

WŁASNOŚCI MECHANICZNE POŁĄCZENIA STYKOWEGO*)

ANDRZEJ G A W Ę C K I (POZNAŃ)

Praca zawiera analizę kinematyczną i statyczną układu dwóch ciał idealnie sztywnych, połączonych cięgnami sprężysto-plastycznymi. Przyjęto, że cięgna mają ograniczoną wydłużalność. Umożliwiło to w szczególności opis sprężysto-kruchego zachowania się połączenia.

Wyznaczono obszary sprężyste, sprężysto-plastyczne i plastyczne w przestrzeni uogólnionych przemieszczeń i sił. Pokazano, że obszar sprężysty (tj. obszar pierwszego uplastycznienia łączników) w przestrzeni sił może być wklęsły, a w pewnych okolicznościach połączenie zachowuje się nieliniowo-sprężyste (ściślej mówiąc odcinkowo-liniowo-sprężyste). Stwierdzono, że wstępne sprężenie wywołuje jakościowe zmiany cech mechanicznych połączenia.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

σ	naprężenie normalne
ε	wydłużenie jednostkowe
E	moduł Younga
λ	wydłużenie osi połączenia
φ	kąt wzajemnego obrotu elementów łączonych
x, x'	odległości osi połączenia od krawędzi elementu łączonego
A_i	pole powierzchni przekroju łącznika
h_i, h'_i	odległości łącznika od krawędzi elementu łączonego
l_i	długość łącznika
P_i	siła przenoszona przez łącznik
R, R'	reakcje skupione na krawędziach elementu łączonego
n	całkowita liczba łączników
m	liczba łączników pracujących sprężyste
k	liczba łączników uplastycznionych.

Kreska nad symbolem oznacza wielkość bezwymiarową, natomiast gwiazdka dotyczy wielkości pochodzących od wstępnego sprężenia.

1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach obserwujemy wyraźny wzrost zainteresowania problematyką połączeń elementów konstrukcji [np 1, 2, 3 i 4]. Spowodowane jest to kilkoma przyczynami. Do najważniejszych z nich zalicza się duży udział kosztu połączeń w ogólnym koszcie konstrukcji. Udział ten w stalowych konstrukcjach ramowych może dochodzić nawet do 30% [5]. Aktualność tematyki połączeń wiąże się również

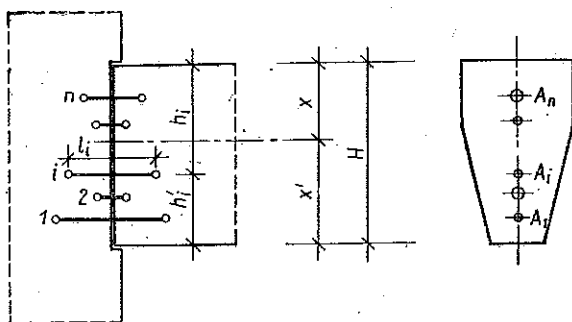
*) Pracę wykonano w ramach problemu węzłowego 05.12., koordynowanego przez IPPT PAN.

z coraz szerszym wprowadzeniem systemów konstrukcyjnych, prefabrykacji i standaryzacji. Dzięki rozwojowi nowych technik obliczeniowych obserwujemy jednocześnie dążenie do coraz lepszego poznania zachowania się realnych konstrukcji, poszukiwanie rezerw nośności, odejście od powszechnie stosowanych uproszczeń przy doborze schematów statycznych konstrukcji i układów obciążeń. Do praktyki projektowej w naszym kraju przenikają stopniowo rezultaty prac z zakresu teorii nośności granicznej, przystosowania, stateczności plastycznej, mechaniki układu «konstrukcja-fundament-podłoże». Wśród tych nowych problemów pojawia się również zagadnienie wpływu liczby, umiejscowienia i charakterystyki fizycznej połączeń (lub podpór) na przebieg sił wewnętrznych i sztywność konstrukcji. Na rozwiązania teoretyczne i weryfikację doświadczalną oczekują więc m.in. problemy statyki, kinematyki, nośności i przystosowań połączeń.

Celem niniejszej pracy jest określenie charakterystycznych cech mechanicznych pewnego modelu połączenia (tzw. styku doczołowego) oraz określenie wpływu poszczególnych parametrów na jego wytrzymałość i sztywność.

2. ZAŁOŻENIA

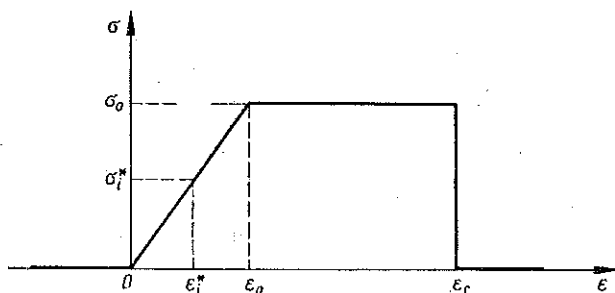
Model rozważanego połączenia przedstawia rys. 1. Przyjęto, że części łączone są idealnie sztywne i mają nieograniczoną wytrzymałość, a płaszczyzna kontaktu tych części przenosi tylko siły ściskające. Przemieszczenia prostopadłe do osi połączenia są zawsze równe zero, natomiast siły poprzeczne przenoszone są w całości przez występy uformowane w jednej z części łączonych. Ponieważ rozpatrywane zadanie jest płaskie, analizować będziemy jedynie dwie wielkości kinematyczne oraz dwie wielkości statyczne, mianowicie wydłużenie osi połączenia λ i kąt wzajemnego obrotu części łączonych φ oraz siłę normalną N i moment zginający M .



Rys. 1

Każdy z łączników ma tę samą charakterystykę fizyczną, określoną zależnością $\sigma = \sigma(\epsilon)$. Zależność tę ilustruje rys. 2. Łączniki przenoszą tylko siły rozciągające i odpowiadają modelowi sprężysto-plastycznemu z ograniczoną wydłużalnością przy zerwaniu. Długości łączników l_i ($i=1, 2, \dots, n$) oraz pola powierzchni przekroju

A_i dla każdego poziomu i mogą być dowolne. Poszczególne łączniki charakteryzują się w ogólności innym naprężeniem wstępnym σ_i^* , odpowiadającym odkształceniu $\varepsilon_i^* \leq \varepsilon_0$.



Rys. 2

Naprężenia normalne w łącznikach określamy więc ze wzoru

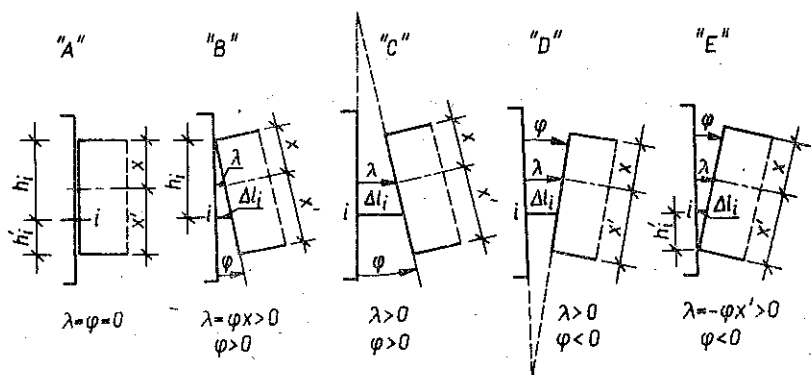
$$(2.1) \quad \sigma_i(\varepsilon_i) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \varepsilon_i < 0, \\ E\varepsilon_i, & \text{jeśli } 0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_0, \\ \sigma_0, & \text{jeśli } \varepsilon_0 \leq \varepsilon_i < \varepsilon_r, \\ 0, & \text{jeśli } \varepsilon_i > \varepsilon_r, \end{cases}$$

gdzie E oznacza moduł Younga, σ_0 granicę plastyczności, ε_0 odkształcenie odpowiadające początkowi uplastycznienia, a ε_r odkształcenie graniczne przy zerwaniu łączników.

Całość rozważań przeprowadzimy w zakresie małych przemieszczeń.

