

## WPLYW SPRZEŻENIA ZJAWISK TERMICZNYCH I DYFUZJI NA KONCENTRACJĘ CZYNNIKA DYFUNDUJĄCEGO W PRZYPADKU DZIAŁANIA CHWILOWEGO ŹRÓDŁA DYFUZJI W OŚRODKU SPRĘŻYSTYM

WALENTY DUDZIAK i ZOFIA SOBCZYŃSKA-KOŃCZAK (POZNAŃ)

W pracy wyznacza się rozkład koncentracji i temperatury w nieograniczonym ciele stałym, towarzyszący procesowi termodyfuzji. Proces ten jest wywołany działaniem chwilowego źródła dyfuzji przyłożonego do poboczniczy nieskończonego walca o promieniu  $r_0$ . Rozwiązuje się sprzężone ze sobą równania przewodnictwa cieplnego oraz dyfuzji wykorzystując do tego celu przekształcenia Laplace'a i Hankela. Uzyskane rezultaty porównuje się z rozwiązaniem klasycznego niesprężonego równania dyfuzji Ficka. W przykładzie liczbowym wyznaczono wartości współczynników termodyfuzji oraz opierając się na nich sporządzono wykresy rozkładu koncentracji i temperatury.

### WSTĘP

Zagadnienia termodyfuzji w ciałach stałych są rozwiązywane na drodze doświadczalnej już od dawna. Szczególnie rozwinięte są prace badawcze nad obróbką cieplno-chemiczną poprawiającą własności mechaniczne metalu. Takie zabiegi jak nawęglanie, azotowanie, węglazotowanie itp. doczekały się bardzo bogatej literatury omawiającej technologię procesów, strukturę i własności mechaniczne otrzymanej warstwy powierzchniowej w zależności od temperatury i czasu trwania procesu. Między innymi zagadnieniom tym poświęcona jest praca SEITA [23], omawiająca metody badań procesu dyfuzji oraz zawierająca zestawienie współczynników dyfuzji wyznaczonych eksperymentalnie. Dynamiczny rozwój tej dyscypliny nastąpił w latach powojennych. Znalazło to odbicie w całym szeregu prac [1, 2, 3, 5, 7, 8 i 12].

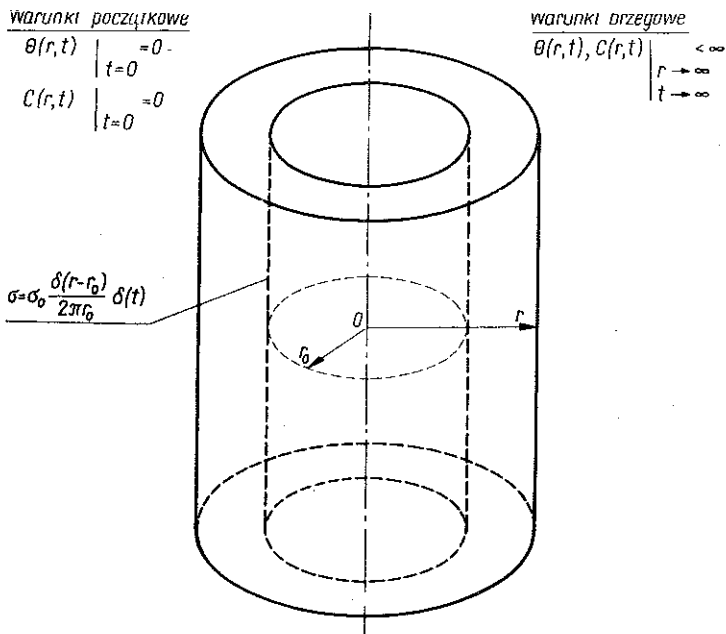
Równolegle pracowano nad stworzeniem teorii tłumaczącej mechanizm atomowy powstawania zjawiska termodyfuzji czy dyfuzji. Do najbardziej przekonujących teorii należą: 1) teoria wakansów, 2) teoria międzywęzłowa oraz 3) teoria zamiany atomów w węzłach. Nie będziemy tutaj omawiali tych teorii, gdyż sam mechanizm termodyfuzji nie jest przedmiotem niniejszej pracy. Zainteresowanych odsyłamy do prac [2, 6, 10, 11, 13, 24 i 25].

My wykorzystamy fakt, że procesowi obróbki cieplno-chemicznej towarzyszy zmiana własności mechanicznych ośrodka oraz pojawienie się stanu naprężenia, odkształcenia oraz zmiana pola temperatury. Obróbkę cieplno-chemiczną traktować będziemy jako proces termodyfuzji polegający na wprowadzeniu do ciała stałego obcego składnika w obecności podwyższonej temperatury.

