

PRZEPIY W PŁASKI W PRZEWODZIE Z PRZEGRODĄ PRZEPUSZCZALNĄ DOWOLNEGO KSZTAŁTU

JULIAN PARTYKA (KRAKÓW)

Rozważany jest płaski i ustalony przepływ między równoległymi ściankami połączonymi ze sobą pojedynczą przegrodą przepuszczalną dowolnego kształtu. Wyprowadzono równania przepływu uwzględniające typ i kształt przegrody oraz niejednorodność prędkości daleko przed przegrodą.

Do rozważań przyjęto równanie Eulera. Z równań tych, po uprzednim ich zlinearyzowaniu, otrzymano dwa układy równań liniowych, z których jeden opisuje przepływ na lewo, drugi zaś na prawo od przegrody. Powyższe układy równań powiązano ze sobą zależnościami zapewniającymi zgodność ciśnienia i składowych prędkości na przegrodzie. Zasadnicze rozważania prowadzone są dla zlinearyzowanych warunków zgodności.

Praca zawiera uogólnienie teoretycznych wyników, dotyczących przepływu płaskiego przez przegrodę przepuszczalną, w przewodzie o równoległych ściankach. Uogólnienie polega na uwzględnieniu zmiany kierunku prędkości płynu na przegrodzie oraz na uwzględnieniu przypadków, gdy przegroda jest umieszczona skośnie w stosunku do osi kanału i nie jest płaska.

WSTĘP

Każdy przedmiot wprowadzony do przepływu zakłóca dotychczasową jego strukturę. Zakłócenia te mogą mieć charakter pożądany lub szkodliwy. Wstawiając bowiem w odpowiedni sposób szereg takich przeszkód w przepływie niejednorodnym można powiększyć bądź złagodzić stopień niejednorodności, a nawet całkowicie wyrównać profil prędkości za przeszkodą. Rolę powyższą spełniać może palisada złożona z szeregu równoległe ułożonych cylindrów, między którymi istnieją szczeliny, przez które przepływa płyn. Palisada powoduje odchylenie linii prądu, w kierunku normalnej do przeszkody, a ponadto jest dodatkowym źródłem strat energii, co w konsekwencji prowadzi do spadku ciśnienia statycznego na przeszkodzie. W podobny sposób oddziałują na przepływ każda przegroda przepuszczalna, do których zalicza się siatki, gazy, ruszty, płyty perforowane, ulownice itp.

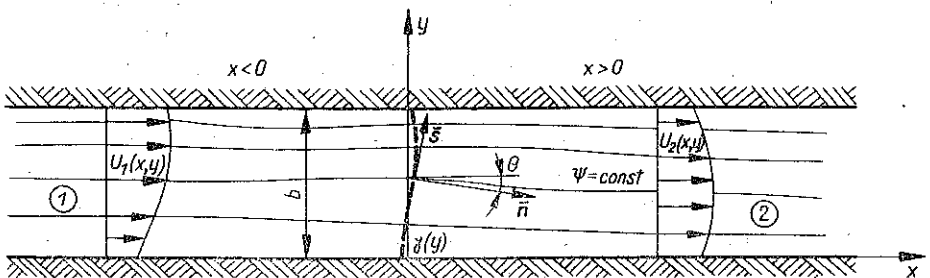
Przepływ przez siatkę umieszczoną prostopadle do napływającego jednorodnego strumienia został rozwiązany po raz pierwszy przez TAYLORA i BATCHELORA [1]. Podobne wyniki otrzymali również BONNEVILLE i HARPER [2], oraz BRAGG i HAWTHORNE [3]. Wybrane zagadnienia z tego zakresu rozważali ponadto ELDER [4], LAU i BAINES [5] oraz KOO i JAMES [6]. We wszystkich tych pracach poszukiwano zależności wiążących daleko odległe od przeszkody profile prędkości przez parametry geometryczne siatki. W szeregu jednak przypadków mamy do czynienia z zagadnieniem odwrotnym. Interesuje nas bowiem, jak zmieni się niejednorodny

przepływ po przejściu przez określoną przegrodę przepuszczalną lub też, jaki dobrać jej kształt, aby uzyskać wymagany, na ogół jednorodny profil prędkości za przeszkodą. Wymagania takie muszą być skrupulatnie zrealizowane w tunelach aerodynamicznych lub innych przestrzeniach pomiarowych, dla których takie parametry, jak jednorodność pola prędkości oraz stopień intensywności turbulencji, stanowią miarę przydatności obiektu do badań modelowych. Dlatego też tunele aerodynamiczne wyposaża się w ulownice i siatki, których kształt i ilość dobiera się na podstawie zaleceń opracowanych przy wykorzystaniu danych zebranych doświadczalnie.