3. RÓWNANIA GEOMETRYCZNE. CHARAKTERYSTYKA KINEMATYCZNA POŁĄCZENIA

Równania geometryczne przedstawiają zależności między odkształceniami poszczególnych łączników a przemieszczeniami λ i φ . W rozważanym zadaniu mogą wystąpić mechanizmy przedstawione na rys. 3.



Rys. 3

Z założenia idealnej sztywności części łączonych wynika zasada płaskiego przekroju. Zasada ta pozwala na drodze elementarnych rozważań geometrycznych obliczyć odkształcenie i -tego łącznika we wszystkich mechanizmach:

$$(3.1) \quad \varepsilon_i(\lambda, \varphi) = \varepsilon_i^* + \frac{1}{l_i} \lambda + \frac{h_i - x}{l_i} \varphi,$$

przy czym

$$(3.2) \quad -\frac{\lambda}{x'} \leq \varphi \leq \frac{\lambda}{x}.$$

Równania geometryczne (3.1) oraz ograniczenia (3.2) wygodnie będzie napisać w postaci bezwymiarowej:

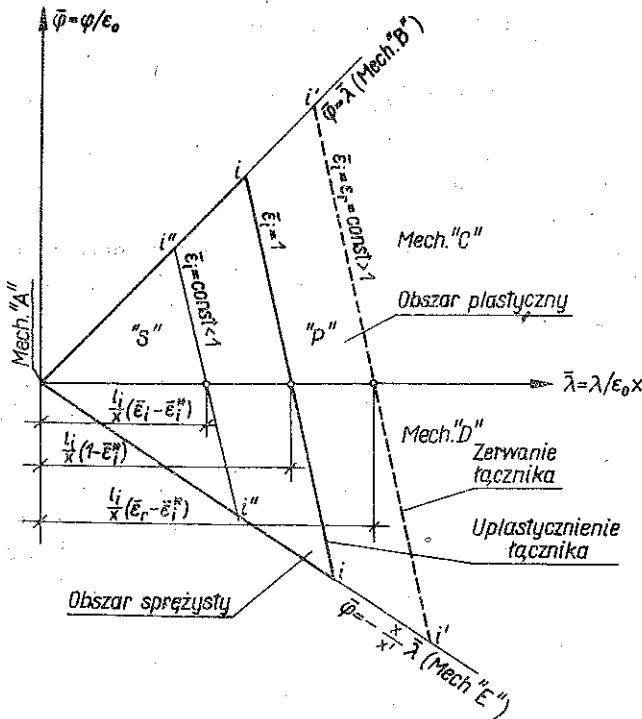
$$(3.3) \quad \bar{\varepsilon}_i(\bar{\lambda}, \bar{\varphi}) = \bar{\varepsilon}_i^* + \frac{x}{l_i} \bar{\lambda} + \frac{h_i - x}{l_i} \bar{\varphi},$$

$$(3.4) \quad \frac{x}{x'} \bar{\lambda} \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\lambda},$$

gdzie

$$(3.5) \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{x\varepsilon_0}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\varepsilon_0}, \quad \bar{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0}, \quad \bar{\varepsilon}_i^* = \frac{\varepsilon_i^*}{\varepsilon_0}.$$

Interpretację graficzną równań (3.3) i (3.4) dla łącznika i przedstawia rys. 4.

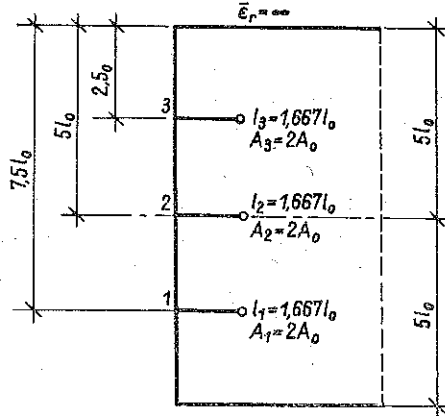


Rys. 4

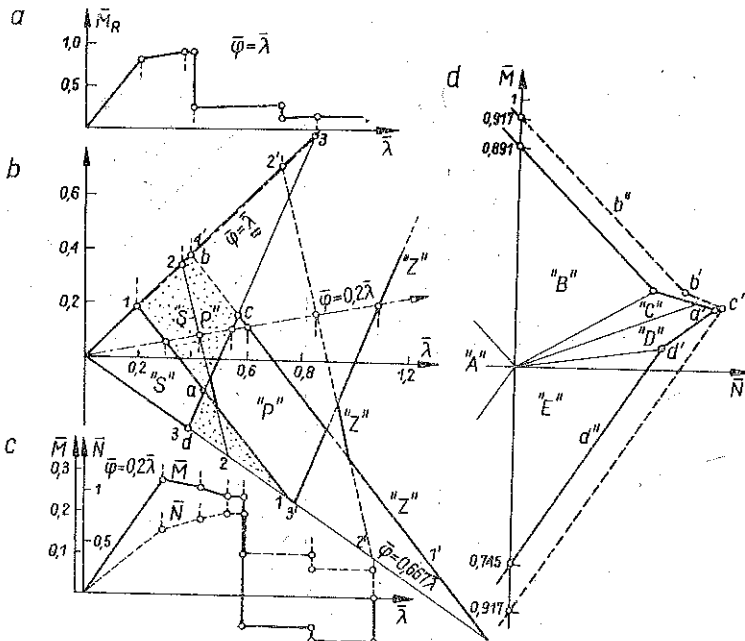
Równanie (3.3) przedstawia płaszczyznę w przestrzeni $\bar{\lambda}\bar{\varphi}\bar{\varepsilon}_i$. Na rys. 4 przedstawiono plan warstwicowy tej płaszczyzny w układzie osi $\bar{\lambda}, \bar{\varphi}$; warstwicami są proste $\bar{\varepsilon}_i = \text{const}$.

Obszar dopuszczalny dla wielkości $\bar{\lambda}$ i $\bar{\varphi}$ ograniczają mechanizmy B (prosta $\bar{\varphi} = \bar{\lambda}$) i mechanizm E (prosta $\bar{\varphi} = -\bar{\lambda}x/x'$). Wnętrze tego obszaru odpowiada mechanizmowi C ($0 < \bar{\varphi} < \bar{\lambda}$) i mechanizmowi D ($-\bar{\lambda}x/x' < \bar{\varphi} < 0$). Mechanizm A odpowiada początkowi układu współrzędnych.

Każdemu punktowi obszaru dopuszczalnego leżącemu na lewo od prostej $i-i$ odpowiadają naprężenia w łączniku mniejsze od granicy plastyczności. Obszar deformacji plastycznych wypada między prostą $i-i$ a prostą $i'-i'$. Na prostej $i'-i'$ następuje zerwanie łącznika.



Rys. 5



Rys. 6

Na osi $\bar{\lambda}$ prosta $i-i$ oraz prosta $i'-i'$ przechodzą odpowiednio przez punkty o współrzędnych

$$(3.5') \quad \bar{\lambda}_i^{(0)} = \frac{l_i}{x} (1 - \bar{\varepsilon}_i^*),$$

