ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 27, 2, 277—284, 1979
Polska Akademia Nauk Instytut Podstawowych Problemów Techniki

ŚCISŁE RÓWNANIE AMPLITUDY FALI PRZYSPIESZENIA W OŚRODKU KONSOLIDUJĄCYM

RYSZARD DZIĘCIELAK (POZNAŃ)

W pracy rozpatrzono propagację fali przyspieszenia w ośrodku konsolidującym. Opierając się na warunkach zgodności drugiego rzędu otrzymano ścisłe równanie amplitudy. Wykorzystano je w przykładzie do wyznaczenia amplitudy fali płaskiej.

1. Wstęp

W pracy [3] rozpatrzono propagację fali przyspieszenia w ośrodku porowatym o sprężystym szkielecie nasyconym cieczą. Wykorzystano przy tym najprostsze warunki zgodności dotyczące skoków pierwszej pochodnej dowolnej funkcji na powierzchni nieciągłości $\mathscr{S}$. Tutaj posłużymy się warunkami zgodności drugiego rzędu dotyczącymi skoków drugich pochodnych dowolnej funkcji na powierzchni nieciągłości $\mathscr{S}$. Pozwoli to na otrzymanie ścisłego równania amplitudy fali przyspieszenia w ośrodku konsolidującym.

2. Warunki zgodności drugiego rzędu

Rozważmy ruchomą powierzchnię nieciągłości $\mathscr{S}$ o równaniach

$$X^\alpha = X^\alpha(M^K, t), \quad K=1,2, \quad \alpha=1,2,3. \tag{2.1}$$

Na powierzchni $\mathscr{S}$ krzywe M^K tworzą dwuwymiarowy układ współrzędnych. Tensor metryczny tego układu jest następujący:

$$a_{KL} = X^\alpha_{,K} X^\beta_{,L} g_{\alpha\beta}, \quad a_{KL} a^{RL} = \delta_K{}^R. \tag{2.2}$$

Tensor krzywizny powierzchni $\mathscr{S}$ zdefiniowany jest wzorem

$$b_{KL} = -N^\alpha_{,K} X^\beta_{,L} g_{\alpha\beta}, \tag{2.3}$$

gdzie N^α jest wektorem jednostkowym normalnym do powierzchni $\mathscr{S}$. Prędkość propagacji powierzchni $\mathscr{S}$ wynosi

$$U = N_\alpha X^\alpha_{,t}. \tag{2.4}$$

Niech H będzie dowolnym obszarem, w którym z założenia występuje skok na powierzchni nieciągłości $\mathscr{S}$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} &A = [\![H]\!], \quad B = [\![H_{,\alpha}]\!] N^\alpha, \quad C = [\![H_{,\alpha\beta}]\!] N^\alpha N^\beta, \\ &A_\alpha = [\![H_{,\alpha}]\!] = A_{,\alpha}, \quad B_\alpha = [\![H_{,\alpha\beta}]\!] N^\beta, \quad A' = [\![H_{,t}]\!], \quad B' = [\![H_{,\alpha t}]\!] N^\alpha. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Przy oznaczeniach (2.5) warunki zgodności geometrycznej [2 i 4] są następujące:

$$
\begin{aligned}
&[\![H_{,\alpha}]\!]=BN^{\alpha}+a^{KR}A_{,K}X^{\alpha}_{,R},\\
(2.6)\qquad &[\![H_{,\alpha\beta}]\!]=CN^{\alpha}N^{\beta}+a^{KM}(B_{,K}+A_{,S}a^{RS}b_{RK})(X^{\alpha}_{,M}N^{\beta}+X^{\beta}_{,M}N^{\alpha})+\\
&\qquad +a^{KM}a^{RS}X^{\beta}_{,M}X^{\alpha}_{,S}(A|_{KR}-Bb_{KR}).
\end{aligned}
$$