Pierwszą udaną próbę teoretycznego ujęcia przepływu niejednorodnego w przewodzie z płaską siatką podali KUJOWSKI i SZAFRANKOWSKA w pracy [7]. W niniejszej zaś pracy przedstawiono równania opisujące identyczne jak w pracy [7] zagadnienie, które otrzymano drogą linearyzacji układu równań podstawowych napisanych we współrzędnych prostokątnych. Wyprowadzono ponadto uogólnione warunki zgodności na przeszkodzie, co umożliwia stosowanie powyższej metody także dla przeszkód dowolnego kształtu.

2. RÓWNANIA RUCHU

Rozważony zostanie dwuwymiarowy przepływ w przewodzie o ściankach równoległych, w którym ustawiono przeszkodę przepuszczalną, złożoną z szeregu elementów umieszczonych na (lub) w pobliżu pojedynczej płaszczyzny, prostopadłej do ścianek kanału w sposób regularny lub prawie regularny. Wymiary poprzeczne tych elementów muszą być jednak małe w porównaniu z szerokością przewodu, gdyż tylko wówczas można zaniedbać rozwarstwienie strumienia na przeszkodzie. Pojawienie się takich nieciągłości w profilu prędkości dla liczb Reynoldsa $Re \gg 1$ może jedynie nieznacznie zmienić charakter przepływu i to tylko w bezpośredniej bliskości przeszkody.



Rys. 1. Przepływ płaski w przewodzie z przegrodą przepuszczalną.

Schemat opisanego przepływu przedstawia rys. 1. Oś x pokrywa się z dolną ścianką, prostopadła zaś do niej oś y leży w płaszczyźnie przegrody. Ścianki przewodu oddalone są od siebie o b . Elementy przeszkody rozmieszczone są wzdłuż pofalowanej powierzchni. Stopień pofalowania określa kąt θ mierzony między normalną do przeszkody \vec{n} a osią x . Płyn traktuje się jako nielepki i nieściśliwy

na lewo i na prawo od przeszkody, lepki zaś w cienkiej warstwie obejmującej obszar wpływu struktury przeszkody. Przeszkoda jest więc źródłem strat energii przepływu oraz powierzchnią nieciągłości dla ciśnienia i prędkości. Dlatego też rozważany będzie oddzielnie przepływ w obszarze leżącym na lewo od przeszkody (oznaczonym indeksem 1) oraz za przeszkodą (oznaczonym indeksem 2). Zszycie układów opisujących przepływ w tych obszarach nastąpi przez warunki zgodności na przeszkodzie.

2.1. Układ równań podstawowych

Równania ruchu opisujące płaski stan przepływu płynu idealnego poza przeszkodą są następujące:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie U oznacza składową prędkości w kierunku osi x , V składową prędkości w kierunku osi y , p ciśnienie statyczne oraz ρ gęstość właściwą płynu.

W równaniach tych pominięto także czynniki siły masowe. Eliminując z dwóch pierwszych równań ciśnienie i wprowadzając nowopowstałe równanie na miejsce drugiego otrzymamy

$$(2.2) \quad \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

2.2. Linearyzacja równań podstawowych

Aby zlinearyzować układ równań (2.2) zakłada się, iż niejednorodne pole prędkości spełnia następujące własności:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} U &= U_0 + u(x, y), \quad \text{przy czym} \quad \int_0^h u(x, y) dy = 0, \\ V &= v(x, y), \end{aligned}$$

gdzie U_0 jest średnią prędkości przepływu, stałą w każdym punkcie przewodu, u i v są zaś wielkościami zakłócającymi przepływ jednorodny w kierunkach osi x i y . Zakłócenia te spełniają ponadto nierówności $u(x, y) \ll U_0$ oraz $v(x, y) \ll U_0$, są wielkościami małego rzędu (1-go rzędu). Przy powyższych założeniach oraz po-

minięciu wyrazów 2-go rzędu otrzymamy z (2.2) następujący układ równań liniowych cząstkowych:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho U_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

3. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ ZLINEARYZOWANYCH

Występujące w układzie (2.4) równanie Laplace'a rozwiązano stosując metodę rozdzielania zmiennych.