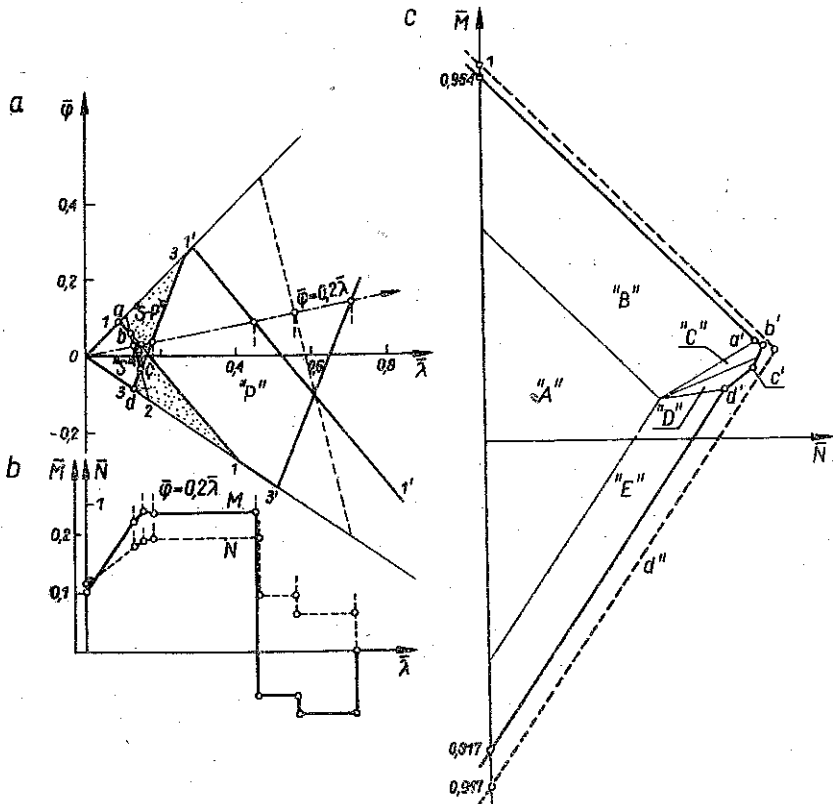
$$\bar{\lambda}_i^{(r)} = \frac{l_i}{x} (\bar{\varepsilon}_r - \bar{\varepsilon}_i^*) \geq \bar{\lambda}_i^{(0)}.$$

Jak widać, odległość łącznika od krawędzi elementu łączonego nie wpływa na wartości wydłużeń $\bar{\lambda}_i^{(0)}$ i $\bar{\lambda}_i^{(r)}$. Odległość ta wpływa natomiast na kąt nachylenia warstwic, gdyż

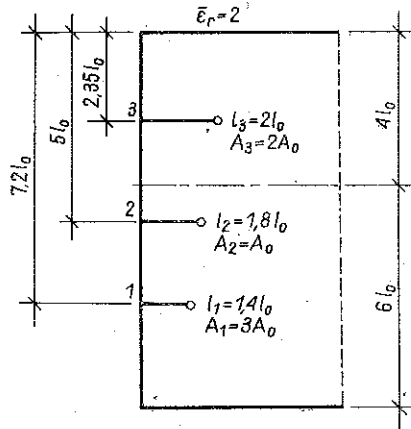
$$(3.6) \quad \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{\lambda}} = - \frac{x}{h_i - x}.$$

Dodatni kąt pochylenia odpowiada łącznikowi leżącemu powyżej osi połączenia, ujemny — łącznikowi leżącemu poniżej osi; pionowy przebieg warstwic dotyczy łącznika usytuowanego w osi połączenia.

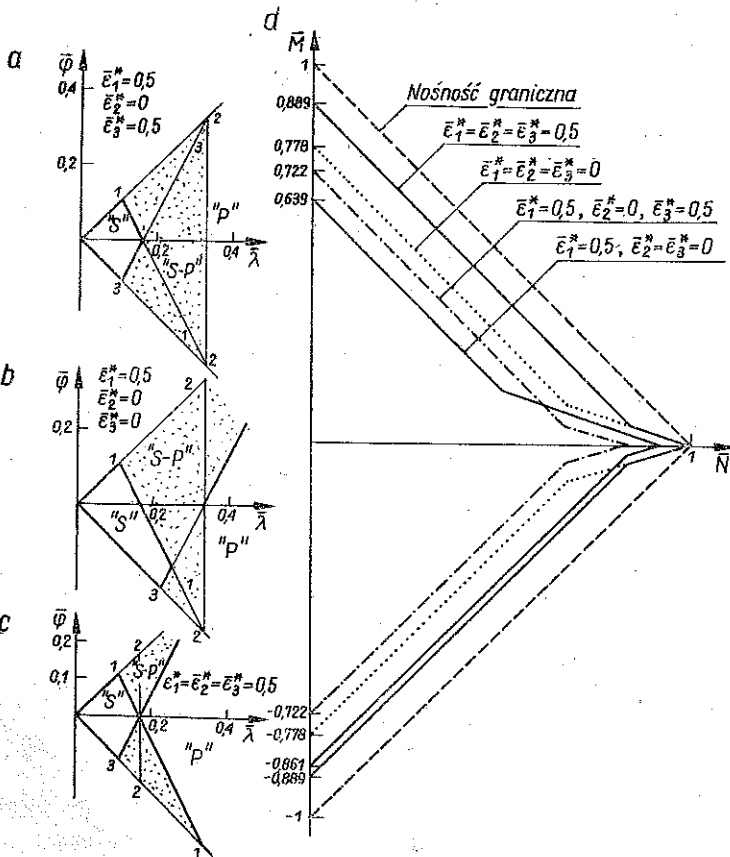
Przejdziemy z kolei do analizy połączeń, w których występuje kilka łączników. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że badane połączenia składają się z trzech łączników.



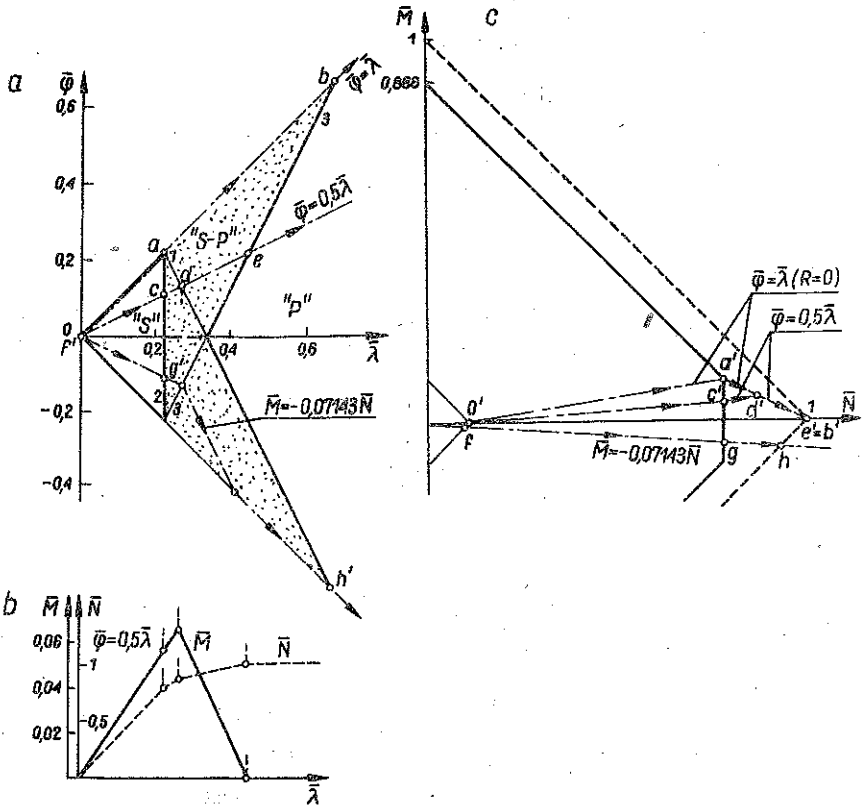
Rys. 7.