Kinematyczne warunki zgodności [2 i 4] mają postać

$$
\begin{aligned}
&[\![H_{,t}]\!]=-UB+\frac{\delta A}{\delta t},\\
(2.7)\qquad &[\![H_{,tt}]\!]=-U\left(-CU+\frac{\delta B}{\delta t}+a^{RS}A_{,R}U_{,S}\right)+\frac{\delta A'}{\delta t},\\
&[\![H_{,\alpha t}]\!]=\left(-CU+\frac{\delta B}{\delta t}+a^{RS}A_{,R}U_{,S}\right)N_{\alpha}+a^{RS}A'_{,R}X^{\alpha}_{,S}.
\end{aligned}
$$

We wzorze $(2.6)_2$ $A|_{KR}$ oznacza różniczkowanie kowariantne. We wzorach (2.7)

$$
(2.8)\qquad \frac{\delta H}{\delta t}=-H_{,K}a^{KM}g_{\alpha\beta}X^{\alpha}_{,M}X^{\beta}_{,t}+H_{,t}
$$

jest pochodną przemieszczeniową [2 i 4].

3. Równania ruchu ośrodka konsolidującego

Podane przez Biota [1] równania ruchu ośrodka konsolidującego są szczególnym przypadkiem równań

$$
(3.1)\qquad
\begin{aligned}
&A^{\alpha\beta}_{ij}u^{j}_{,\alpha\beta}+B^{\alpha\beta}_{ij}U^{j}_{,\alpha\beta}=\rho_{11}\ddot{u}_i+\rho_{12}\ddot{U}_i+b(\dot{u}_i-\dot{U}_i),\\
&B^{\alpha\beta}_{ij}u^{j}_{,\alpha\beta}+C^{\alpha\beta}_{ij}U^{j}_{,\alpha\beta}=\rho_{12}\ddot{u}_i+\rho_{22}\ddot{U}_i-b(\dot{u}_i-\dot{U}_i),
\end{aligned}
$$

w których funkcje materiałowe są następujące:

$$
(3.2)\qquad
\begin{aligned}
&A^{\alpha\beta}_{ij}=Ng_{ij}g^{\alpha\beta}+(A+N)\delta^{\alpha}_{i}\delta^{\beta}_{j},\\
&B^{\alpha\beta}_{ij}=Q\delta^{\alpha}_{i}\delta^{\beta}_{j},\qquad C^{\alpha\beta}_{ij}=R\delta^{\alpha}_{i}\delta^{\beta}_{j},
\end{aligned}
$$

przy czym $A^{\alpha\beta}_{ij}=A^{\beta\alpha}_{ji}$, $B^{\alpha\beta}_{ij}=B^{\beta\alpha}_{ji}$, $C^{\alpha\beta}_{ij}=C^{\beta\alpha}_{ji}$; A, N, Q, R są stałymi ośrodka. W równaniach (3.1) u_i i U_i są współrzędnymi wektorów przemieszczenia odpowiednio szkieletu i cieczy, b związane jest ze współczynnikiem przepuszczalności k i porowatością f ośrodka zależnością $b=\mu f^2/k$, w której μ jest lepkością cieczy; ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} są współczynnikami dynamicznymi, których dyskusję i interpretację znaleźć można w pracy [1]; współczynniki te spełniają nierówności

$$
(3.3)\qquad \rho_{11}>0,\quad \rho_{12}\leqslant 0,\quad \rho_{22}>0,\quad \rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}>0.
$$

4. Fala przyspieszenia

Rozpatrujemy przypadek propagacji w ośrodku konsolidującym powierzchni nieciągłości $\mathscr{S}$, na której funkcje

$$u^i(X^\alpha, t), \quad \frac{\partial u^i(X^\alpha, t)}{\partial X^\alpha}, \quad \frac{\partial u^i(X^\alpha, t)}{\partial t}, \quad U^i(X^\alpha, t), \quad \frac{\partial U^i(X^\alpha, t)}{\partial X^\alpha}, \quad \frac{\partial U^i(X^\alpha, t)}{\partial t}$$

