nych płaszczyznach nieruchomego układu osi współrzędnych 0, x_{1r} , x_{2r} , x_{3r} przyjmują wartości:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} c_{1,r} &= e_{1,r} + e_{2,r} \cos 2\theta t, \\ c_{2,r} &= e_{1,r} - e_{2,r} \cos 2\theta t, \\ c_{3,r} &= e_{3,4} + e_{4,r} \cos 2\theta t, \\ c_{4,r} &= e_{3,r} - e_{4,r} \cos 2\theta t, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.3) \quad \begin{aligned} e_{1,r} &= \frac{\alpha_{1,r} + \alpha_{2,r}}{2}, & e_{2,r} &= \frac{\alpha_{1,r} - \alpha_{2,r}}{2}, \\ e_{3,r} &= \frac{\alpha_{3,r} + \alpha_{4,r}}{2}, & e_{4,r} &= \frac{\alpha_{3,4} - \alpha_{4,r}}{2}. \end{aligned}$$

Bloki współczynników sztywności dla układu dwóch elementów skończonych o numerach r i $r+1$ przyjmują postać [5]

$$(2.4) \quad \begin{bmatrix} [K_{r,r}] & [K_{r,r+1}] \\ [K_{r,r+1}] & [K_{r+1,r+1}] \end{bmatrix},$$

gdzie

$$[K_{r,r}] = \begin{bmatrix} c_{1,r} & 0 & 0 & \frac{1}{2} c_{1,r} \Delta l \\ 0 & c_{2,r} & -\frac{1}{2} c_{2,r} \Delta l & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} c_{2,r} \Delta l & \frac{1}{4} c_{2,r} \Delta l^2 + c_{4,r} & 0 \\ \frac{1}{2} c_{1,r} \Delta l & 0 & 0 & \frac{1}{4} c_{1,r} \Delta l^2 + c_{5,r} \end{bmatrix},$$

$$[K_{r,r+1}] = \begin{bmatrix} -c_{1,r} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} c_{1,r} \Delta l \\ 0 & -c_{2,r} & \frac{1}{2} c_{2,r} \Delta l & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} c_{2,r} \Delta l & -\frac{1}{4} c_{2,r} \Delta l^2 - c_{4,r} & 0 \\ -\frac{1}{2} c_{1,r} \Delta l & 0 & 0 & -\frac{1}{4} c_{1,r} \Delta l^2 - c_{5,r} \end{bmatrix},$$

$$[K_{r+1,r+1}] = \begin{bmatrix} c_{1,r+1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} c_{1,r+1} \Delta l \\ 0 & c_{2,r+1} & -\frac{1}{2} c_{2,r+1} \Delta l & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} c_{2,r+1} \Delta l & \frac{1}{4} c_{2,r+1} \Delta l^2 + c_{4,r+1} & 0 \\ \frac{1}{2} c_{2,r+1} \Delta l & 0 & 0 & \frac{1}{4} c_{1,r+1} \Delta l^2 + c_{5,r+1} \end{bmatrix}$$

Elementy bloków (2.4) są okresowymi funkcjami czasu w wyniku szczególnych własności konstrukcyjnych układu rzeczywistego. Oprócz tego należy również uwzględnić zmianę sztywności układu na skutek obciążenia go siłami osiowymi i momentami skręcającymi. W tym przypadku bloki współczynników sztywności dla dwóch sąsiednich sztywnych elementów skończonych przyjmują postać (por. [4])

$$(2.5) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & n_1 & 0 \\ & & & & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix},$$

gdzie $n = N_r \Delta l$, $n_1 = N_{r+1} \Delta l$, $s = \frac{1}{2} M_{r+1}$.