Przyjmując $v(x, y) = X(x) Y(y)$ i podstawiając to wyrażenie w równanie znajdujemy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0, \\ Y'' + \lambda Y &= 0, \end{aligned}$$

gdzie X, Y są zmiennymi rozdzielonymi, a λ parametrem. Na ściankach kanału oraz w przekrojach $x = \pm \infty$ zakłada się $v = 0$. Do ostatniego równania należy dołączyć następujące warunki brzegowe:

$$Y(0) = Y(b) = 0.$$

Rozwiązując przy powyższych warunkach równanie na $Y(y)$ znajdujemy funkcje własne

$$(3.2) \quad Y_n(y) = \sin \frac{\pi n}{b} y,$$

odpowiadające wartościom własnym

$$(3.3) \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2.$$

Z równania na $X(x)$ otrzymamy natomiast

$$(3.4) \quad X_n(x) = a_n e^{-\frac{\pi n}{b} x} + b_n e^{\frac{\pi n}{b} x}.$$

Rozwiązanie zagadnienia szukamy jak zazwyczaj w postaci szeregu:

$$(3.5) \quad v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{b} y \left[P_n \exp \frac{\pi n}{b} x + Q_n \exp \left(-\frac{\pi n}{b} x \right) \right],$$

gdzie P_n i Q_n są współczynnikami Fouriera.

Zakładając zbieżność szeregu oraz całkując pozostałe równania układu (2.4) w przedziale $[a, x]$ otrzymamy

$$(3.6) \quad u(x, y) = u(a, y) - \sum_{n=1}^{\infty} [P_n (e^{-\frac{\pi n}{b} x} - e^{-\frac{\pi n}{b} a}) - Q_n (e^{-\frac{\pi n}{b} x} - e^{-\frac{\pi n}{b} a})] \cos \frac{\pi n}{b} y$$

oraz

$$(3.7) \quad p(x, y) = p(a, y) + \rho U_0 [u(a, y) - u(x, y)].$$

Stała a oznacza dolną granicę przedziału całkowania.

Trzy ostatnie równania po uwzględnieniu warunków na $X(x)$ przyjmują postacie uproszczone, odmienne dla obu obszarów.

3.1. Układ równań dla $x < 0$

Dla obszaru oznaczonego indeksem 1 funkcja $X_n(x)$ przyjmują wartości skończone dla $x \rightarrow -\infty$ tylko wówczas, gdy $Q_n = 0$. Jeżeli dla $a = -\infty$ muszą ponadto być spełnione warunki brzegowe:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} u(-\infty, y) &= u_{-\infty}(y), \\ p(-\infty, y) &= p_{-\infty} = \text{const}, \end{aligned}$$

to dla obszaru leżącego na lewo od przeszkody otrzymamy następujące rozwiązanie ogólne naszego zagadnienia:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} v_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin \frac{\pi n}{b} y \exp \frac{\pi n}{b} x, \\ u_1(x, y) &= u_{-\infty} - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \frac{\pi n}{b} y \exp \frac{\pi n}{b} x, \\ p_1(x, y) &= p_{-\infty} + \rho U_0 (u_{-\infty} - u_1). \end{aligned}$$

3.2. Układ równań dla $x > 0$.

Postępując w podobny sposób jak w punkcie (3.1) oraz przyjmując, iż dla $a = \infty$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} u(\infty, y) &= u_{\infty}, \\ p(\infty, y) &= p_{\infty} = \text{const}, \end{aligned}$$

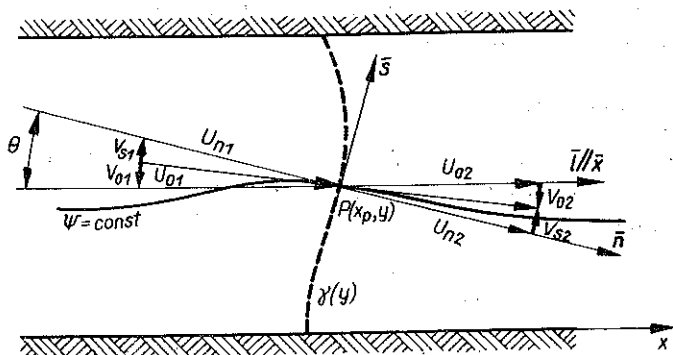
współczynniki zaś szeregu Fouriera $P_n = 0$, znaleziono kolejne równanie ogólne dla obszaru leżącego na prawo od przeszkody:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} v_2(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \frac{\pi n}{b} y \exp \left(-\frac{\pi n}{b} x \right), \\ u_2(x, y) &= u_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos \frac{\pi n}{b} y \exp \left(-\frac{\pi n}{b} x \right), \\ p_2(x, y) &= p_{\infty} + \rho U_0 (u_{\infty} - u_2). \end{aligned}$$

Poszukiwane wielkości u, v i p w równaniach (3.9) i (3.11) wyrażono przez dane wielkości $u_{-\infty}, U_0, p_{-\infty}$ oraz nie określone dotychczas $u_{\infty}, p_{\infty}, P_n$ i Q_n . Ich określenie stanie się możliwe po uwzględnieniu warunków zgodności na przeszkodzie.