są ciągłe, a nieciągłe są ich drugie i wyższe pochodne. Mamy zatem do czynienia z falą przyspieszenia. Ze względu na wygodę, rozważania prowadzić będziemy w kartezjańskim układzie współrzędnych. W pracy [3] otrzymano warunki propagacji fali przyspieszenia w postaci

$$\begin{aligned}(A^{\alpha\beta}_{ij} N_\alpha N_\beta - \rho_{11} U^2 \delta_{ij}) s^j + (B^{\alpha\beta}_{ij} N_\alpha N_\beta - \rho_{12} U^2 \delta_{ij}) S^j = 0,\\ (B^{\alpha\beta}_{ij} N_\alpha N_\beta - \rho_{12} U^2 \delta_{ij}) s^j + (C^{\alpha\beta}_{ij} N_\alpha N_\beta - \rho_{22} U^2 \delta_{ij}) S^j = 0,\end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie przez s^j i S^j oznaczono rzeczywiste amplitudy odpowiednio szkieletu i cieczy — w odróżnieniu od wprowadzonych w pracy [3] a^j i A^j, które były dowolnymi ustalonymi wektorami kolinearnymi z s^j i S^j.

Z warunków zgodności pierwszego rzędu mamy

$$\begin{aligned}&[\![u^i_{,\alpha\beta}]\!] = s^i N_\alpha N_\beta, && [\![U^i_{,\alpha\beta}]\!] = S^i N_\alpha N_\beta,\\ &[\![u^i_{,\alpha t}]\!] = -Us^i N_\alpha, && [\![U^i_{,\alpha t}]\!] = -US^i N_\alpha,\\ &[\![u^i_{,tt}]\!] = U^2 s^i, && [\![U^i_{,tt}]\!] = U^2 S^i.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Weźmy pod uwagę $H = u^i_{,t}$ i $\bar{H} = U^i_{,t}$. Zgodnie z oznaczeniami (2.5) odpowiednie parametry są następujące:

$$\begin{aligned}&[\![u^i_{,t}]\!] = 0, && [\![U^i_{,t}]\!] = 0,\\ &A^i_\alpha = [\![u^i_{,t\alpha}]\!] = -Us^i N_\alpha, && \bar{A}^i_\alpha = [\![U^i_{,t\alpha}]\!] = -US^i N_\alpha,\\ &A'^i = [\![u^i_{,tt}]\!] = U^2 s^i, && \bar{A}'^i = [\![U^i_{,tt}]\!] = U^2 S^i,\\ &B^i = [\![u_{,t\alpha}]\!] N^\alpha = -Us^i, && \bar{B}^i = [\![U^i_{,t\alpha}]\!] N^\alpha = -US^i,\\ &C^i = [\![u^i_{,t\alpha\beta}]\!] N^\alpha N^\beta, && \bar{C}^i = [\![U^i_{,t\alpha\beta}]\!] N^\alpha N^\beta.\end{aligned}$$

Pozostałe wielkości (2.5) nie mogą być wyrażone przez amplitudy s^i i S^i.

Podstawiając A^i_α, A'^i, B^i do warunków zgodności drugiego rzędu $(2.6)_2$ i $(2.7)_2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&[\![u^i_{,t\alpha\beta}]\!] = C^i N^\alpha N^\beta - a^{KM}(X^\alpha_{,M} N^\beta + X^\beta_{,M} N^\alpha)(s^i U)_{,K} +\\ &\qquad + a^{KM} a^{RS} X^\beta_{,M} X^\alpha_{,S} b_{KR} Us^i,\\ &[\![u^i_{,ttt}]\!] = U^2 C^i + 2U^2 \frac{\delta}{\delta t} s^i + 3Us^i \frac{\delta}{\delta t} U,\\ &[\![U^i_{,t\alpha\beta}]\!] = \bar{C}^i N^\alpha N^\beta - a^{KM}(X^\alpha_{,M} N^\beta + X^\beta_{,M} N^\alpha)(S^i U)_{,K} +\\ &\qquad + a^{KM} a^{RS} X^\beta_{,M} X^\alpha_{,S} b_{KR} US^i,\\ &[\![U^i_{,ttt}]\!] = U^2 \bar{C}^i + 2U^2 \frac{\delta}{\delta t} S^i + 3US^i \frac{\delta}{\delta t} U.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Po zróżniczkowaniu równań ruchu (3.1) cząstkowo względem czasu t mamy