Zajmiemy się makroskopowym opisem zjawiska termodyfuzji podanym przez PODSTRIGACZA [18, 19 i 20] i NOWACKIEGO [15, 16 i 17]. Opis ten jest uogólnieniem opisu podanego przez Ficka w roku 1815, w którym pominięto wpływ gradientów temperatury i odkształcenia na wielkość strumienia dyfuzji. Zdaniem SHEWMONA [24], opis Ficka odpowiada przebiegowi zjawiska dyfuzji w gazach, natomiast nie charakteryzuje tego procesu w cieczach, a zwłaszcza w ciałach stałych.

Celem niniejszej pracy jest jakościowa ocena wpływu temperatury na rozkład koncentracji czynnika dyfundującego w ciele stałym o własnościach sprężystych, otrzymanego wg opisu Nowackiego i porównanie z rozwiązaniem uzyskanym wg opisu Ficka. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

Rozważymy nieograniczony obszar sprężysty, w którym działa źródło dyfuzji jak na rys. 1. Źródło ma charakter chwilowy. Przykład taki wybrano ze względu na



Rys. 1.

możliwość uzyskania stosunkowo nieskomplikowanego rozwiązania matematycznego, mimo iż jego realizacja praktyczna jest utrudniona. Dla celów analizy jakościowej zjawisk okaże się on, jak zobaczymy, bardzo przydatny. Zagadnienie potraktujemy jako quasi-statyczne.

### 1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozważmy nieograniczony obszar sprężysty, w którym na poboczniczy nieskończenie długiego walca o osi  $z$  i promieniu  $r_0$  zrealizowano źródło dyfuzji w postaci (rys. 1)

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r_0} \delta(t),$$

przy czym  $\sigma_0$  oznacza wydatek źródła  $\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r_0}$  oraz  $\delta(t)$  są funkcjami Diraca odpowiednio dla współrzędnych miejsca i czasu. Załóżmy, że w chwili  $t=0$  środek znajduje się w stanie naturalnym. Za punkt wyjścia do rozważań przyjmijmy układ równań termodyfuzji podany przez NOWACKIEGO [15]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} & \left( \nabla^2 - \frac{1}{\kappa_1} \partial_t \right) \theta + \alpha_0 \partial_t c = -Q, \\ & \left( \nabla^2 - \frac{1}{\kappa_2} \partial_t \right) c + \beta_0 \nabla^2 \theta = -\sigma, \\ & \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \varepsilon_{,i} + \gamma_T \theta_{,i} + \gamma_c c_{,i} = 0, \\ & \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

W układzie równań (1.1)  $\theta$  oznacza względne pole temperatury odniesione do temperatury początkowej  $T_0$ ,  $c$  jest względną koncentracją składnika odniesioną do koncentracji początkowej  $c_0$ ,  $Q$  i  $\sigma$  oznaczają odpowiednio intensywność źródeł ciepła i dyfuzji,  $u_i$  są współrzędnymi wektora przemieszczenia, a  $\varepsilon$  dylatacją ośrodka,  $\varepsilon = u_{i,i}$ . Wielkości  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_T$ ,  $\gamma_c$  są stałymi charakteryzującymi własności cieplne i dyfuzyjne ośrodka, natomiast  $\lambda$  i  $\mu$  są stałymi sprężystości Lamégo.

Jak łatwo zauważyć, równania (1.1)<sub>1</sub> i (1.1)<sub>2</sub> są sprzężone za pośrednictwem funkcji  $\theta$  i  $c$ . Natomiast równania przemieszczeniowe (1.1)<sub>3</sub> mogą być rozwiązywane niezależnie, jeżeli funkcje  $\theta$  i  $c$  są już wcześniej wyznaczone. Te ostatnie równania w niniejszej pracy wykorzystane nie będą, gdyż interesują nas wyłącznie zmiany pól temperatury i koncentracji. Ich rozwiązanie można znaleźć w pracy [4].