3.3. Warunki zgodności na przeszkodzie

Rozłożmy prędkość na przeszkodzie na składowe: normalną U_n i styczną V_s (rys. 2). Ponieważ strumień ρU_n musi być zachowany, więc też dla płynu nieściśliwego o gęstości ρ musi być spełniony warunek



Rys. 2. Składowe prędkości na przeszkodzie

$$(3.12) \quad U_{n1} = U_{n2}.$$

Nie ulega także zmianie strumień pędu wzdłuż normalnej do przeszkody. Opór przypadający na jednostkę powierzchni jest więc równy Δp , tj. stracie ciśnienia statycznego na przeszkodzie, którą zwykle się definiować następująco:

$$(3.13) \quad \Delta p = \frac{1}{2} \rho K U_n^2.$$

We wzorze (3.13) K jest bezwymiarowym współczynnikiem oporu, zależnym w ogólności od kształtu przeszkody i liczby Re .

Na przeszkodzie może dojść także do zmiany wartości prędkości stycznych. Niech zmiana ta zgodnie z [4] będzie proporcjonalna do V_{s1} . Wówczas

$$(3.14) \quad V_{s1} - V_{s2} = B V_{s1},$$

gdzie B jest współczynnikiem proporcjonalności.

Dla rozważanego problemu można ponadto przyjąć, iż średni pęd w przekrojach $x = -\infty$ i $x = \infty$ nie ulega zmianie, stąd też suma sił zewnętrznych działających na przepływ wynosi zero. Można więc napisać

$$(3.15) \quad p_{-\infty} - p_{\infty} = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} \Delta p dy = \frac{\rho}{2b} K U_n^2 dy.$$

3.4. Rozwiązania dla układów równań (3.9) i (3.11)

Układy równań (3.9) i (3.11) będzie można uznać za rozwiązane, gdy określone zostaną wielkości u_∞ , p_∞ oraz ciągi stałych P_n i Q_n .

Z zależności geometrycznych pomiędzy składowymi U_n i V_n oraz składowymi prędkości na przeszkodzie U_0 i V_0 mierzonymi w układzie współrzędnych x, y wynika co następuje: z zależności (3.12) otrzymujemy

$$(3.16) \quad U_{02} = U_{01} + (V_{01} - V_{02}) T;$$

z zależności (3.13)

$$(3.17) \quad p = p_{01} - p_{02} = \frac{1}{2} \rho \gamma (U_{01}^2 + V_{01}^2 T^2 + 2U_{01} V_{01} T);$$

z zależności (3.12)

$$(3.18) \quad BU_{01} T = (B-1) V_{01} + V_{02} - (V_{01} - V_{02}) T^2;$$

z równania (3.15)

$$(3.19) \quad p_{-\infty} - p_\infty = \frac{\rho}{2b} \int_0^b \gamma (U_{01} + V_{01} T)^2 dy,$$

gdzie

$$T(y) = \operatorname{tg} \Theta(y) \text{ oraz } \gamma(y) = K(y) \cos^2 \Theta$$

są wielkościami danymi.

Ponadto z (3.9) i (3.11) po uwzględnieniu warunków (2.3) wynika

$$(3.20) \quad \begin{aligned} U_{01} &= U_0 + u_{-\infty} - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \frac{\pi n}{b} y, \\ U_{02} &= U_0 + u_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos \frac{\pi n}{b} y, \\ V_{01} &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin \frac{\pi n}{b} y, \\ V_{02} &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \frac{\pi n}{b} y, \\ p_{01} &= p_{-\infty} + \rho U_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \frac{\pi n}{b} y, \\ p_{02} &= p_\infty - \rho U_0 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos \frac{\pi n}{b} y, \end{aligned}$$