$$
(4.4)\quad
\begin{aligned}
&A^{\alpha\beta}_{ij}u^j_{,\alpha\beta t}+(A'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}u^k_{,\gamma t}+A''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}U^k_{,\gamma t})u^j_{,\alpha\beta}+B^{\alpha\beta}_{ij}U^j_{,\alpha\beta t}+(B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}u^k_{,\gamma t}+\\
&\qquad+B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}U^k_{,\gamma t})U^j_{,\alpha\beta}=\rho_{11}u_{i,ttt}+\rho_{12}U_{i,ttt}+b(u_{i,tt}-U_{i,tt}),\\
&B^{\alpha\beta}_{ij}u^j_{,\alpha\beta t}+(B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}u^k_{,\gamma t}+B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}U^k_{,\gamma t})u^j_{,\alpha\beta}+C^{\alpha\beta}_{ij}U^j_{,\alpha\beta t}+(C'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}u^k_{,\gamma t}+\\
&\qquad+C''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}U^k_{,\gamma t})U^j_{,\alpha\beta}=\rho_{12}u_{i,ttt}+\rho_{22}U_{i,ttt}-b(u_{i,tt}-U_{i,tt}).
\end{aligned}
$$

W równaniach (4.4) wielkości

$$
A'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}=\frac{\partial^3 W}{\partial u^i_\alpha\,\partial u^j_\beta\,\partial u^k_\gamma},\qquad A''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}=\frac{\partial^3 W}{\partial u^i_\alpha\,\partial u^j_\beta\,\partial U^k_\gamma},
$$

$$
B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}=\frac{\partial^3 W}{\partial u^i_\alpha\,\partial U^j_\beta\,\partial u^k_\gamma},\qquad B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}=\frac{\partial^3 W}{\partial u^i_\alpha\,\partial U^j_\beta\,\partial U^k_\gamma},
$$

$$
C'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}=\frac{\partial^3 W}{\partial U^i_\alpha\,\partial U^j_\beta\,\partial u^k_\gamma},\qquad C''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}=\frac{\partial^3 W}{\partial U^i_\alpha\,\partial U^j_\beta\,\partial U^k_\gamma}
$$

są funkcjami materiałowymi drugiego rzędu, o których zakładamy, że są ciągłe na powierzchni $\mathscr{S}$: $W(u^i_\alpha, U^j_\beta)$ jest potencjałem. Równania (4.4) spełnione są po obu stronach powierzchni nieciągłości $\mathscr{S}$. Ponieważ funkcje materiałowe są ciągłe. przeto

$$
(4.5)\quad
\begin{aligned}
&A^{\alpha\beta}_{ij}[\![u^j_{,\alpha\beta t}]\!]+A'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[\![u^k_{,\gamma t}u^j_{,\alpha\beta}]\!]+A''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[\![U^k_{,\gamma t}u^j_{,\alpha\beta}]\!]+B^{\alpha\beta}_{ij}[\![U^j_{,\alpha\beta t}]\!]+\\
&\qquad+B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[\![u^k_{,\gamma t}U^j_{,\alpha\beta}]\!]+B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[\![U^k_{,\gamma t}U^j_{,\alpha\beta}]\!]=\rho_{11}[\![u_{i,ttt}]\!]+\rho_{12}[\![U_{i,ttt}]\!]+\\
&\qquad+b([\![u_{i,tt}]\!]-[\![U_{i,tt}]\!]),\\
&B^{\alpha\beta}_{ij}[\![u^j_{,\alpha\beta t}]\!]+B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[\![u^k_{,\gamma t}u^j_{,\alpha\beta}]\!]+B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[\![U^k_{,\gamma t}u^j_{,\alpha\beta}]\!]+C^{\alpha\beta}_{ij}[\![U^j_{,\alpha\beta t}]\!]+C'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[\![u^k_{,\gamma t}U^j_{,\alpha\beta}]\!]+\\
&\qquad+C''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[\![U^k_{,\gamma t}U^j_{,\alpha\beta}]\!]=\rho_{12}[\![u_{i,ttt}]\!]+\rho_{22}[\![U_{i,ttt}]\!]-b([\![u_{i,tt}]\!]-[\![U_{i,tt}]\!]).
\end{aligned}
$$