Dla rozdzielania równań (1.1)<sub>1</sub> i (1.1)<sub>2</sub> wykorzystamy metodę podaną przez W. NOWACKIEGO [15] polegającą na wprowadzeniu pomocniczych funkcji rozwiązujących  $\chi_1$  i  $\chi_2$  związanych z temperaturą i koncentracją zależnościami:

$$(1.2) \quad \theta = \left( \nabla^2 - \frac{1}{\kappa_2} \partial_t \right) \chi_1 - \alpha_0 \partial_t \chi_2,$$

$$(1.3) \quad c = -\beta_0 \nabla^2 \chi_1 + \left( \nabla^2 - \frac{1}{\kappa_1} \partial_t \right) \chi_2.$$

Wstawiając powyższe funkcje do równań (1.1)<sub>1</sub> i (1.1)<sub>2</sub> otrzymamy

$$(1.4) \quad (\nabla^2 - \lambda_1^2 \partial_t) (\nabla^2 - \lambda_2^2 \partial_t) \chi_1 = -Q,$$

$$(1.5) \quad (\nabla^2 - \lambda_1^2 \partial_t) (\nabla^2 - \lambda_2^2 \partial_t) \chi_2 = -\sigma,$$

przy czym wielkości  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są określone następująco:

$$(1.6) \quad \left. \begin{aligned} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \alpha_0 \beta_0 \pm \sqrt{\left( \frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_2} + \alpha_0 \beta_0 \right)^2 + \frac{4\alpha_0 \beta_0}{\kappa_2}} \right].$$

Wykonując na równaniach (1.4) i (1.5) transformację Laplace'a oraz uwzględniając, że w chwili  $t=0$  układ znajduje się w stanie naturalnym oraz że w rozważanym przykładzie działa wyłącznie źródło dyfuzji, dochodzimy do wniosku, że  $\chi_1=0$ . Zagadnienie sprowadza się więc do rozwiązania przetransformowanego równania (1.5) w postaci

$$(1.7) \quad (\nabla^2 - \lambda_1^2 p)(\nabla^2 - \lambda_2^2 p) \tilde{\chi}_2 = \tilde{\sigma}.$$

Rozwiązaniem równania (1.7) jest funkcja [15]

$$(1.8) \quad \tilde{\chi}_2 = \frac{1}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) p} (\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2),$$

przy czym  $K_1$  i  $K_2$  są funkcjami spełniającymi równania

$$(1.9) \quad (\nabla^2 - \lambda_1^2 p) \tilde{K}_1 = -\tilde{\sigma},$$

$$(1.10) \quad (\nabla^2 - \lambda_2^2 p) \tilde{K}_2 = -\tilde{\sigma},$$

gdzie  $p$  jest parametrem transformacji Laplace'a.

## 2. WYZNACZENIE PÓL KONCENTRACJI I TEMPERATURY

W rozdziale tym zajmiemy się wyznaczeniem pól koncentracji i temperatury w zależności (1.2) i (1.3), wykorzystując przy tym równania (1.8), (1.9) i (1.10).

W rozważanym przez nas przypadku działa źródło dyfuzji typu

$$(2.1) \quad \sigma = \sigma_0 \frac{\delta(r - r_0)}{2\pi r_0} \delta(t),$$

kóre jak widać jest wyłącznie zależne od zmiennej  $r$  i czasu  $t$ . Wykorzystując całkową transformację Hankela funkcji Diraca [9] występującej we wzorze (2.1) oraz stosując przedstawienie Laplace'a, otrzymamy

$$(2.2) \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r_0) J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Rozwiązanie równań (1.9) i (1.10) możemy zatem przyjąć także w postaci całek Hankela

$$(2.3) \quad \tilde{K}_1 = \int_0^\infty A_1(\alpha, p) J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$(2.4) \quad \tilde{K}_2 = \int_0^\infty A_2(\alpha, p) J_0(\alpha r) d\alpha.$$

We wzorach (2.2), (2.3) i (2.4)  $J_0$  są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego, natomiast  $A_1(\alpha, p)$  i  $A_2(\alpha, p)$  są chwilowo nieznanymi funkcjami para-

metrów transformacji. Funkcje te wyznaczmy z równań (1.9) i (1.10) uwzględniając postać (2.2). Po prostych przekształceniach znajdujemy

$$(2.5) \quad A_1(\alpha, p) = \frac{\sigma_0}{2\pi} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \lambda_1^2 p)} J_0(\alpha r_0),$$

$$A_2(\alpha, p) = \frac{\sigma_0}{2\pi} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \lambda_2^2 p)} J_0(\alpha r_0).$$