Wykorzystując wzory (3.20) oraz zaniedbując wyrazy wyższego rzędu otrzymano następujące wielkości:

z równania (3.16)

$$(3.21) \quad u_{-\infty} = u_{-\infty} - \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n + P_n) \cos \frac{\pi n}{b} y + T \sum_{n=1}^{\infty} (P_n - Q_n) \sin \frac{\pi n}{b} y;$$

z równania (3.18)

$$(3.22) \quad BTu_{-\infty} = -BU_0 T + BT \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \frac{\pi n}{b} y + B \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin \frac{\pi n}{b} y + \\ + (1 + T^2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{b} y (Q_n - P_n);$$

z równania (3.17)

$$(3.23) \quad \rho U_0 \gamma u_{-\infty} = \left[(p_{-\infty} - p_{\infty}) - \frac{1}{2} \rho \gamma U_0^2 \right] + \rho U_0 \sum_{n=1}^{\infty} (P_n + Q_n) \cos \frac{\pi n}{b} y + \\ + \rho \gamma U_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \frac{\pi n}{b} y - \rho \gamma U_0 T \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin \frac{\pi n}{b} y;$$

z równania (3.19)

$$(3.24) \quad p_{\infty} = p_{-\infty} - \frac{\rho}{2b} \int_0^b \gamma \left(U_0^2 + 2U_0 u_{-\infty} - 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \frac{\pi n}{b} y + \right. \\ \left. + 2TU_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin \frac{\pi n}{b} y \right) dy.$$

Aby zlinearyzować warunki zgodności na przegrodzie przyjęto ponadto

$$(3.25) \quad \begin{aligned} B(y) &= B_0 + \gamma(y), \\ T(y) &= t(y), \\ \gamma(y) &= \gamma_0 [1 + s(y)], \\ K(y) &= K_0 [1 + k(y)], \\ \Theta(y) &= \theta_0 + \varepsilon(y), \end{aligned}$$

gdzie B_0 , γ_0 , K_0 i θ_0 są stałymi,

$$|s| \ll \gamma_0, \quad |k| \ll K_0, \quad \int_0^b s(y) dy = 0, \quad \int_0^b k(y) dy = 0, \quad \text{a} \quad r(y), \\ t(y), \quad \text{i} \quad \varepsilon(y)$$

są wielkościami małymi 1-go rzędu. Wówczas otrzymujemy:

z równania (3.21)

$$(3.26) \quad u_{\infty} = u_{-\infty} - \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n + P_n) \cos \frac{\pi n}{b} y,$$

z równania (3.22)

$$(3.27) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [(B_0 - 1) P_n + Q_n] \sin \frac{\pi n}{b} y = B_0 U_0 t;$$

z równania (3.24)

$$(3.28) \quad p_{-\infty} - p_{\infty} = \frac{\rho \gamma_0 U_0^2}{2},$$

z równań (3.23) i (3.28)

$$(3.29) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [(1 + \gamma_0) P_n + Q_n] \cos \frac{\pi n}{b} y = \gamma_0 \left[u_{-\infty} + \frac{1}{2} s U_0 \right].$$

Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \alpha_n &= (B_0 - 1) P_n + Q_n, \\ \beta_n &= (1 + \gamma_0) P_n + Q_n \end{aligned}$$

oraz uwzględniając, iż wówczas

$$(3.31) \quad \begin{aligned} P_n &= \frac{\beta_n - \alpha_n}{2 + \gamma_0 - B_0}, \\ Q_n &= \frac{\beta_n (1 - B_0) + \alpha_n (1 + \gamma_0)}{2 + \gamma_0 - B_0}, \end{aligned}$$

otrzymamy zamiast wzorów (3.26), (3.27) i (3.29) następujące:

$$(3.32) \quad \begin{aligned} u_{\infty} &= u_{-\infty} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n (2 - B_0) + \alpha_n \gamma_0}{2 + \gamma_0 - B_0} \cos \frac{\pi n}{b} y, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{\pi n}{b} y &= B_0 U_0 t, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos \frac{\pi n}{b} y &= \gamma_0 \left[u_{-\infty} + \frac{U_0}{2} s \right]. \end{aligned}$$

Ostatnie trzy zależności oraz związek (3.28) stanowią uzupełnienie dla układów (3.9) i (3.11). Równania (3.32)₂ i (3.32)₃ pozwalają dobrać ciągi stałych P_n i Q_n , a (3.32)₁ i (3.28) uprzednio nie określone wielkości u_{∞} i p_{∞} . Układy (3.9) i (3.11) wraz z zależnościami (3.28), (3.32) stanowią układ równań opisujących w sposób analityczny płaski przepływ w równoległym przewodzie z przegrodą przepuszczalną

dowolnego kształtu. Możliwe jest bowiem rozwinięcie prawych stron (3.32)₂ w szereg sinusów, a (3.32)₃ w szereg cosinusów, a tym samym wyrażenie ciągu stałych α_n i β_n wzorami zawierającymi uprzednio narzucone parametry przeszkody $B_0, \gamma_0, s(y), t(y)$ oraz przepływu U_0 i $u_{-\infty}(y)$.

4. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

W dalszej kolejności zastosowano powyższą metodę do kilku wybranych przeszkód.

Przegroda płaska prostopadła do ścianek przewodu. Gdy wszystkie elementy przeszkody leżą w płaszczyźnie y, o, z , to $\Theta=0$, $\gamma=K$ oraz $t=0$. Ponadto zgodnie z (3.32) zachodzą następujące zależności:

dla przeszkody nieregularnej

$$(4.1) \quad u_{\infty} = \frac{2 - K_0 + B_0 (K_0 - 1)}{2 + K_0 - B_0} u_{-\infty} - \frac{2 - B_0}{2 + K_0 - B_0} \frac{s U_0 K_0}{2};$$

dla przeszkody regularnej (wówczas $s=0$)

$$(4.2) \quad u_{\infty} = \frac{2 - K_0 + B_0 (K_0 - 1)}{2 + K_0 - B_0} u_{-\infty};$$

dla regularnej i nie wpływającej na prędkość poprzeczną (gdy $s=B=0$)

$$(4.3) \quad u_{\infty} = \frac{2 - K_0}{2 + K_0} u_{-\infty}.$$

Powyższe wzory pozwalają ustalić związek pomiędzy prędkościami zakłócającymi przepływ daleko przed przegrodą i daleko za przegrodą (teoretycznie dla $x \pm \infty$).

Wzór (4.3) jest znany i powszechnie stosowany w praktyce od szeregu lat. Ustalony został eksperymentalnie ponad 25 lat temu [2]. W [7], a także — prostszą drogą — w niniejszej pracy dowiedziono go na drodze rozważań teoretycznych. Wzór (4.1) nie jest znany w literaturze. W przypadku $B_0=0, s \neq 0$ przybiera postać znaną z [7].

Niech dla przykładu $\gamma_0=K=\text{const}$, $B_0=B=\text{const}$ oraz

$$(4.4) \quad u_{-\infty} = A \cos \frac{\pi m}{b} y,$$

gdzie stała $A \ll U_0$, a m jest liczbą naturalną.

Powyższe zakłócenie nie wpływa na wartość prędkości średniej U_0 i spełnia warunki (2.3). Wówczas współczynniki Furiera, zgodnie z równaniami (3.30), (3.32)_{2,3} muszą przyjmować wartości

$$(4.5) \quad Q_n = (1 - B) P_n, \quad P_n = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \neq m; \\ \frac{AK}{2 - B + K}, & \text{jeżeli } n = m. \end{cases}$$

Wzory końcowe, opisujące jednoznacznie omawiany przepływ, są tym samym następujące

dla $x < 0$

$$\begin{aligned}
 V_1(x, y) &= \frac{AK}{2-B+K} \sin \frac{\pi m}{b} y \exp \frac{\pi m}{b} y, \\
 U_1(x, y) &= U_0 + A \cos \frac{\pi m}{b} y - \frac{AK}{2-B+K} \cos \frac{\pi m}{b} y \exp \frac{\pi m}{b} x, \\
 p_1(x, y) &= p_{-\infty} + \rho U_0 \frac{AK}{2-B+K} \cos \frac{\pi m}{b} y \exp \frac{\pi m}{b} x
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

dla $x > 0$

$$\begin{aligned}
 V_2(x, y) &= \frac{(1-B)AK}{2-B+K} \sin \frac{\pi m}{b} y \exp \left(-\frac{\pi m}{b} x \right), \\
 U_2(x, y) &= U_0 + \frac{2-K+B(K-1)}{2+K-B} A \cos \frac{\pi m}{b} y + \\
 &\quad + \frac{(1-B)AK}{2-B+K} \cos \frac{\pi m}{b} y \exp \left(-\frac{\pi m}{b} x \right), \\
 p_2(x, y) &= p_{-\infty} - \frac{1}{2} K \rho U_0^2 - \frac{(1-B)AK}{2-B+K} \cos \frac{\pi m}{b} y \exp \left(-\frac{\pi m}{b} x \right) \rho U_0.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Przegroda płaska nachylona pod kątem Θ_0 do ścianek przewodu. Dla przegrody płaskiej, nachylonej pod kątem Θ_0 do ścianek przewodu, dla której można dodatkowo przyjąć $B=0$, muszą być spełnione następujące zależności:

$$\gamma_0 = K_0 \cos^2 \Theta_0, \quad s(y) = k(y), \quad \alpha_n = 0, \quad P_n = Q_n = \frac{\beta_n}{2 + \gamma_0}.$$