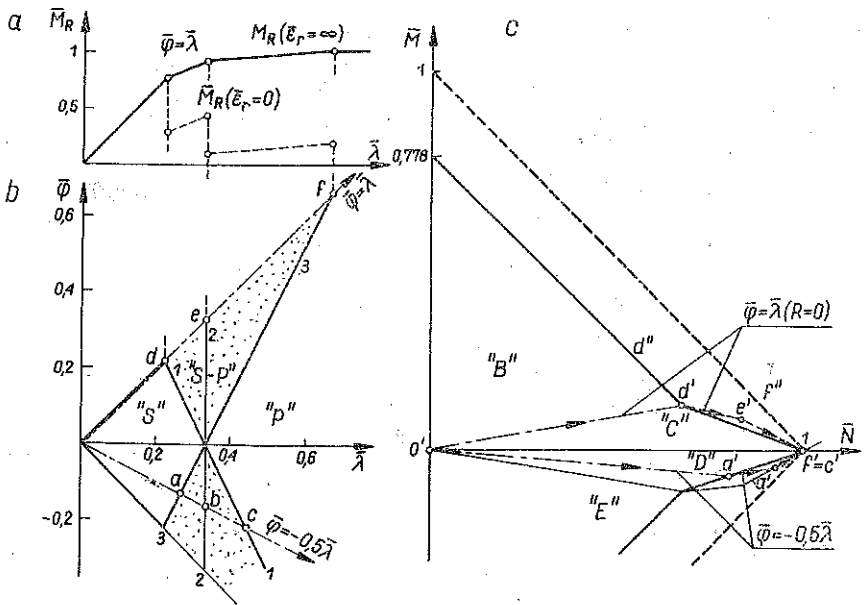
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

W pierwszej kolejności rozważymy połączenie uwidocznione na rys. 5. W połączeniu tym odkształcenia wstępne wszystkich łączników są równe zero, a $\varepsilon_r = 2\varepsilon_0$. Rys. 6b przedstawia charakterystykę kinematyczną całego połączenia. Zaznaczono tam obszary sprężystej (S), sprężysto-plastycznej (obszar kropkowany S-P) i plastycznej (P) deformacji połączenia oraz granicę wyznaczającą ostateczne zerwanie połączenia (linia łamana Z).

Na podstawie charakterystyki kinematycznej można z łatwością określić zachowanie się połączenia przy wymuszeniach kinematycznych. Chodzi tu między innymi o ustalenie sekwencji uplastyczniania i pęknięcia poszczególnych łączników przy danej drodze deformacji na płaszczyźnie $\lambda\bar{\varphi}$.

Rys. 7a przedstawia charakterystykę tego samego połączenia przy wprowadzeniu wstępnego sprężenia łączników ($\bar{\varepsilon}_1^* = 0,50$, $\bar{\varepsilon}_2^* = 0,70$, $\bar{\varepsilon}_3^* = 0,68$).

Porównując rysunki 6b i 7a widać, że na skutek sprężenia poszczególne obszary uległy modyfikacji jakościowej; wyraźnie zmniejszył się obszar sprężysty, a ostateczne zerwanie połączenia występuje przy mniejszych przemieszczeniach.

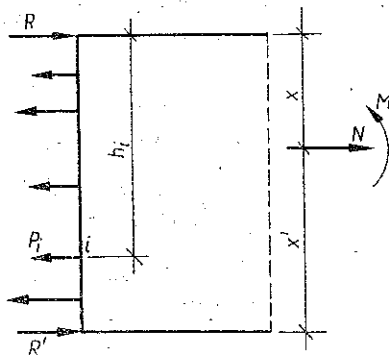
Charakterystyki kinematyczne dla połączenia symetrycznego (rys. 8) przy różnych wariantach sprężenia przedstawiają rysunki 9abc, 10a i 11b.

4. CHARAKTERYSTYKA FIZYCZNA POŁĄCZENIA

4.1. Równania równowagi

Dla mechanizmów B, C, D i E powinny być spełnione następujące równania równowagi (rys. 12):

$$(4.1) \quad \begin{aligned} N &= -R - R' + \sum P_i, \\ M &= Rx - R' x' + \sum P_i (h_i - x), \end{aligned}$$



Rys. 12

gdzie P_i oznacza siłę występującą w łączniku «i», a sumowanie obejmuje wszystkie łączniki, dla których $\varepsilon_i < \varepsilon_r$. Reakcje skupione R i R' są nieujemne i nie mogą być jednocześnie różne od zera (w mechanizmie B $R > 0$ i $R' = 0$; w mechanizmach C i D $R = R' = 0$; w mechanizmie E $R = 0$ i $R' > 0$).

Sily przenoszone przez łączniki wyznaczamy ze wzoru

$$(4.2) \quad P_i = A_i \sigma_i(\varepsilon_i),$$

gdzie $\sigma_i(\varepsilon_i)$ określa wzór (2.1).

4.2. Zakres sprężystego zachowania się łączników

W przypadkach gdy wszystkie łączniki znajdują się w stanie sprężystym ($0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_0$), na podstawie zależności (2.1), (3.1) i (4.2), otrzymujemy

$$(4.3) \quad P_i(\lambda, \varphi) = EA_i \left[\varepsilon_i^* + \frac{1}{l_i} \lambda + \frac{h_i - x}{l_i} \varphi \right], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Rozpatrzmy związki między siłami uogólnionymi N i M a przemieszczeniami λ i φ . W tym celu podstawimy prawą stronę wzoru (4.3) do wzoru (4.1). Poszukiwane związki fizyczne można napisać w następującej postaci:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} N(\lambda, \varphi) &= -R - R' + N_n^* + Ea_n \lambda + Eb_n \varphi, \\ M(\lambda, \varphi) &= Rx - R' x' + M_n^* + Eb_n \lambda + Ec_n \varphi, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.5) \quad a_n = \sum_1^n \frac{A_i}{l_i}, \quad b_n = \sum_1^n \frac{A_i (h_i - x)}{l_i}, \quad c_n = \sum_1^n \frac{A_i (h_i - x)^2}{l_i}$$

oraz

$$(4.6) \quad N_n^* = \sum_1^n A_i \sigma_i^*, \quad M_n^* = \sum_1^n A_i \sigma_i (h_i - x).$$

Wielkości N_n^* i M_n^* oznaczają więc odpowiednio sumę sił sprężających $P_i^* = A_i \sigma_i^*$ i moment sił sprężających względem osi połączenia.

Z budowy wzoru (4.4) wynika, że zarówno siła normalna jak i moment zginający, ogólnie biorąc, są funkcjami obu wielkości kinematycznych λ i φ .

W przypadku szczególnym, gdy długości wszystkich łączników są jednakowe i wynoszą l , równania (4.4) upraszczają się do postaci

$$(4.7) \quad \begin{aligned} N(\lambda, \varphi) &= -R - R' + N_n^* + \frac{EA}{l} \lambda + \frac{ES}{l} \varphi, \\ M(\lambda, \varphi) &= Rx - R' x' + M_n^* + \frac{ES}{l} \lambda + \frac{EJ}{l} \varphi, \end{aligned}$$

gdzie A , S i J oznaczają odpowiednio całkowite pole powierzchni, moment statyczny i moment bezwładności przekroju wszystkich łączników względem osi połączenia.

Jeśli środek ciężkości łączników pokrywa się z osią połączenia, to $S=0$ i siła normalna zależy tylko od wydłużenia λ , a moment zginający tylko od kąta obrotu φ .

Równania (4.4) lub (4.7) odnoszą się tylko do przemieszczeń niezerowych, tj. do mechanizmów B, C, D i E.

W mechanizmach C i D, gdzie $R=R'=0$, każdemu punktowi płaszczyzny $\lambda\varphi$ odpowiada jeden punkt na płaszczyźnie NM . Wyjątek stanowi tu przypadek zerowania się wyznacznika utworzonego ze współczynników stojących λ i φ , tzn. gdy $a_n c_n - b_n^2 = 0$. Przypadek ten zachodzi na przykład dla połączenia, w którym jest tylko jeden łącznik położony na osi połączenia ($a_n \neq 0$, $b_n = c_n = 0$). Dla każdej pary wartości λ i φ odpowiada wówczas tylko jeden punkt na płaszczyźnie NM .

W mechanizmach B i E ze względu na występowanie dodatkowego parametru (reakcja R bądź R') przyporządkowanie wielkości statycznych i kinematycznych jest inne. Rozpatrzmy dla przykładu mechanizm B, w którym $R > 0$, $R' = 0$ oraz $\lambda = \varphi x$. Po wyrugowaniu reakcji R ze wzoru (4.4) otrzymujemy równanie

$$(4.8) \quad M + Nx = M_n^* + N_n^* x + Ef_n \varphi,$$

gdzie

$$(4.9) \quad f_n = \sum_1^n \frac{A_i h_i^2}{l_i}.$$

Z równania (4.8) wynika, że każdemu punktowi prostej $\varphi = \lambda/x$ na płaszczyźnie $\lambda\varphi$ odpowiada na płaszczyźnie NM prosta $M + Nx = \text{const}$.