Biorąc pod uwagę rozwiązania (2.3) i (2.4) oraz wzory (2.5) otrzymujemy z (1.8) następującą postać funkcji rozwiązującej:

$$(2.6) \quad \tilde{\chi}_2 = \frac{\sigma_0}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)p} \int_0^\infty \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_1^2 p} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_2^2 p} \right] \alpha J_0(\alpha r_0) J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Pole temperatury i koncentracji wyznaczmy teraz z równań (1.2) i (1.3). Po uwzględnieniu, że  $\tilde{\chi}_1 = 0$  oraz po odwróceniu transformacji Laplace'a otrzymujemy

$$(2.7) \quad \theta(r, t) = -\frac{\alpha_0 \sigma_0}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\lambda_1^2} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1^2} \alpha^2\right) - \frac{1}{\lambda_2^2} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_2^2} \alpha^2\right) \right] \alpha J_0(\alpha r_0) J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$(2.8) \quad c(r, t) = \frac{\sigma_0}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \int_0^\infty \left[ \left(1 - \frac{1}{\kappa_1 \lambda_1^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1^2} \alpha^2\right) - \left(1 - \frac{1}{\kappa_1 \lambda_2^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{\lambda_2^2} \alpha^2\right) \right] \alpha J_0(\alpha r_0) J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Występujące we wzorach całki można obliczyć postępując się tablicami [22]. Po uporządkowaniu znajdziemy

$$(2.9) \quad \theta(r, t) = \frac{-\alpha_0 \sigma_0}{4\pi t (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ \exp\left(-\frac{\lambda_1^2 (r_0^2 + r^2)}{4t}\right) I_0\left(\frac{\lambda_1^2 r_0 r}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda_2^2 (r_0^2 + r^2)}{4t}\right) I_0\left(\frac{\lambda_2^2 r_0 r}{2t}\right) \right],$$

$$(2.10) \quad c(r, t) = \frac{\sigma_0}{4\pi t (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[ \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\kappa_1}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_1^2 (r_0^2 + r^2)}{4t}\right) I_0\left(\frac{\lambda_1^2 r_0 r}{2t}\right) - \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\kappa_1}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_2^2 (r_0^2 + r^2)}{4t}\right) I_0\left(\frac{\lambda_2^2 r_0 r}{2t}\right) \right].$$

W powyższych wzorach  $I_0$  oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego.

Jeżeli w szczególnym przypadku przyjmiemy  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ , to na mocy (1.6)

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{\kappa_1}, \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{\kappa_2}.$$

Pole temperatury określone wzorem (2.9) równe jest wówczas zeru, natomiast rozkład koncentracji określony wzorem (2.10) przyjmie postać

$$(2.11) \quad c^*(r, t) = \frac{\sigma_0}{4\pi t} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{4\kappa_2 t}\right) I_0\left(\frac{r_0 r}{2\kappa_2 t}\right).$$

Rozwiązanie (2.11) odpowiada rozwiązaniu równania dyfuzyjnego Ficka:

$$(2.12) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\kappa_2} \partial_t\right) c = -\sigma_0 \frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r_0} \delta(t).$$

Z równania wzorów (2.10) i (2.11) wynika, że różnica między rozkładem koncentracji składnika przy uwzględnieniu sprzężenia z temperaturą i rozkładu wg prawa Ficka ma wyraźny charakter nie tylko ilościowy (różne współczynniki), ale także jakościowy.

### 3. PRZYKŁAD LICZBOWY

Dla wyraźniejszego uwypuklenia różnic spowodowanych w rozkładzie koncentracji składnika wpływem temperatury przytoczymy w niniejszym rozdziale przykład liczbowy.

Nasze rozważania odniesiemy do jednego z częściej spotkanych procesów obróbki cieplno-chemicznej, mianowicie azotowania. Ponadto przyjmiemy, że rozważany ośrodek sprężysty ma własności żelaza  $\alpha$ . Przyjmiemy, że ośrodek został wstępnie ogrzany i znajduje się w ustalonej temperaturze  $T_0 = 550^\circ\text{C}$ , koncentracja zaś w stanie naturalnym zgodnie z danymi zawartymi w pracach [14 i 21] wynosi

$$(3.1) \quad c_0 \approx 7.5 \cdot 10^{-4} \text{ [cm}^3\text{/kg]}.$$

Aby określić pole koncentracji i temperatury musimy najpierw ustalić wartości współczynników występujących we wzorach (2.9) i (2.10). W tym celu wyjaśnimy opierając się na pracy NOWACKIEGO [15] znaczenie stałych:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{k}{c_{e,c}}, & \kappa_2 &= D_c, & \alpha_0 &= \frac{T_0 d}{k}, & \beta_0 &= \frac{Dr}{D_c}, \\ D_c &= L_{nn} S, & D_e &= -\gamma_c L_{nn}, & D_T &= -L_{nn} d + \frac{1}{T} L_{qq}, \\ k &= \frac{1}{T_0} \left( \frac{L_{qq} L_{nn} - L_{qn}^2}{L_{nn}} \right) > 0, & d &= \frac{\partial^2 F(\varepsilon_{ij}, T, C)}{\partial T \partial c} \Bigg|_{\substack{\varepsilon_{ij}=0 \\ T=T_0 \\ c=c_0}}, \\ S &= \frac{\partial^2 F(\varepsilon_{ij}, T, c)}{\partial c^2} \Bigg|_{\substack{\varepsilon_{ij}=0 \\ T=T_0 \\ c=c_0}}, \end{aligned}$$