Podstawiając do układu równań (4.5) wyrażenia na skoki pochodnych i uwzględniając wzór

$$
[\![\Phi\Psi]\!]=-[\![\Phi]\!]\,[\![\Psi]\!]+[\![\Phi]\!]\overset{F}{\Psi}+[\![\Psi]\!]\overset{F}{\Phi},
$$

(indeksem F oznaczono wartości funkcji przed powierzchnią nieciągłości), otrzymujemy układ równań określony amplitudami fal:

$$
(4.6)\quad
\begin{aligned}
&A^{\alpha\beta}_{ij}[C^jN_\alpha N_\beta-a^{KM}(X^\alpha_{,M}N^\beta+X^\beta_{,M}N^\alpha)(s^jU)_{,K}+a^{KM}a^{RS}X^\beta_{,M}X^\alpha_{,S}b_{KR}Us^j]+\\
&\qquad+A'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[(\overset{F}{u}{}^j_{,\alpha\beta}+s^jN_\alpha N_\beta)(\overset{F}{u}{}^k_{,\gamma t}-Us^kN_\gamma)-\overset{F}{u}{}^j_{,\alpha\beta}\overset{F}{u}{}^k_{,\gamma t}]+\\
&\qquad+A''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[(\overset{F}{u}{}^j_{,\alpha\beta}+s^jN_\alpha N_\beta)(\overset{F}{U}{}^k_{,\gamma t}-US^kN_\gamma)-\overset{F}{u}{}^j_{,\alpha\beta}\overset{F}{U}{}^k_{,\gamma t}]+\\
&+B^{\alpha\beta}_{ij}[\bar{C}^jN_\alpha N_\beta-a^{KM}(X^\alpha_{,M}N^\beta+X^\beta_{,M}N^\alpha)(S^jU)_{,K}+a^{KM}a^{RS}X^\beta_{,M}X^\alpha_{,S}b_{KR}US^j]+\\
&\qquad+B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}[(\overset{F}{U}{}^j_{,\alpha\beta}+S^jN_\alpha N_\beta)(\overset{F}{u}{}^k_{,\gamma t}-Us^kN_\gamma)-\overset{F}{U}{}^j_{,\alpha\beta}\overset{F}{u}{}^k_{,\gamma t}]+
\end{aligned}
$$

(4.6) [cd.]
$$+B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,[(\overset{F}{U}{}^j_{,\alpha\beta}+S^j N_\alpha N_\beta)\,(\overset{F}{U}{}^k_{,\gamma t}-US^k N_\gamma)-\overset{F}{U}{}^j_{,\alpha\beta}\,\overset{F}{U}{}^k_{,\gamma t}]=$$
$$=\rho_{11}\left(U^2 C^i+2U^2\frac{\delta}{\delta t}s^i+3Us^i\frac{\delta}{\delta t}U\right)+$$
$$+\rho_{12}\left(U^2\bar{C}^i+2U^2\frac{\delta}{\delta t}S^i+3US^i\frac{\delta}{\delta t}U\right)+b(s^i-S^i)\,U^2\,;$$