Otrzymujemy ponadto

$$\begin{aligned}
 p_{-\infty} - p_{\infty} &= \rho \gamma_0 U_0^2 / 2, \\
 u_{\infty} &= \frac{2 - \gamma_0}{2 + \gamma_0} u_{-\infty} - \frac{\gamma_0 U_0}{2 + \gamma_0} k(y), \\
 \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \frac{\pi n}{b} y &= \frac{\gamma_0}{2 + \gamma_0} \left[u_{-\infty} + \frac{U_0}{2} k(y) \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Występujące we wzorze (4.8)₃ współczynniki P_n określimy, rozwijając jego prawą stronę w cosinusowy szereg Furiera.

Przegroda pofałdowana wokół płaszczyzny $y = 0$. Dla przegrody pofałdowanej wokół płaszczyzny $y = 0$, dla której przyjęto ponadto $B=0$ oraz $K = \text{const}$ mamy

$$\begin{aligned}
 s(y) &= \frac{\gamma}{\gamma_0} - 1 = \frac{K \cos^2 \Theta(y)}{\gamma_0 - 1} - 1, \\
 \gamma_0 &= \frac{K}{b} \int_0^b \cos^2 \varepsilon(y) dy.
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Dla przegrody opisanej parabolą

$$(4.10) \quad x_p = a - \frac{4a}{b^2} \left(y - \frac{b}{2} \right)^2,$$

gdzie $a \ll U_0$, można przyjąć

$$(4.11) \quad -\varepsilon(y) \approx T = \frac{dx_p}{dy} = -8 \frac{a}{b} \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right).$$

Wówczas

$$(4.12) \quad \gamma_0 = K \frac{b}{a} \left(\frac{1}{16} \sin \frac{8a}{b} + \frac{1}{2} \frac{a}{b} \right),$$

a

$$(4.13) \quad s(y) = \frac{K}{\gamma_0} \cos^2 \left[8 \frac{a}{b} \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) \right] - 1.$$

Wstawiając (4.12) i (4.13) do (3.32)_{1,3} otrzymamy dwa wzory na u_∞ oraz ciąg stałych P_n następujących postaci:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} u_\infty &= \frac{2 - \gamma_0}{2 + \gamma_0} u_{-\infty} + \frac{\gamma_0 U_0}{2 + \gamma_0} \left\{ 1 - \frac{K}{\gamma_0} \cos^2 \left[8 \frac{a}{b} \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \frac{\pi n}{b} y &= \frac{\gamma_0}{2 + \gamma_0} u_{-\infty} - \frac{1}{2} \frac{\gamma_0 U_0}{2 + \gamma_0} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{K}{\gamma_0} \cos^2 \left[8 \frac{a}{b} \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Stałe P_n w równaniu (4.14) można także określić analitycznie rozwijając jego prawą stronę w szereg cosinusów.

5. ZAKOŃCZENIE

Obecność przegrody przepuszczalnej w przewodzie zmniejsza lub zwiększa niejednorodność przepływu. Zależy to głównie od parametrów K i B . Linie prądu na przeszkodzie wyginane są na ogół w kierunku normalnej do przegrody, dlatego też $0 \leq B \leq 1$. Dla siatek o kwadratowych oczkach wykonanych z drutu zgodnie z [4] można przyjąć

$$(5.1) \quad B = 1 - (1 + \sqrt{K})^{-\frac{1}{2}},$$

gdzie $K = [(1 - \beta)/\beta]^2$, $\beta = \left(1 - \frac{d}{l} \right)^2$; d jest średnicą drutu, a l wysokością oczka.

Wynika stąd, iż dla siatek, dla których $K < 2$, mamy $B < 0,3$. Tak więc dla siatek wykonanych z drutu, dla których $l > d$, można zaniedbać wpływ B i przyjąć tak, jak

to przyjęto również w [7], iż taka przeszkoda nie zmienia składowej stycznej prędkości.

Wówczas dla przegrody płaskiej i prostopadłej do osi przewodu prawdziwy jest wzór (4.5):

$$u_{\infty} = \frac{2-K}{2+K} u_{-\infty},$$

który bywa zresztą wykorzystywany w zagadnieniach praktycznych, przy regulacji pola prędkości w komorach pomiarowych tunelów aerodynamicznych.