przy czym  $T_0$  i  $c_0$  oznaczają odpowiednio temperaturę i koncentrację stanu naturalnego,  $c_{e,c}$  jest ciepłem właściwym przy ustalonej deformacji i koncentracji,  $L_{ij}$  —

współczynnikami Onsagera,  $F(\varepsilon_{ij}, T, c)$  — energią swobodną dla ciała stałego. Spośród pozostałych współczynników  $k$  jest przewodnością cieplną,  $\kappa_2 = D_c$  współczynnikiem przewodności dyfuzyjnej. Współczynniki  $D_c$  i  $D_T$  charakteryzują wpływ sprzężenia między gradientami temperatury i zmian objętości traktowanych jako bodźce termodynamiczne a strumieniem masy składnika. Wyznaczenie wartości liczbowych tych współczynników dla rozpatrywanego procesu obróbki jest trudne, gdyż jak dotąd nie przeprowadzono badań doświadczalnych nastawionych na potrzeby wynikające z teorii termodyfuzji stworzonej przez Podstrigacza i Nowackiego. Znane w literaturze fachowej wyniki dotyczą badań prowadzonych pod kątem potrzeb wynikających z posługiwania się prawem Ficka lub zupełnie w oderwaniu od teorii. Stąd też wykorzystane w pracy wartości współczynników zostały ustalone na zasadzie możliwie najdalej idących analogii oraz na podstawie sensu fizycznego, jaki przedstawiają. Ostatecznie na podstawie danych podanych w pracy [26] przyjęto

$$(3.3) \quad \begin{aligned} c_{\varepsilon, c} &= 1,2165 \quad [\text{cal/cm}^3 \text{ deg}], \\ k &= 0,087 \quad [\text{cal/cm s deg}]. \end{aligned}$$

Współczynnik przewodności dyfuzyjnej  $D_c$  wyznaczono wg równania Arrheniusa [1]:

$$(3.4) \quad D_c = D_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) [\text{cm}^2/\text{s}],$$

Przy czym  $Q$  oznacza energię czynnika dyfundującego,  $R$  — stałą gazową,  $D_0$  współczynnik preeksponencjalny niezależny od temperatury.

Za ADDA, PHILIBERT [1] przyjęto dla azotu w temperaturze  $T_0 = 550^\circ\text{C}$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} D_0 &= 6,6 \cdot 10^{-3} \quad [\text{cal cm}^2/\text{s}], \\ Q &= 1,86 \cdot 10^4 \quad [\text{cal/mol}], \\ R &= 1,98301 \quad [\text{cal/mol deg}]. \end{aligned}$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymamy

$$(3.6) \quad \kappa_2 = D_c = 7,392 \cdot 10^{-8} \quad [\text{cm}^2/\text{s}].$$

Współczynnik  $D$  zdefiniowany przez teoretyczne, nieznanne współczynniki Onsagera wyznaczamy opierając się na wzorze podanym przez SHEWMONA [24]:

$$(3.7) \quad D_T = \frac{D_c Q c_0}{RT^2} \quad [\text{cm}^2/\text{s deg}].$$

Podstawiając do wzoru (3.7) znane już wartości (3.5) i (3.1) znajdujemy

$$D_T = 7,63076 \cdot 10^{-13} \quad [\text{cm}^2/\text{s deg}]$$

oraz

$$\beta_0 = \frac{D_T}{D_c} = 1,03229 \cdot 10^{-5} \quad [\text{deg}^{-1}].$$

W celu wyznaczenia współczynnika  $\alpha_0$  określić najpierw musimy wielkość  $d$ . Wykorzystamy do tego celu przedstawienie podane przez PODSTRIGACZA [18]:

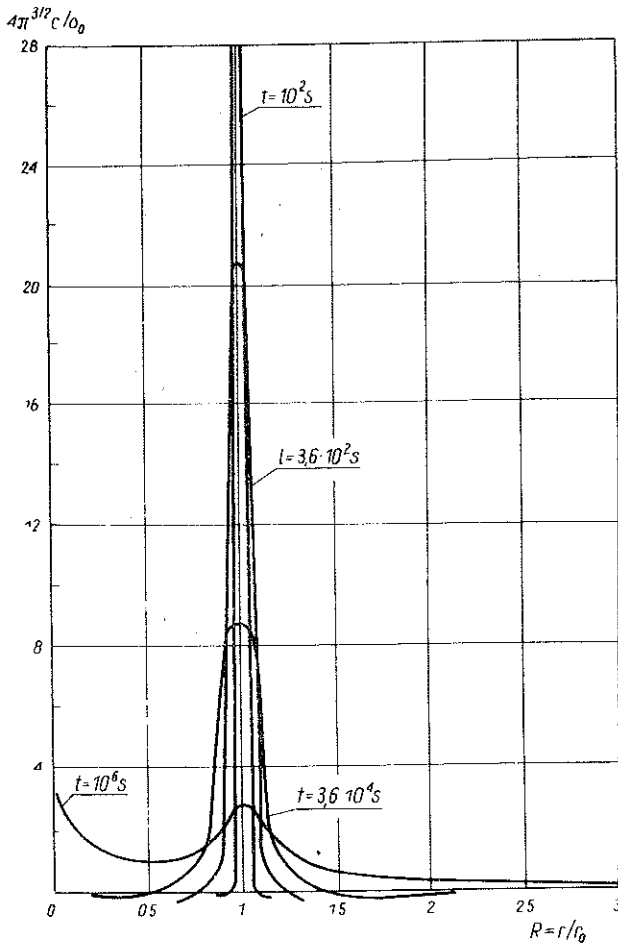
$$(3.8) \quad d = \frac{\alpha_c c_{a,c} - \alpha_s c_{s,c}}{\alpha_T}$$

Ponieważ założyliśmy, że rozważany proces jest quasi-statyczny, a zmiany powolne, więc ciepło właściwe mierzone przy stałej objętości i koncentracji możemy przyjąć za równe sobie. Podobnie przyjmiemy, że współczynniki rozszerzalności dyfuzyjnej i termicznej niewiele różnią się od siebie. Możemy więc przyjąć

$$d = 0,0069 \quad [\text{cal/cm}^3 \text{ deg}],$$

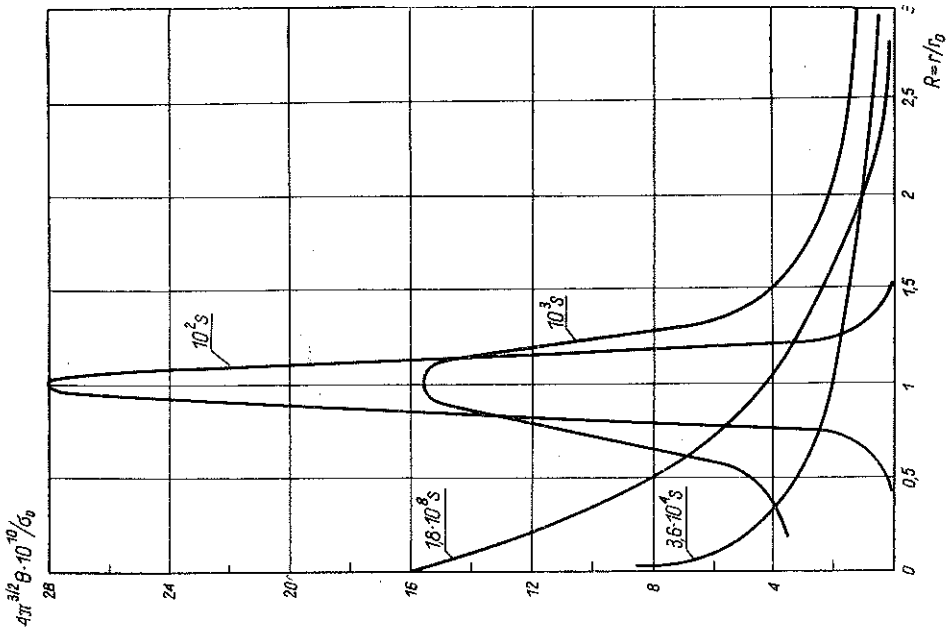
$$\alpha_0 = \frac{Td}{k} = 65,2724 \quad [\text{s deg/cm}^2].$$

Przytoczone powyżej dane pozwoliły wykonać na podstawie wzorów (2.9) i (2.10) obliczenia numeryczne, a na ich podstawie wykresy obrazujące charakter zmian