(4.7)
$$B^{\alpha\beta}_{ij}\,[C^j N_\alpha N_\beta-a^{KM}\,(X^\alpha_{,M}N^\beta+X^\beta_{,M}N^\alpha)\,(s^jU)_{,K}+a^{KM}a^{RS}X^\beta_{,M}X^\alpha_{,S}b_{KR}\,Us^j]+$$
$$+B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,[(\overset{F}{u}{}^j_{,\alpha\beta}+s^j N_\alpha N_\beta)\,(\overset{F}{u}{}^k_{,\gamma t}-Us^k N_\gamma)-\overset{F}{u}{}^j_{,\alpha\beta}\,\overset{F}{u}{}^k_{,\gamma t}]+$$
$$+B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,[(\overset{F}{u}{}^j_{,\alpha\beta}+s^j N_\alpha N_\beta)\,(\overset{F}{U}{}^k_{,\gamma t}-US^k N_\gamma)-\overset{F}{u}{}^j_{,\alpha\beta}\,\overset{F}{U}{}^k_{,\gamma t}]+$$
$$+C^{\alpha\beta}_{ij}\,[\bar{C}^j N_\alpha N_\beta-a^{KM}\,(X^\alpha_{,M}N^\beta+X^\beta_{,M}N^\alpha)\,(S^jU)_{,K}+a^{KM}a^{RS}X^\beta_{,M}X^\alpha_{,S}b_{KR}\,US^j]+$$
$$+C'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,[(\overset{F}{U}{}^j_{,\alpha\beta}+S^j N_\alpha N_\beta)\,(\overset{F}{u}{}^k_{,\gamma t}-Us^k N_\gamma)-\overset{F}{U}{}^j_{,\alpha\beta}\,\overset{F}{u}{}^k_{,\gamma t}]+$$
$$+C''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,[(\overset{F}{U}{}^j_{,\alpha\beta}+S^j N_\alpha N_\beta)\,(\overset{F}{U}{}^k_{,\gamma t}-US^k N_\gamma)-\overset{F}{U}{}^j_{,\alpha\beta}\,\overset{F}{U}{}^k_{,\gamma t}]=$$
$$=\rho_{12}\left(U^2 C^i+2U^2\frac{\delta}{\delta t}s^i+3Us^i\frac{\delta}{\delta t}U\right)+$$
$$+\rho_{22}\left(U^2\bar{C}^i+2U^2\frac{\delta}{\delta t}S^i+3US^i\frac{\delta}{\delta t}U\right)-b(s^i-S^i)\,U^2\,.$$

Z warunków propagacji (4.1) wynika, że rzeczywiste amplitudy można przedstawić następująco:

(4.8)
$$s^i=\kappa a^i\,,\qquad S^i=\kappa A^i\,,$$

gdzie κ jest skalarowym parametrem; na ogół $\kappa=\kappa\,(X^\alpha, t)$. Po pomnożeniu równania (4.6) przez s^i, (4.7) przez S^i, dodaniu stronami, uwzględnieniu wzorów (4.8) i warunków propagacji, otrzymujemy równanie

(4.9)
$$\varphi^{\alpha\beta}a^{KM}(X^\alpha_{,M}N^\beta+X^\beta_{,M}N^\alpha)\,(\kappa U)_{,K}+(\alpha-\mu)\kappa+$$
$$+\beta\kappa^2=-C_\rho\,U\left(2U\frac{\delta\kappa}{\delta t}+3\kappa\,\frac{\delta U}{\delta t}\right),$$

w którym wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\varphi^{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta}_{ij}\,a^i a^j+B^{\alpha\beta}_{ij}\,(a^iA^j+a^jA^i)+C^{\alpha\beta}_{ij}\,A^iA^j\,,$$
$$\alpha=bU^2\,(a^i-A^i)\,(a^i-A^i)\,,$$