4.3. Zakres niesprężystej deformacji połączenia

W zakresie tym łączniki można podzielić na trzy grupy: 1) łączniki pracujące jeszcze w obszarze sprężystym, 2) łączniki uplastycznione oraz 3) łączniki zerwane. Identyfikację i liczebność poszczególnych grup łączników ustala się z charakterystyki kinematycznej połączenia w zależności od wartości λ i φ .

Związki między siłami N i M a przemieszczeniami λ i φ przedstawimy następująco:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} N(\lambda, \varphi) &= -R - R' + N_k^{(0)} + N_m^* + a_m \lambda + b_m \varphi, \\ M(\lambda, \varphi) &= Rx - R' x' + M_k^{(0)} + M_m^* + b_m \lambda + c_m \varphi, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.11) \quad \begin{aligned} N_k^{(0)} &= \sigma_0 \sum_1^k A_i, \\ M_k^{(0)} &= \sigma_0 \sum_1^k A_i (h_i - x). \end{aligned}$$

Wielkości a_m , b_m , c_m , N_m^* i M_m^* wyznaczamy z równań (4.5) i (4.6), przy czym indeks m oznacza liczebność grupy łączników pracujących w zakresie sprężystym. Indeks k oznacza z kolei liczbę łączników uplastycznionych, a liczba łączników zerwanych wynosi $n - m - k$. Sumowanie we wzorach (4.5), (4.6) i (4.11) odnosi się do nowej numeracji łączników ustalonej dla każdej grupy oddzielnie.

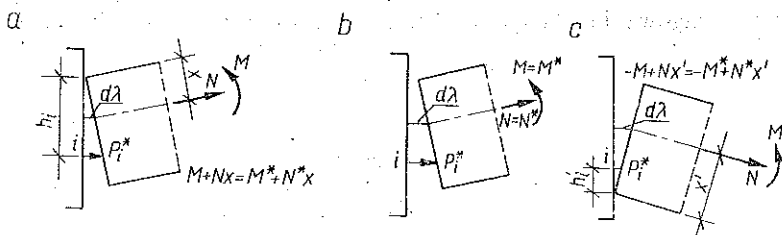
W obszarze plastycznym ($k = n$, $m = 0$) równania (4.10) przyjmują postać:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} N &= -R - R' + N_n^{(0)}, \\ M &= Rx - R' x' + M_n^{(0)}. \end{aligned}$$

4.4. Mechanizm A. Wpływ sprężenia

W mechanizmie A ze względu na idealną sztywność części łączonych rozkład sił w obszarze kontaktu jest nieokreślony. Można jednak ustalić warunki, przy których następuje początek rozwarcia części łączonych. Jeśli rozwarcie szczeliny następuje zgodnie z mechanizmem B (rys. 13a), to

$$M + Nx = \sum_1^n P_i^* h_i,$$



Rys. 13

natomiast dla mechanizmu E mamy (rys. 13c)

$$-M + Nx' = \sum_1^n P_i^* h_i'.$$

Wobec powyższego mechanizm A zachodzi wówczas, gdy

$$(4.13) \quad \begin{aligned} M + Nx &\leq M_n^* + N_n^* x, \\ -M + Nx' &\leq -M_n^* + N_n^* x'. \end{aligned}$$

Znaki równości (tj. przypadek, gdy $N = N_n^*$ i $M = M_n^*$) odpowiadają powstawaniu szczeliny zgodnie z mechanizmem C lub D (rys. 13b).

5. OBSZARY DOPUSZCZALNE W PRZESTRZENI SIŁ UOGÓLNIONYCH

5.1. Obszar sprężystej pracy połączenia

Obszar ten wyznaczają punkty płaszczyzny NM odpowiadające pierwszemu uplastycznieniu któregośkolwiek z łączników. Przyjmijmy, że indeks p ($1 \leq p \leq n$) oznacza numer tego właśnie łącznika. Granice obszaru sprężystej pracy połączenia określa więc warunek

$$(5.1) \quad \bar{\varepsilon}_p = 1,$$

przy czym indeks p jest funkcją położenia rozpatrywanego punktu na granicy obszaru sprężystego w przestrzeni $\bar{\lambda}\bar{\varphi}$. W dalszych rozważaniach zmienne $\bar{\lambda}$ i $\bar{\varphi}$ zastąpimy zmiennymi $\bar{\lambda}$ i α , gdzie

$$(5.2) \quad \alpha = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\lambda}}.$$

Bezwymiarowe wydłużenie $\bar{\lambda}_p$ odpowiadające warunkowi $\bar{\varepsilon}_p=1$, zgodnie z równaniem (3.3), wynosi

$$(5.3) \quad \bar{\lambda}_p(\alpha) = \frac{(1 - \bar{\varepsilon}_p^*) l_p}{(h_p - x) \alpha + x}$$

Uwzględniając w równaniu (3.3) wzór (5.3) otrzymujemy wzór na obliczenie odkształceń łączników w momencie pierwszego uplastycznienia:

$$(5.4) \quad \bar{\varepsilon}_i[\bar{\lambda}_p(\alpha), \alpha] = \bar{\varepsilon}_i^* + \frac{(h_i - x) \alpha + x}{l_i} \bar{\lambda}_p(\alpha).$$

Obszar sprężystej pracy połączenia określa nierówność

$$(5.5) \quad \bar{\varepsilon}_i(\bar{\lambda}, \alpha) \leq \bar{\varepsilon}_i[\bar{\lambda}_p(\alpha), \alpha], \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Z budowy wzoru (5.4) widać, że nierówność (5.5) jest spełniona, jeżeli

$$(5.6) \quad \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_p(\alpha).$$

W celu ustalenia granic obszaru sprężystej pracy połączenia w przestrzeni NM wykorzystamy równania (4.4) w nieco zmodyfikowanej postaci:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} N(\bar{\lambda}, \alpha) &= -R - R' + N_n^* + \sigma_0 (a_n x + b_n \alpha) \bar{\lambda}, \\ M(\bar{\lambda}, \alpha) &= Rx - R' x' + M_n^* + \sigma_0 (b_n x + c_n \alpha) \bar{\lambda}. \end{aligned}$$

W mechanizmie B ($R'=0$, $\alpha=1$) wykorzystanie równań (5.3) i (5.7), nierówności (5.6) oraz warunku $R \geq 0$ prowadzi do zależności

$$(5.8) \quad \begin{aligned} M + Nx &\leq M_n^* + N_n^* x + \sigma_0 f_n \frac{l_p}{h_p} (1 - \bar{\varepsilon}_p^*), \\ N &\leq N_n^* + \sigma_0 g_n \frac{l_p}{h_p} (1 - \bar{\varepsilon}_p^*), \end{aligned}$$

gdzie

$$g_n = \sum_1^n \frac{A_i h_i}{l_i}.$$

Postępując analogicznie dla mechanizmu E ($R=0$, $R' \geq 0$, $\alpha = -x/x'$) otrzymujemy

$$(5.9) \quad \begin{aligned} -M + Nx' &\leq -M_n^* + N_n^* x' + \sigma_0 f_n' \frac{l_p}{h_p'} (1 - \bar{\varepsilon}_p^*), \\ N &\leq N_n^* + \sigma_0 g_n' \frac{l_p}{h_p'} (1 - \bar{\varepsilon}_p^*), \end{aligned}$$

gdzie

$$f_n' = \sum_1^n \frac{A_i h_i'^2}{l_i}, \quad g_n' = \sum_1^n \frac{A_i h_i'}{l_i}.$$

W mechanizmach C i D ($R=R'=0$) równanie linii ograniczającej obszar sprężysty połączenia stosownie do zależności (5.7) przedstawimy w postaci parametrycznej:

$$\begin{aligned} N[\bar{\lambda}_p(\alpha), \alpha] &= N_n^* + \sigma_0 (a_n x + b_n \alpha) \bar{\lambda}_p(\alpha), \\ M[\bar{\lambda}_p(\alpha), \alpha] &= M_n^* + \sigma_0 (b_n x + c_n \alpha) \bar{\lambda}_p(\alpha), \end{aligned}$$

przy czym

$$-\frac{x}{x'} < \alpha < 1.$$

Po wyrugowaniu z powyższych równań parametru α , otrzymujemy

$$(5.10) \quad \begin{aligned} M &= M_n^* + \frac{(N - N_n^*) [c_n - (h_p - x) b_n] + \sigma_0 l_p (1 - \bar{\epsilon}_p^*) (b_n^2 - a_n c_n)}{b_n - (h_p - x) a_n}, \\ N &\leq N_n^* + \sigma_0 (a_n x + b_n \alpha) \bar{\lambda}_p(\alpha). \end{aligned}$$

Przypominamy tutaj, że mechanizm A realizuje się w obszarze określonym nierównościami (4.12).