Niech $[K]$ oznacza globalną macierz sztywności układu. Macierz $[K]$ ma wymiar $4u \times 4u$, gdzie u jest liczbą stopni swobody układu. Macierz $[K]$ budujemy tworząc strukturę czworoboku macierzowego (2.8) oraz (2.9) w całym jej obszarze. Sposób tworzenia globalnej macierzy sztywności podano szczegółowo w pracach [4 i 5]. Macierz $[K]$ przedstawiamy w postaci sumy części stałej oraz części zmiennej w czasie (z uwagi na zmienność współczynników $c_{1,r}, \dots, c_{4,r}$; por. równanie (2.2)_{1,2}):

$$(2.6) \quad [K] = [A] + \cos \Omega t [H],$$

gdzie $[A]$ i $[H]$ są macierzami o wymiarach $4u \times 4u$, $\Omega = 2\theta$.

3. STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ RUCHU

Równania ruchu układu modelowanego metodą sztywnych elementów skończonych przyjmują w zapisie macierzowym postać [5]

$$(3.1) \quad [B] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\},$$

gdzie $[B]$ jest macierzą bezwładności, $[K]$ macierzą sztywności, $\{q\}$ wektorem współrzędnych uogólnionych. Macierz $[B]$ ma wymiar $4u \times 4u$, wektory $\{\ddot{q}\}$ i $\{q\} - 4u \times 1$. W rozważaniach pominięto tłumienie oraz założono, że układ nie jest wzbudzany obciążeniem zewnętrznym.

Wprowadzając do równania (3.1) na miejsce macierzy $[K]$ wyrażenie (2.6), otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach:

$$(3.2) \quad [B] \{\ddot{q}\} + ([A] + [H] \cos \Omega t) \{q\} = \{0\}.$$

Wiadomo [2], że na granicach obszarów stateczności układ równań (3.2) ma rozwiązanie okresowe o okresach T i $2T$, gdzie $T = 2\pi/\Omega$. Zakłada się rozwiązanie układu równań (3.2) w postaci szeregów [1]:

$$(3.3) \quad \{q\} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\{a_k\} \sin \frac{k\Omega t}{2} + \{b_k\} \cos \frac{k\Omega t}{2} \right)$$

oraz

$$(3.4) \quad \{q\} = \frac{1}{2} \{b_0\} + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(\{a_k\} \sin \frac{k\Omega t}{2} + \{b_k\} \cos \frac{k\Omega t}{2} \right),$$

gdzie $\{b_0\}$, $\{a_k\}$ i $\{b_k\}$ są wektorami o wymiarze $4u \times 1$, niezależnymi od czasu. Podstawiamy wyrażenie (3.3) do równania (3.2). Zakładając niezerowe rozwiązania równania (3.2) po przyrównaniu do zera wielomianów przy tych samych funkcjach trygonometrycznych otrzymujemy następujące układy równań:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} & \left([A] + \frac{1}{2} [H] - \frac{1}{4} \Omega^2 [B] \right) \{a_1\} - \frac{1}{2} [H] \{a_3\} = \{0\}, \\ & \left([A] - \frac{1}{4} k^2 \Omega^2 [B] \right) \{a_k\} - \frac{1}{2} [H] (\{a_{k-2}\} + \{a_{k+2}\}) = \{0\}, \end{aligned}$$

dla $k=1, 3, 5, \dots$

oraz

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \left([A] - \frac{1}{2} [H] - \frac{1}{4} \Omega^2 [B] \right) \{b_1\} - \frac{1}{2} [H] \{b_3\} = \{0\}, \\ & \left([A] - \frac{1}{4} k^2 \Omega^2 [B] \right) \{b_k\} - \frac{1}{2} [H] (\{b_{k-2}\} + \{b_{k+2}\}) = \{0\}, \end{aligned}$$

dla $k=2, 4, 6, \dots$

Równania (3.5) i (3.6) piszemy w postaci

$$(3.7) \quad \begin{bmatrix} [A] + \frac{1}{2} [H] - \frac{1}{4} \Omega^2 [B] & -\frac{1}{2} [H] & [0] & \vdots \\ -\frac{1}{2} [H] & [A] - \frac{9}{4} \Omega^2 [B] & -\frac{1}{2} [H] & \vdots \\ [0] & -\frac{1}{2} [H] & [A] - \frac{25}{4} \Omega^2 [B] & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_3\} \\ \{a_5\} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$(3.8) \quad \begin{bmatrix} [A] - \frac{1}{2} [II] - \frac{1}{4} \Omega^2 [B] & -\frac{1}{2} [II] & [0] & \vdots \\ & -\frac{1}{2} [II] & [A] - \frac{9}{4} \Omega^2 [B] & -\frac{1}{2} [II] & \vdots \\ & [0] & -\frac{1}{2} [II] & [A] - \frac{25}{4} \Omega^2 [B] & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{b_1\} \\ \{b_3\} \\ \{b_5\} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