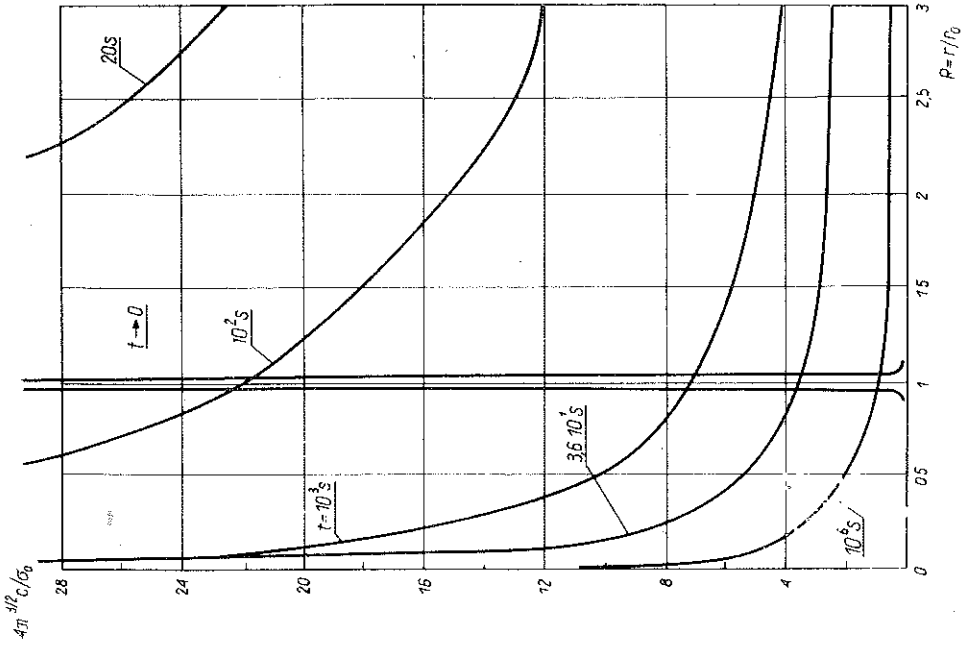


Rys. 2.





Rys. 4.



Rys. 3.

koncentracji i temperatury w czasie. Obliczenia numerycznie wykonano na maszynie cyfrowej ODRA-1204 przyjmując  $R=r/r_0$ ,  $r_0=1$ .

Omówimy krótko wnioski wypływające z uzyskanych w pracy rezultatów. I tak rys. 2 przedstawia zmiany koncentracji czynnika dyfundującego dla czasów od  $10^2$ s do  $10^6$ s przy różnych wartościach  $R$ . Zmiany rozkładu czynnika dyfundującego obliczone wg prawa Ficka (wzór (2.11)) pokazano na rys. 3. Różnice jakościowe i ilościowe są tutaj wyraźne. Interesujący jest fakt pojawienia się ujemnych wartości koncentracji w otoczeniu miejsca przyłożenia źródła dyfuzji. Wytlumaczyć to należy faktem, że rozważamy teoretyczny model źródła o charakterze funkcji Diraca. Stąd dla mniejszych czasów następuje w otoczeniu przyłożenia źródła spadek koncentracji poniżej poziomu koncentracji wstępnej  $c_0$  związany z nagłym wzrostem koncentracji w teoretycznym miejscu przyłożenia źródła. Zjawisko to przypuszczalnie nie wystąpi w przypadku działania źródła o charakterze np. stałym. Na rys. 4 pokazano rozkład temperatury w ośrodku wywołany działaniem źródła dyfuzji.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Y. ADDA, J. PHILIBERT, *La diffusion dans les solides*, 1-2, Presses Universitaires de France, Paris 1966.
2. B. S. BOKSZEIN, S. Z. BOKSZEIN, A. A. ŻUCHOWICKIJ, *Termodinamika i kinetika dyfuzji w twierdych telach*, Metał., Moskwa 1974.
3. J. CRANK, *The mathematics of diffusion*, Oxford 1970.
4. W. DUDZIAK, *Zagadnienia termodyfuzji w ośrodkach sprężystych*, Praca dokt. Politech. Pozn., 1975.
5. S. D. GIERCRIKEN, I. J. DIECHTJAR, *Dyfuzja w metalach i spawach w twierdziej fazie*, Fizmatgiz, 1960.
6. L. A. GIRIFALCO, *Wędrowka atomów w kryształach*, PWN, 1968.
7. K. P. GUROW, *Procesy wzajemnej dyfuzji w spawach*, Nauka, Moskwa 1973.
8. W. JOST, *Diffusion in solids, liquids, gases*, Academic Press, New York 1952.
9. I. I. IWANIENKO, A. SOKOŁOW, *Klasiczeskaja teoria pola*, Gos. Iz. Tech.-Teor. Lit., Moskwa 1951.
10. J. KACZYŃSKI, S. PROWANS, *Podstawy teoretyczne metaloznawstwa*, Wyd. Śląsk, Katowice 1972.
11. L. KALINOWSKI, *Fizyka metali*, PWN, Warszawa 1973.
12. M. A. KRISZTAŁ, *Mechanizm dyfuzji w żelaznych spawach*, Metał., 1972.
13. J. R. MANNING, *Diffusion kinetics for atoms in crystals*, Academic Press London 1968.
14. I. N. MILINSKAJA, I. A. TOMILIN, *Rastworcziwost azota w alfa żelazie*, Izdat. Ak. Nauk SSSR. Metały, 5, 1968.
15. W. NOWACKI, *Certain problems of thermodiffusion in solids*, Arch. Mech., 1971.
16. W. NOWACKI, *Termosprężystość*, Ossolineum 1972.
17. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. Stos., 13, 2, 1975.
18. J. S. PODSTRIGACZ, *Differencjalni urawnienia zadaczi termodyfuzji w twierdom deformirowanomu tele*, DAN URSR, 2, 1962.
19. J. S. PODSTRIGACZ, W. S. PAWLINA, *Osnownyje urawnienia płoskiej zadaczi termodyfuzji*, Prikl. Mech., 1, 1, 1965.
20. J. S. PODSTRIGACZ, W. S. PAWLINA, *Dyffuzjonnyje processy w uprugo-wiazkom deformirujemom tele*, Prikl. Mech., 10b, 5, 1974.
21. R. ROWLINGS, D. TAMBINI, *The deformation of the alpha phase boundaries of the iron-nitrogen system by Internal friction methods*, J. of the Iron and Steel Inst., 11, 1956.