W podsumowaniu stwierdzamy, że obszar sprężystej pracy połączenia ograniczony jest liniami prostymi, opisanymi równaniami (5.8), (5.9) i (5.10), przy czym pamiętać należy, że indeks p w każdym z tych równań ma w ogólności inną wartość w zależności od położenia rozpatrywanego punktu na płaszczyźnie $\bar{\lambda}\bar{\varphi}$.

Porównamy jeszcze kąty nachylenia prostych w mechanizmach B i C. W mechanizmie B $dM/dN = -x$, a w mechanizmie C

$$(5.11) \quad dM/dN = \frac{c_n - (h_p - x) b_n}{b_n - (h_p - x) a_n} = -x + \frac{h_p g_n - f_n}{h_p a_n - g_n}.$$

Z powyższego wynika, że w mechanizmie C $dM/dN \geq -x$, gdyż ostatni składnik wzoru (5.11) jest zawsze nieujemny. Jeżeli $\bar{\epsilon}_i^* = 0$, $l_i = \text{const}$ oraz $h_p = h_1 > x$, to pochodna $dM/dN \leq 0$. Otrzymujemy więc warunek

$$-x \leq dM/dN \leq 0.$$

Wynika stąd wniosek, że istnieją przypadki, dla których obszar sprężysty (tj. obszar pierwszego uplastycznienia) jest wklęsły.

5.2. Obszar nośności połączenia

Jeżeli materiał łączników jest idealnie kruchy ($\bar{\epsilon}_p = 1$), to obszar nośności pokrywa się na ogół z obszarem sprężystej pracy połączenia. Oznacza to, że zniszczenie połączenia następuje w chwili pęknięcia pierwszego łącznika. Należy jednak dodać, że w przypadkach drastycznych różnic w polach powierzchni przekroju lub bardzo nieregularnej konfiguracji rozmieszczenia łączników, pęknięcie pierwszego łącznika nie musi odpowiadać wyczerpaniu nośności połączenia. Przypadek ten omówimy nieco bliżej w następnym rozdziale pracy.

Jeżeli materiał łączników jest sprężysto-plastyczny z ograniczoną wydłużalnością przy zerwaniu ($1 < \bar{\varepsilon}_r < \infty$), to może się zdarzyć, że osiągnięcie nośności połączenia wystąpi przed uplastycznieniem wszystkich łączników w momencie zerwania jednego z łączników. Przypadki takie mają miejsce wówczas, gdy obszar pełnego uplastycznienia nie obejmuje jednocześnie mechanizmów B, C, D i E (por. np. rys. 6).

Jeśli obszar uplastycznienia obejmuje mechanizmy B-E, co ma miejsce przy wystarczająco dużej wydłużalności łączników lub odpowiednim sprężeniu (por. np. rys. 7), to nośność połączenia pokrywa się z jego nośnością graniczną. Granice obszaru nośności połączenia opisują nierówności lub równania, będące odpowiednio uogólnieniem wzorów (5.8), (5.9) i (5.10). Warunki te ułożone na podstawie równań (4.10) przybierają następującą postać:

$$M + Nx \leq M_k^{(0)} + M_m^* + (N_k^{(0)} + N_m^*) x + \sigma_0 f_m \frac{l_q}{h_q} (1 - \bar{\varepsilon}_q^*), \quad (5.12)$$

$$N \leq N_k^{(0)} + N_m^* + \sigma_0 g_m \frac{l_q}{h_q} (1 - \bar{\varepsilon}_q^*),$$

$$-M + Nx \leq -M_k^{(0)} + M_m^* + (N_k^{(0)} + N_m^*) x' + \sigma_0 f_m' \frac{l_q}{h_q} (1 - \bar{\varepsilon}_q^*), \quad (5.13)$$

$$N \leq N_k^{(0)} + N_m^* + \sigma_0 g_m' \frac{l_q}{h_q} (1 - \bar{\varepsilon}_q^*),$$

$$M = M_k^{(0)} + M_m^* + \frac{(N - N_k^{(0)} - N_m^*) [c_m - (h_q - x) b_m] + \sigma_0 l_q (1 - \bar{\varepsilon}_q^*) (b_m^2 - a_m c_m)}{b_m - (h_q - x) a_m}, \quad (5.14)$$

$$N \leq N_k^{(0)} + N_m^* + \sigma_0 (a_m x + b_m \alpha) \bar{\lambda}_p(\alpha),$$

gdzie indeks «q» oznacza numer tego łącznika, który ulegnie zerwaniu.

Nierówności (5.12), (5.13) i (5.14) odnoszą się odpowiednio do mechanizmów B, E oraz C/D, przy czym w każdym z tych równań indeksy m , k i q są funkcjami położenia analizowanego punktu na płaszczyźnie $\bar{\lambda}\bar{\varphi}$.

Łatwo zauważyć, że dla $m=n$, $k=0$ i $q=p$ podane wyżej nierówności opisują obszar sprężysty połączenia. Obszar nośności granicznej otrzymujemy przyjmując, że $m=0$ i $k=n$. Uzyskujemy wówczas następującą zależność graniczną:

$$\begin{aligned} M + Nx &= M_n^{(0)} + N_n^{(0)} x && \text{(mechanizm B),} \\ -M + Nx' &= -M_n^{(0)} + N_n^{(0)} x' && \text{(mechanizm E).} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Mechanizmom C/D odpowiada punkt $M = M_n^{(0)}$ i $N = N_n^{(0)}$, wypadający na przecięciu prostych (5.15). Wynika stąd, że obszar nośności granicznej w przestrzeni sił uogólnionych jest wypukły.

5.3. Wykresy obszarów dopuszczalnych

Obszary dopuszczalne dla różnych typów połączeń przedstawiają rysunki 6d, 7c, 9d i 11c. Rysunki te są wykonane we współrzędnych bezwymiarowych: $\bar{M} = M/M_0$ i $\bar{N} = N/N_0$, gdzie $M_0 = M_n^{(0)}$ i $N_0 = M_n^{(0)}/x$.

Rysunki 6d ($\bar{\epsilon}_i^* = 0$) i 7c ($\bar{\epsilon}_i^* \neq 0$) dotyczą połączenia niesymetrycznego, przedstawionego na rys. 5 ($\bar{\epsilon}_i = 2$). Linia przerywana odpowiada nośności połączenia, linia zaś ciągła obszarowi sprężystej pracy połączenia. Na rysunkach uwidoczniło się również, w jakich częściach obszaru sprężystego realizują się poszczególne mechanizmy. Charakterystyczne jest, że granice pomiędzy sąsiadującymi mechanizmami są liniami prostymi, a sprężenie wywołuje jedynie równoległe przesunięcie tych linii. Rys. 6 jest ilustracją przypadku, w którym obszar plastyczny nie obejmuje mechanizmu B i części mechanizmu C. Punktowi b na płaszczyźnie $\bar{\lambda}\bar{\varphi}$ odpowiada prosta b na płaszczyźnie $\bar{N}\bar{M}$, a prostej $b-c$ odpowiada prosta $b'-c'$. Jak widać o nośności połączenia w obszarze mechanizmów B i C decyduje zerwanie łącznika nr 1. Nośność ta jest mniejsza od nośności granicznej, a obszar dopuszczalny w przetrzeniu $\bar{N}\bar{M}$ jest wklęsły.