Macierze w równaniach (3.7) i (3.8) mają nieskończone wymiary. Warunkiem niezerowych rozwiązań tych równań jest zerowanie się wyznaczników głównych powyższych macierzy. Podstawiając wyrażenie (3.4) do równania (3.2) i dokonując przekształceń jak wyżej, dochodzimy do układów równań

$$(3.9) \quad \begin{bmatrix} [A] - \Omega^2 [B] & -\frac{1}{2} [II] & [0] & \vdots \\ -\frac{1}{2} [II] & [A] - 4\Omega^2 [B] & -\frac{1}{2} [II] & \vdots \\ [0] & -\frac{1}{2} [II] & [A] - 9\Omega^2 [B] & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a_2\} \\ \{a_4\} \\ \{a_6\} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$(3.10) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} [A] & -\frac{1}{2} [II] & [0] & \vdots \\ -\frac{1}{2} [II] & [A] - \Omega^2 [B] & -\frac{1}{2} [II] & \vdots \\ [0] & -\frac{1}{2} [II] & [A] - 4\Omega^2 [B] & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{b_0\} \\ \{b_2\} \\ \{b_4\} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

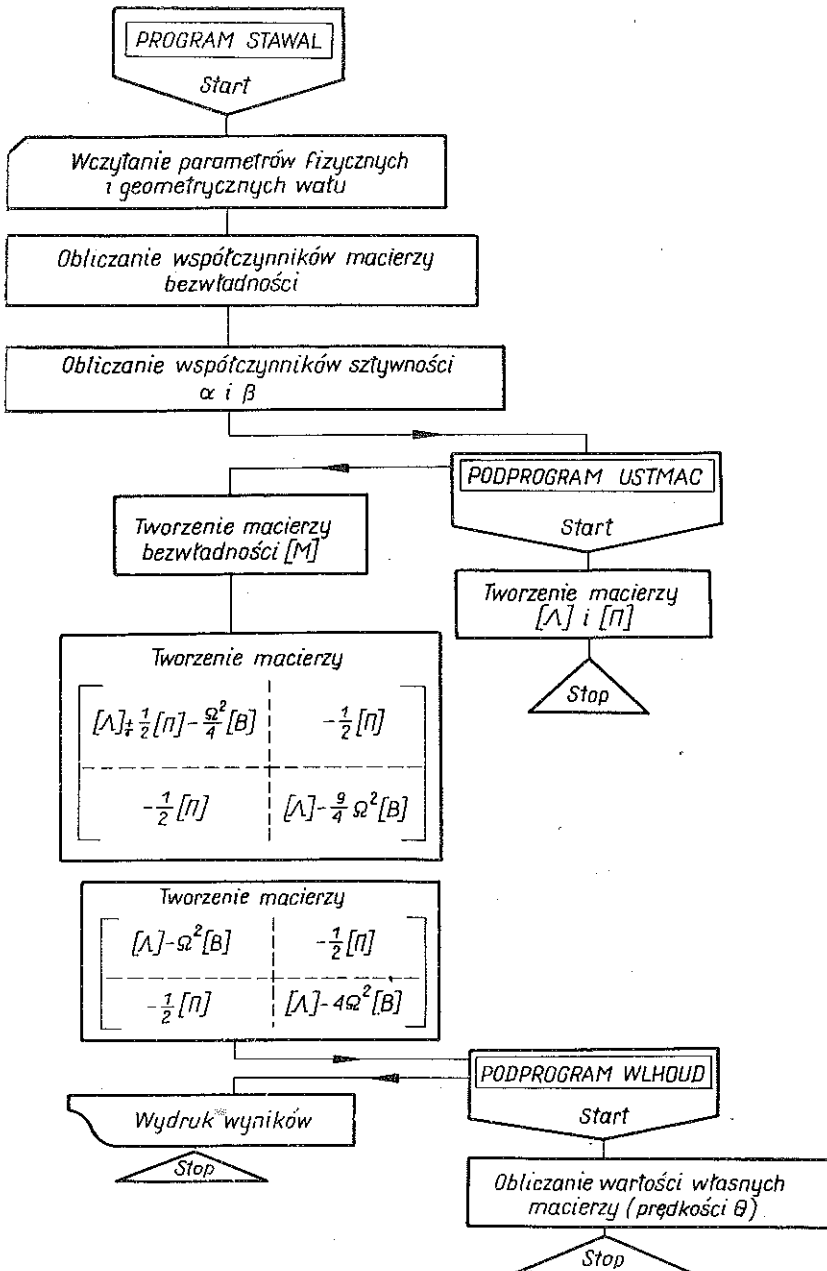
Założenie niezerowych rozwiązań tych równań prowadzi do następującego warunku:

$$(3.11) \quad \begin{bmatrix} [A] - \Omega^2 [B] & -\frac{1}{2} [II] & [0] & \vdots \\ -\frac{1}{2} [II] & [A] - 4\Omega^2 [B] & -\frac{1}{2} [II] & \vdots \\ [0] & -\frac{1}{2} [II] & [A] - 9\Omega^2 [B] & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = 0.$$

W ten sposób określanie pierwszych obszarów niestatecznych prędkości kątowych wału sprowadza się do zagadnienia znajdowania wartości własnych macierzy. Można wykazać [1], że szeregi utworzone z elementów wspomnianych wyżej wyznaczników, są bezwzględnie zbieżne. Tak więc do określenia prędkości krytycznych wystarczy przyjąć skończoną liczbę k . Dokładność obliczeń zależy od wielkości tej liczby

4. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

Opracowano algorytm obliczeń krytycznych częstości drgań wału o okresowo zmiennej sztywności względem ustalonej płaszczyzny. Opierając się na wspomnianym algorytmie, opracowano program obliczeń na EMC ICL-4 w języku FORTRAN. Uproszczony schemat blokowy programu przedstawiono na rys. 3. Program główny



Rys. 3. Schemat blokowy programów obliczeń.

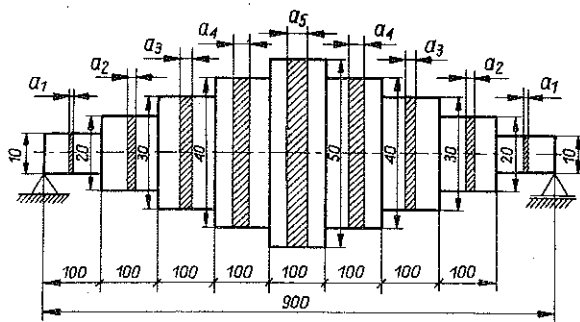
Tablica 1. Prędkości kątowe wału na granicach obszarów stateczności

Rozwiązanie okresowe o okresie 2T

 $\theta_i (i=1, \dots, 5)$ – częstości (1/s)