(4.10)
$$\beta=\{[A'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,a^i a^j+B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,(a^iA^j+a^jA^i)+C'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,A^iA^j]\,a^k+$$
$$+[A''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,a^i a^j+B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,(a^iA^j+a^jA^i)+C''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}A^iA^j]A^k\}\,N_\alpha N_\beta N_\gamma\,,$$
$$\mu=[A'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,a^i a^j+B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,(A^ia^j+A^ja^i)+C'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}A^iA^j]\,N_\alpha N_\beta\,\overset{F}{u}{}^k_{,\gamma t}+$$
$$+[A''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,a^i a^j+B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,(A^ia^j+A^ja^i)+C''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\,A^iA^j]\,N_\alpha N_\beta\,\overset{F}{U}{}^k_{,\gamma t}-$$

$$-[(A'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\, a^i a^j + A''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\, a^i A^j + B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk} A^i a^j + B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\, A^i A^j)\overset{F}{u}{}^j_{,\alpha\beta} +$$
$$+(B'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\, a^i a^j + B''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk}\, a^i A^j + C'^{\alpha\beta\gamma}_{ijk} A^i a^j + C''^{\alpha\beta\gamma}_{ijk} A^i A^j)\overset{F}{U}{}^j_{,\alpha\beta}]\, U \delta^k_j N_\gamma +$$
$$+\varphi^{\alpha\beta} a^{KM} a^{RS} X^\beta_{,M} X^\alpha_{,S}\, b_{KR}\, U .$$

$$C_\rho = \rho_{11}\, a^i a^i + 2\rho_{12}\, a^i A^i + \rho_{22} A^i A^i . \tag{4.11}$$

Równanie (4.9) jest nieliniowym równaniem różniczkowym określającym skalar κ; parametr ten pozwala na znalezienie rzeczywistych amplitud zgodnie ze wzorami (4.8).

5. Amplituda fali płaskiej

Załóżmy, że w ośrodku propaguje się fala płaska. Układy odniesienia $\{x^i\}$ i $\{X^\alpha\}$ są pokrywającymi się układami kartezjańskimi. Powierzchnia nieciągłości $\mathscr{S}$ jest powierzchnią X^1=const. Ponieważ front fali jest płaszczyzną, mamy więc $N_\alpha = N^\alpha = (1, 0, 0)$. Równania powierzchni nieciągłości $\mathscr{S}$ [4] są następujące:

$$t = \frac{1}{U} X^1, \qquad \Psi(X^\alpha) = \frac{1}{U} X^1, \qquad \Phi(X^\alpha, t) = \frac{1}{U} X^1 - t \tag{5.1}$$

albo po parametryzacji powierzchni

$$X^1 = Ut, \qquad X^2 = M^1, \qquad X^3 = M^2 . \tag{5.2}$$

W rozważanym przypadku tensor akustyczny

$$\begin{bmatrix} A^{11}_{ij} & B^{11}_{ij} \\ B^{11}_{ij} & C^{11}_{ij} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

ma wektory własne a^j i A^j, którym odpowiada sześć rzeczywistych kwadratów prędkości propagacji (szczegóły w pracy [3]). Ponieważ tensor akustyczny jest niezależny od X^α i t, przeto prędkości propagacji U również są niezależne od X^α i t.

Zgodnie z (5.2) pochodne mają postać

$$X^\alpha_{,K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{5.4}$$

Tensor metryczny (2.2) układu współrzędnych M^K jest następujący:

$$a_{KL} = a^{KL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{5.5}$$

Po uwzględnieniu, że $(\kappa U)_{,K} = 0$ (κ i U nie zależą od parametrów powierzchniowych M^K) $\overset{F}{u}{}^k_{,\gamma t} = \overset{F}{U}{}^k_{,\gamma t} = \overset{F}{u}{}^j_{,\alpha\beta} = \overset{F}{U}{}^j_{,\alpha\beta} = 0$ (obszar przed powierzchnią nieciągłości jest niezaburzony), $b_{KR} = 0$ (powierzchnia nieciągłości $\mathscr{S}$ jest płaska),

$$\frac{\delta\kappa}{\delta t} = \kappa_{,1}\, U \tag{5.6}$$

i wprowadzeniu oznaczeń

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{U}, \qquad \bar{\beta} = \frac{\beta}{U}, \tag{5.7}$$

równanie (4.9) przedstawimy w postaci

$$2C_p U^2 \frac{d\kappa}{dX^1} = -\bar{\beta}\kappa^2 - \bar{\alpha}\kappa. \tag{5.8}$$