Sprężenie połączenia, jak widać to z rys. 7d, powiększyło zarówno obszar sprężysty jak i obszar nośności, który pokrywa się teraz z obszarem nośności granicznej. Nie jest to jednak regułą, co wykazuje rys. 9d. Zestawiono na nim obszary sprężyste przy różnym sprężeniu połączenia symetrycznego przedstawionego na rys. 8. Częściowe sprężenie łączników wywołuje tutaj częściowe lub całkowite zmniejszenie obszaru sprężystego. Inny wariant sprężenia przedstawia rys. 10c, gdzie obszar sprężysty jest wypukły, a mechanizmom C i D odpowiada jedna linia prosta $a'-g'$. Sprężenie wszystkich łączników do naprężenia równego granicy plastyczności powiększa obszar sprężystej pracy łączników do wymiarów obszaru nośności granicznej.

6. WYMUSZENIA KINEMATYCZNE

Ograniczymy się tutaj do rozważania wymuszeń jednoparametrowych typu $\bar{\varphi} = \alpha\bar{\lambda}$. Przebieg sił wewnętrznych przy różnych drogach przemieszczeń ilustrują wykresy na rysunkach 6, 7, 10, 11.

Rysunek 6a przedstawia zmiany momentu sił względem górnej krawędzi mniejszego z elementów łączonych ($\bar{M}_R = \bar{M} + \bar{N}$) w mechanizmie B ($\bar{\varphi} = \bar{\lambda}$). Rysunek 6c ilustruje funkcje $\bar{N}(\bar{\lambda})$ i $\bar{M}(\bar{\lambda})$ przy wymuszeniu $\bar{\varphi} = 0,2\bar{\lambda}$ (mechanizm C). Charakterystyczne jest tutaj, że maksymalny moment zginający $\bar{M}(\bar{\lambda})$ wypada już na granicy obszaru sprężystego, a zależność $\bar{N}(\bar{\lambda})$ do chwili pęknięcia pierwszego łącznika jest stateczna.

Podobne zachowanie się funkcji $\bar{N}(\bar{\lambda})$ i $\bar{M}(\bar{\lambda})$ obserwujemy przy wprowadzeniu sił sprężających (rys. 7 i rys. 10). Różnica polega jedynie na tym, że maksimum funkcji $\bar{M}(\bar{\lambda})$ wypada w obszarze sprężysto-plastycznym.

Dla łączników o nieograniczonej wydłużalności niestateczność wykresu $\bar{M}(\bar{\lambda})$ w mechanizmie C występuje wówczas, gdy choćby jeden łącznik znajduje się powyżej osi połączenia. Wykres $\bar{N}(\bar{\lambda})$ jest zawsze stateczny, a maksymalna wartość siły normalnej wypada w obszarze plastycznym. Dla danej drogi przemieszczenia na podstawie charakterystyki kinematycznej można ustalić nową numerację łączników,

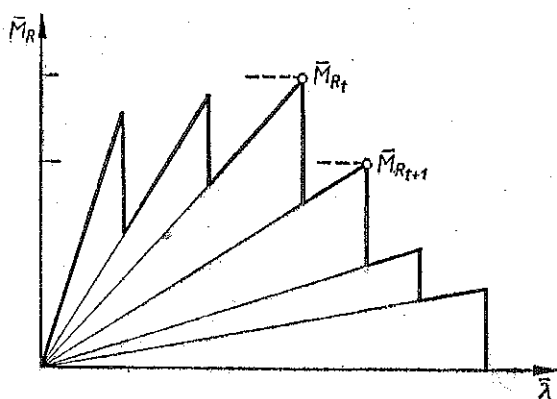
odpowiadającą kolejności uplastycznienia. Uplastycznienie łącznika t daje maksimum wartości $\bar{M}(\bar{\lambda})$, jeśli zachodzi nierówność $M_t > M_{t+1}$, prowadzącą do warunku

$$(6.1) \quad \alpha (c_n - c_t) + x (b_n - b_t) \leq 0.$$

Rysunek 10 przedstawia również obraz wymuszeń kinematycznych na płaszczyźnie $\bar{N}\bar{M}$. Prostej $0-a-b$ na płaszczyźnie $\bar{\lambda}\bar{\varphi}$ (przy $R=0$) odpowiada linia łamana $0'-a'-b'$ na płaszczyźnie $\bar{N}\bar{M}$, wyznaczająca zasięg mechanizmu B w obszarze sprężystym i sprężysto-plastycznym. Prostej $0-c-d-e$ ($\bar{\varphi}=0,5\lambda$) odpowiada z kolei linia łamana $0'-c'-d'-e'$.

Rysunek 11 ilustruje przyporządkowanie punktów płaszczyzn $\bar{\lambda}\bar{\varphi}$ i $\bar{N}\bar{M}$ dla symetrycznego połączenia niesprężonego. Porównano tam również (rys. 11a) obraz funkcji $\bar{M}_R(\bar{\lambda})$ przy wymuszeniu $\bar{\varphi}=\bar{\lambda}$ dla łączników wykonanych z materiału idealnie kruchego (linia przerywana) i z materiału sprężysto-plastycznego (linia ciągła). Maksymalna wartość momentu \bar{M}_R dla materiału kruchego wypada na granicy obszaru sprężystego. Warto zwrócić uwagę na to, że pęknięcie łącznika t w mechanizmie B odpowiada maksymalnej wartości \bar{M}_R tylko wówczas, gdy zachodzi nierówność (por. rys. 14)

$$(6.2) \quad [\bar{\lambda}_{t+1}(1) - \bar{\lambda}_t(1)] (f_n - f_t) \leq A_t h_t,$$



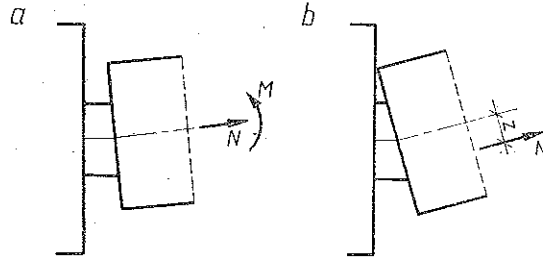
Rys. 14

przy czym indeksy 1, 2, ..., t odnoszą się do numeracji odpowiadającej kolejności pęknięcia łączników. Dodamy jeszcze, że w najprostszym przypadku szczególnym, gdy $\bar{\varepsilon}_i^* = 0$, $A_i = \text{const}$, $l_i = \text{const}$ oraz $h_{i+1} - h_i = \text{const}$, nierówność (6.2) jest zawsze spełniona.