Granica 1					
Rozwiązanie $\det \left [A] - \frac{1}{2} [IT] - \frac{1}{4} \Omega^2 [B] \right = 0$					
Współczynnik ε	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
0,1	82,512	265,738	1072,786	1691,115	2664,838
0,2	86,416	277,364	1118,506	1763,168	2778,009
0,3	91,534	295,092	1190,733	1877,006	2956,600
0,4	99,127	318,721	1284,965	2025,227	3189,060
0,5	107,996	346,743	1396,566	2200,917	3464,319
0,6	117,485	377,877	1521,661	2397,767	3772,146
0,7	128,028	411,543	1656,843	2610,514	4104,516
0,8	138,685	447,334	1800,048	2835,580	4455,236
0,9	150,057	484,660	1949,133	3069,772	4819,383
1,0	162,075	523,194	2102,634	3310,820	5193,252
Granica 2					
Rozwiązanie $\det \left [A] + \frac{1}{2} [IT] - \frac{1}{4} \Omega^2 [B] \right = 0$					
Współczynnik ε	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
1,0	162,075	523,194	2102,634	3310,820	5193,251
0,9	158,150	510,664	2052,827	3232,615	5072,064
0,8	154,801	499,186	2007,096	3160,843	4960,780
0,7	151,975	488,875	1965,795	3096,036	4860,221
0,6	149,078	479,824	1929,401	3038,769	4771,195
0,5	146,752	471,976	1897,908	2989,289	4694,369
0,4	144,537	465,251	1871,762	2948,196	4630,443
0,3	142,723	459,984	1851,128	2915,861	4580,134
0,2	141,845	456,381	1836,249	2892,447	4543,755
0,1	140,922	453,992	1827,295	2878,321	4521,741

STAWAL korzysta z dwóch podprogramów USTMAC i WLHOUD. Pierwszy z nich służy do tworzenia macierzy $[A]$ i $[IT]$, drugi oblicza krytyczne częstości. Wymiar macierzy układu, której wartości własne $\lambda = \Omega^2$, ograniczono w ten sposób, że zawiera ona cztery bloki. Wartości własne macierzy obliczono metodą Householdera. Na rys. 4 przedstawiono wymiary rozpatrywanego wału. Do obliczeń przyjęto następujące dane: gęstość materiału $\rho = 7830$ (kg/m³), moduł Kirchhoffa $G = 0,8 \cdot 10^{11}$ (N/m²), moduł Younga $E = 0,21 \cdot 10^{12}$ (N/m²).



a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
10ε	20ε	30ε	40ε	50ε

Rys. 4. Model fizyczny rozpatrywanego wału.

Wał podzielono na 9 równych odcinków. Własności sprężyste każdego z odcinków skupiono w jego środku geometrycznym otrzymując w ten sposób układ 10 sztywnych elementów skończonych. Każdy sztywny element skończony w rozpatrywanej płaszczyźnie drgań ma dwa stopnie swobody (patrz rys. 2). W tablicy 1 i 2 zestawiono wyniki obliczeń.

Tablica 2. Dokładność rozwiązań jako funkcji numeru częstości drgań (wartości dokładnie obliczono według Bolotina, [2])

Numer częstości	I	II	III	IV	V
Błąd względny %	0,273	1,131	2,568	4,623	7,371

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. В. В. Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Государ. Издат. Техн.-Теорет. Литерат., Москва 1956.
2. W. J. CUNNINGHAM, *Analiza układów nieliniowych*, WNT, Warszawa 1962
3. J. N. Mc. DUFF, J. R. CURRERI, *Drgania w technice*, PWT, Warszawa 1960
4. J. ŁĄCKI, W. OSTACHOWICZ, *Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych w zagadnieniu drgań własnych pręta według teorii drugiego rzędu*, Arch. Inż. Łąd., 23, 4, 1977.
5. J. KRUSZEWSKI i inni, *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1975.

Резюме

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБЛАДАЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

В работе представлен принцип действия при образовании матрицы жесткости в задаче пространственных колебаний механических систем с периодически переменной жесткостью. Эта система моделируется методом жестких конечных элементов. Даются теоретические основы метода. Показан пример применения. Метод разработан с точки зрения применения цифровых вычислительных методов.

SUMMARY

SES MODELLING OF MECHANICAL SYSTEMS WITH PERIODICALLY VARIABLE STIFFNESS

The method presented consists of calculating the vibration frequency of a mechanical system, with periodically variable stiffness. The system is modeled by the stiff finite element method. Theoretical basis of the method and the examples of its application are given. The method is suitable for electronic computer technique.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW
KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lutego 1978 r.