Dla $K=2$ zachodzi całkowite wyrównanie prędkości, dla $K<2$ tylko częściowe, a dla $K>2$ dochodzi do odwrócenia profilu prędkości zakłócającej, gdyż dla $u_{-\infty}>0$ otrzymamy $u_{\infty}<0$ i na odwrót. Wnioski te są całkowicie zgodne z danymi z literatury (poz. [8], str. 56).

Nachylenie oraz pofałdowanie przeszkody wpływa na stopień wyrównania przepływu. Wpływ ten dla wybranych przeszkód określają zależności wyprowadzone w p. 4.

Dla przegrody dowolnego kształtu oraz $B \neq 0$ odnoszą się równania ogólne (3.9), (3.11), (3.28) i (3.32), z których wynikają zależności określające poszukiwane wielkości u, v i p jako funkcje danych parametrów przepływu $U_0, p_{-\infty}, u_{\infty}$ oraz przegrody $B(y), \Theta(y)$ i $K(y)$.

Możliwe jest również opisanie tą metodą zadania odwrotnego, kiedy dla danego $u_{-\infty}$ należy tak dobrać parametry przeszkody, aby zapewnić wymagany profil dla u_{∞} . Wielkością poszukiwaną we wzorach (3.28), (3.32) będzie zamiast u_{∞} parametr $\gamma(y)$, a w przypadku przegrody płaskiej $K(y)$. Uwzględnienie nachylenia i pofałdowania przegrody powoduje, że zadanie takie można rozwiązać na wiele sposobów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. I. TAYLOR, G. K. BATCHELOR, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **2**, 1, 1949.
2. J. M. BONNEVILLE, D. B. HARPER, *An analysis and investigation of two-dimensional flow through wire screens*, M. S. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1951.
3. S. L. BRAGG, W. R. HAWTHORNE, *J. Aero. Sci.* **17**, 243, 1950.
4. J. W. ELDER, *Steady flow through non-uniform gauzes of arbitrary shape, I*, *Fluid Mech.* **5**, 355-368, 1959.
5. Y. L. LAU, W. D. BAINES, *Flow of stratified fluid through curved screens*, *J. Fluid. Mech.* **33**, 4, 721-738, 1968.
6. J. K. KOO, D. F. JAMES, *Fluid flow around and through a screen*, *J. Fluid. Mech.* **60**, 3, 513-538, 1973.
7. P. KIJKOWSKI, I. SZAFRANKOWSKA, *Płaski przepływ przez przegrodę przepuszczalną w przewodzie o ściankach równoległych*, II Krajowa Konferencja Mechaniki Cieczi i Gazów, Gdańsk 1976.
8. S. M. GORLIN, I. I. SLEZINGER, *Aeromechanizacziweskije izmierienija*. Nauka, Moskwa 1964.

Резюме

ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМОЙ ПРЕГРАДОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Рассматривается плоское и установившееся течение между параллельными стенками соединенными с собой единичной проницаемой преградой произвольной формы. Выведены уравнения течения, учитывающие тип и форму преграды, а также неоднородность скорости вдали от препятствия.

Для рассуждений приняты уравнения Эйлера. Из этих уравнений, после предварительной их линеаризации, получены две системы линейных уравнений, из которых одна описывает течение влево, вторая же вправо от преграды. Вышеупомянутые системы уравнений связаны с собой зависимостями, обеспечивающими совместность давления и составляющих скорости на преграде. Основные рассуждения проводились для линеаризованных условий совместности.

Работа содержит обобщение теоретических результатов, касающихся плоского течения через проницаемую преграду в канале с параллельными стенками. Обобщение заключается в учете изменения направления скорости жидкости на преграде, а также в учете случаев, когда преграда помещена косым образом по отношению к оси канала и не является плоской.

SUMMARY

PLANE FLOW IN A CHANNEL WITH PERMEABLE BARRIER OF ARBITRARY SHAPE

The paper is concerned with a plane, steady motion between parallel walls being connected by a single permeable barrier of arbitrary shape. The equations of the flow derived are accounting for a shape of a barrier and nonhomogeneous velocity distribution far from it.

Considerations base on linearized Euler's equations. Two systems of linear equations are obtained describing the motion on the left and right sides of a barrier. Both pressure and velocity components are held continuous on the obstacle. Linearized compatibility conditions are satisfied.

The outcomes given constitute generalization of theoretical results for the plane motion through a permeable obstacle in a parallel-walls pipe. Thus, the change of velocity direction on the barrier is taken into account and the case of non-plane barrier inclined to the channel-axis is included.

INSTYTUT MECHANIKI GÓROTWORU
POLSKA AKADEMIA NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 stycznia 1978 r.