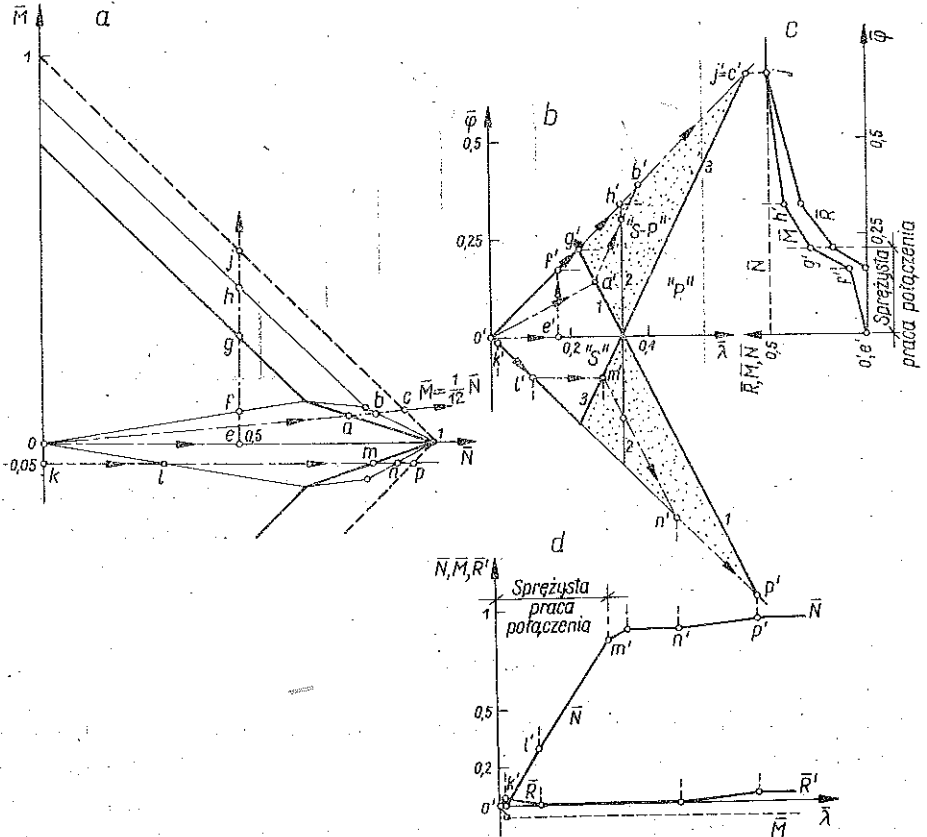
7. WYMUSZENIA STATYCZNE

Najprostszym przypadkiem wymuszenia statycznego jest droga obciążenia $\bar{M} = \bar{N}\bar{z}$, gdzie $\bar{z} = z/x$ oznacza bezwymiarowy mimośród siły \bar{N} (por. rys. 15). Ilustracją tego wymuszenia są rysunki 10 i 16, na których przedstawiono wykres drogi obciążenia na płaszczyźnie $\bar{\lambda}\bar{\varphi}$. Dla przykładu prostej $0-f-g-h$ na płaszczyźnie $\bar{N}\bar{M}$ (rys. 10c) odpowiada linia łamana $0'-f'-g'-h'$ na płaszczyźnie $\bar{\lambda}\bar{\varphi}$ (rys. 10a).

Interesujące jest zachowanie się połączenia przy wymuszeniu statycznym wzdłuż linii łamanych $0-k-l-m-n-p$ oraz $0-e-f-g-h-j$ (rys. 16). W pierwszym przypadku najpierw przykładamy pewien stały moment $\bar{M} = -0,05$ (linia $0-k$), a później powiększamy siłę normalną \bar{N} aż do uplastycznienia wszystkich łączników. Drugi przypadek odpowiada z kolei zginaniu połączenia momentem \bar{M} przy stałej wartości siły normalnej $\bar{N}_c = 0,5$. W obu przypadkach deformacja w obszarze sprężystym przebiega według dwóch mechanizmów. Powoduje to, że zależności $\bar{N}(\bar{\lambda})$ w pierwszym przypadku i $\bar{M}(\bar{\varphi})$ w drugim przypadku są nieliniowe (rys. 16d, e).



Rys. 15



Rys. 16

Ponieważ drogi obciążenia i odciążenia w obszarze sprężystym pokrywają się, zachowanie się połączenia w tym obszarze jest nieliniowo-sprężyste (ściślej: biliniowo-sprężyste). Własność ta ma istotne znaczenie przy wyznaczaniu przemieszczeń konstrukcji, w której zastosowane są tego typu połączenia.

8. ZAKOŃCZENIE

Rozważane w pracy połączenie zalicza się do problemów mechaniki ciał z więzami jednostronnymi. Głównie z tej przyczyny model połączenia wykazuje pewne interesujące cechy mechaniczne. Najciekawsze jest chyba to, że obszar pierwszego uplastycznienia (obszar sprężysty) nie zawsze jest wypukły. Również z tego powodu model połączenia jest modelem fizycznie nieliniowym w zakresie sprężystym.

Własności mechaniczne połączenia nawet w najprostszych przypadkach zależą od dużej liczby parametrów. Szczególnie interesujący jest wpływ sprężenia, zmieniający częstokroć w sposób jakościowy zachowanie się połączenia. Chodzi tu głównie o kształt i rozmiary obszarów dopuszczalnych oraz o sztywność połączenia. Właściwe dobranie parametrów sprężenia powiększa sztywność styku i jego nośność sprężystą i plastyczną. Dlatego też często spotykamy przykłady stosowania wstępnego sprężenia w rozwiązaniach inżynierskich [6].

Przyjęty w niniejszej pracy model połączenia (tzw. styku doczołowego) jest cytowany nieomal w każdym podręczniku konstrukcji metalowych. Autorzy tych podręczników rozpatrują jednak tylko mechanizmy B i E. Analizę mechanizmów C i D pomijają wychodząc z konstrukcyjnie poprawnego założenia, że styk doczołowy stosuje się tylko przy siłach ściskających. Nadmienić warto, że styk ten ma szereg zalet technologicznych i jest często stosowany w lekkich ramach stalowych.

Na podstawie badań doświadczalnych konstrukcji metalowych już od dawna wiadomo [7], że założenie idealnej sztywności części łączonych jest niepoprawne. Dlatego też celowe jest dalsze rozwijanie tej problematyki przy bardziej złożonym modelu połączenia (np. przyjęcie, że części łączone są sprężysto-plastyczne, uwzględnienie lokalnej deformacji w sąsiedztwie zakotwień łączników). Nadmienimy jeszcze, że nawet w ramach najprostszego modelu przyjętego w niniejszej pracy pojawiają się dalsze ciekawe zagadnienia jak na przykład uwzględnienie luzów lub ciągłego rozkładu łączników, uwzględnienie dużych przemieszczeń, poprzecznych deformacji oraz przystosowania połączenia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. SCHUBERT, *Rechnerischer Nachweis eines HV-Kopfplattenstosses und Versuch*, Der Stahlbau, 41, 1, 22-23, 1972.
2. H. JAKOB, *Zur Bemessung geschraubter Kopfplattenstosse im Stahlhochbau*, Der Stahlbau, 42, 7, 218-220, 1973.
3. J. WRIGHT, *Structural steel design, Optimum Structural Design. Theory and Applications*, ed. by R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz, John Wiley and Sons, 307-328, 1973.

4. J. WITTEVEN, F. P. TOLMAN, Discussion on paper *Optimum plastic design of unbraced frameworks*, by A. R. Toakley, D. F. Batten, B. G. Wilson, IUTAM Symposium, Optimization in structural Design, Warsaw 1973, Springer Verlag, 307-311, 1975.
5. A. GARSTECKI, A. GAWĘCKI, M. GAWĘCKI, *Optymalizacja systemu lekkich hal stalowych*, Prace IPPT PAN, 6, 1978.
6. J. KWIATKOWSKI, Z. PANCEWICZ, J. PATORSKI, *Rozciągane połączenia na śruby sprężające*, Materiały Konferencji Naukowej Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej, T. 1, 187-211, Warszawa 1977.
7. S. BRYL, *Praca śrub surowych w stalowych połączeniach ramowych*, Inżyn. i Budown., 15, 3, 88-95, 1958.

Резюме

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРОГО ТИПА СОЕДИНЕНИЯ

В работе рассматриваются кинематика и статика системы двух идеально жестких тел соединенных упруго-пластическими нитями. Принято, что нити имеют ограниченное удлинение. Отсюда следует возможность анализа так упруго-хрупкой, как и идеально упруго-пластической модели соединения. Определены упругие, упруго-пластические и пластические области в пространствах обобщенных сил и перемещений. Показано, что упругая область в пространстве сил может быть вогнута, а соединение в этой области имеет иногда упруго-нелинейную (т. наз. билинейную) характеристику. Указывается, что предварительное напряжение вызывает качественные перемены механических свойств соединения.

SUMMARY

MECHANICAL PROPERTIES OF A CERTAIN TYPE OF CONNECTION

Kinematics and statics of two ideal rigid bodies connected by elastic-plastic tensioned rod-fasteners are presented. It is assumed that a total elongation of the fasteners is limited, what makes it possible to consider both the elastic-brittle and elastic-ideal-plastic behaviour of the connection. The elastic, elastic-plastic and plastic regions are determined in the generalized strain and stress space. In particular cases the concavity of the pure elastic region in the generalized stress space and the nonlinear (e.g. bilinear) behaviour of the connection in the elastic range are observed. The prestressing of the connection influenced the qualitative changes of mechanical features of the connection.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT TECHNOLOGII
i KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 grudnia 1978 r.