22. I. M. RYŻIK, I. S. GRADSZTEIN, *Tablicy integralow, sum, riadow i proizwedenij*, Izd. Nauka, Moskwa 1971.
23. W. W. SEITH, *Diffusion in Metallen*, Springer, Berlin 1939.
24. P. G. SHEWMON, *Diffusion in solids*, Mc Graw-Hill Book Co Inc., New York, London 1963.
25. Ch. A. WERT, R. M. THOMSON, *Fizyka ciała stałego*, PWN, Warszawa 1974.
26. *Poradnik Inżyniera Mechanika*, 1, WNT, Warszawa 1968.

## Резюме

ВЛИЯНИЕ СОПРЯЖЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ И ДИФФУЗИИ НА  
 КОНЦЕНТРАЦИЮ ДИФФУНДИРУЮЩЕГО ФАКТОРА В СЛУЧАЕ ДЕЙСТВИЯ  
 МГНОВЕННОГО ИСТОЧНИКА ДИФФУЗИИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

В работе определяется распределение концентрации и температуры в неограниченном твердом теле, сопутствующее процессу термодиффузии. Этот процесс вызван действием мгновенного источника диффузии, приложенного к боковой поверхности бесконечного цилиндра радиуса  $r_0$ . Решаются сопряженные с собой уравнения теплопроводности и диффузии, используя для этой цели преобразования Лапласа и Ханкеля. Полученные результаты сравниваются с классическим решением несопряженного уравнения диффузии Фика. В числовом примере определяются значения коэффициентов термодиффузии и опираясь на них составлены графики распределения концентрации и температуры.

## SUMMARY

INFLUENCE OF COUPLING OF THERMAL AND DIFFUSION PHENOMENA UPON  
 THE DIFFUSING AGENT CONCENTRATION IN THE CASE OF AN INSTANTANEOUS  
 DIFFUSION SOURCE IN ELASTIC MEDIUM

The paper determines the distribution of concentration and temperature in an infinite solid due to the thermodiffusion process. The process is provoked by the action of an instantaneous diffusion source applied to the lateral surface of an infinite cylinder of radius  $r_0$ . The mutually coupled equations of heat flow and diffusion are solved by means of the Laplace and Hankel transforms, the results being compared with the classical solution of the uncoupled Fick diffusion equation. Thermodiffusion coefficients are numerically determined and the solutions are illustrated by graphs.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
 POLSKA AKADEMIA NAUK

i  
 INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ  
 POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 grudnia 1977 r.*