Rozwiązaniem równania (5.8) jest funkcja

$$\kappa = \frac{\bar{\alpha}}{C_0 e^{\bar{\alpha}X^1/2C_p U^2} - \bar{\beta}}, \tag{5.9}$$

przy czym C_0 jest stałym parametrem. Zależnie od tego, czy C_0 i $\bar{\beta}$ mają znaki jednakowe czy różne, amplitudy fali mogą zmierzać do nieskończoności dla skończonych wartości X^1 lub do zera dla X^1 dążącego do nieskończoności. Dla $\bar{\beta}=0$ otrzymujemy

$$\kappa = \frac{\bar{\alpha}}{C_0} e^{-\bar{\alpha}X^1/2C_p U^2}. \tag{5.10}$$

Jeżeli do wzoru (5.10) wprowadzimy stałą $C=\bar{\alpha}/C_0$ i uwzględnimy związek [3]

$$2C_p U = C_r \tag{5.11}$$

oraz oznaczenia $(5.7)_1$, to znajdziemy

$$\kappa = Ce^{-b(a^1-A^1)^2 X^1/C_r}, \tag{5.12}$$

co zgadza się z wynikiem otrzymanym w pracy [3] przy wykorzystaniu warunków zgodności pierwszego rzędu. Przy braku ruchu względnego cieczy i szkieletu $(a^1-A^1=0)$ lub w przypadku cieczy nielepkiej $(b=0)$ mamy $\kappa=C$, jak dla jednofazowego ośrodka sprężystego.

Wzór (5.9) nie pozwala na otrzymanie współczynnika κ dla ośrodka sprężystego jednofazowego. Formalne przyjęcie $\bar{\alpha}=0$ daje $\kappa=0$ dla skończonych wartości X^1, co jest sprzeczne z założeniem, że w ośrodku propaguje się fala. Dla $\bar{\alpha}=0$ należy oddzielnie wyznaczyć κ z równania

$$\frac{d\kappa}{dX^1} = -\frac{\bar{\beta}}{2C_p U^2}\kappa^2, \tag{5.13}$$

którego rozwiązanie ma postać

$$\kappa = \frac{1}{\dfrac{\bar{\beta}X^1}{2C_p U^2} + C_1}. \tag{5.14}$$

Wartość $1/C_1$ jest amplitudą początkową fali przyspieszenia w ośrodku liniowo sprężystym (na płaszczyźnie $X^1=0$). Przy pominięciu efektów drugiego rzędu $(\bar{\beta}=0)$ otrzymujemy dla ośrodka liniowo sprężystego $\kappa=\text{const}$.

Literatura cytowana w tekście

1. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid*, J. Acoust. Soc. Am., **28**, 2, 168–191, 1956.
2. P. J. Chen, *Selected topics in wave propagation*, Noordhof International Publishing, Leyden 1976.
3. R. Dzięcielak, *Fala przyspieszenia w ośrodku konsolidującym*, Rozpr. Inżyn., **26**, 2, 1978.
4. Z. Wesołowski, *Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości*, PWN, Warszawa 1974.

Резюме

ТОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ВОЛНЫ УСКОРЕНИЯ В КОНСОЛИДИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

В работе рассмотрено распространение волны ускорения в консолидирующей среде. Опираясь на условиях совместности второго порядка получено точное уравнение амплитуды. Оно использовано в примере для определения амплитуды плоской волны.

Summary

EXACT EQUATION FOR THE ACCELERATION WAVE AMPLITUDE IN A CONSOLIDATING MEDIUM

Propagation of an acceleration wave in a consolidating medium is considered. The exact equation oi the amplitude is obtained on the basis of the second order compatibility conditions; it is applied to the example concerning plane wave amplitudes.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 października 1977 r.