

## NUMERYCZNE OBLICZANIE SIŁ STATYCZNYCH I DYNAMICZNYCH NA POWIERZCHNI ZĘBÓW WALCOWEJ PRZEKŁADNI ZĘBATEJ

JAN R Y Ś i STANISŁAW S T A C H O Ń (KRAKÓW)

W pracy analizowany jest model walcowej przekładni zębatej o zdeterminowanych odchyłkach wykonania zębów. Wprowadzono funkcję opisującą względne przemieszczenie zębów i zastosowano ją do obliczeń statycznego i dynamicznego obciążenia na powierzchni zębów. Wyznaczenie przemieszczenia i prędkości przemieszczenia oparto na rozwiązaniu nieliniowych równań ruchu i otrzymano rozwiązanie okresowe w warunkach ruchu ustalonego. Obliczenia numeryczne wykonano przy założeniu, że zęby mają modyfikację zarysu Maaga, a odchyłki podziałki są małe w stosunku do statycznego przemieszczenia względnego zębów. W obliczeniach uwzględniono modyfikację zarysu oraz rozwarcie styku zębów i poszukiwano rozkładu obciążenia wzdłuż odcinka przyporu. Rozkłady obciążenia zostały zilustrowane graficznie.

### 1. ZAŁOŻENIA WSTĘPNE

Wyniki teoretycznych opracowań dotyczących układów napędowych z przekładniami zębatymi w dużej mierze zależą od przyjętych uprzednio założeń oraz modelu, za pomocą którego następnie zostaną opisane zachodzące zjawiska dynamiczne.

W niniejszej pracy poświęconej numerycznej analizie dynamiki przekładni, do opisu tych zjawisk posłużono się dyskretnym modelem przekładni zębatej (modelem L. Müllera). Rozważono przekładnię zębatą jednostopniową, walcową o zębach prostych i całkowicie odizolowaną dynamicznie (rys. 1). Przyjęto, że wykonanie przekładni jest wysokiej klasy, tzn. że odchyłki podziałki i zarysu zębów są mniejsze od względnych przemieszczeń, spowodowanych statycznym obciążeniem średnim. Pominięto wpływ sztywności wałów i korpusu, wyeliminowano błędy przypadkowe kształtu wszystkich elementów oraz nie uwzględniono struktury dynamicznej napędu.

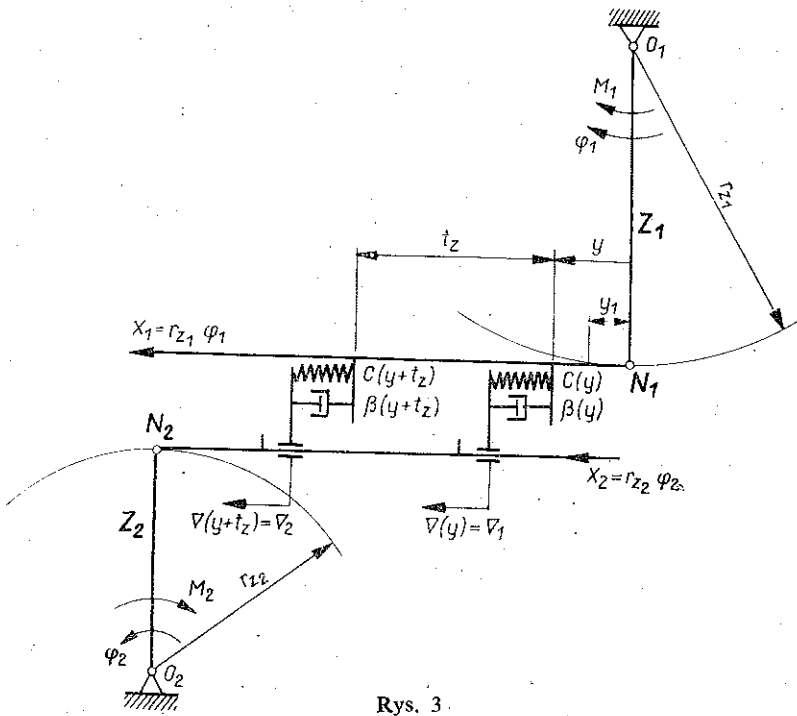
W rezultacie przyjęto, że tylko zęby mogą odkształcać się sprężysto oraz dopuszczono pewne — z góry zamierzone — błędy wykonania zarysu zęba związane z ich modyfikacją, tzw. modyfikacją Maaga (rys. 2). Ponadto założono równomierny rozkład obciążenia zęba wzdłuż szerokości wieńca koła zębatego, a następnie — w dalszej analizie dynamicznej — przyjęto, że częstotliwości wymuszeń zewnętrznych są dużo mniejsze od częstotliwości drgań względnych współpracujących kół.



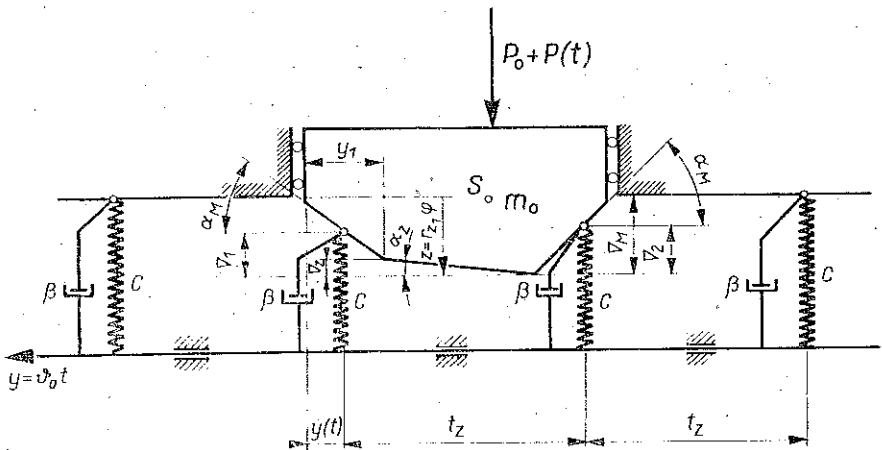
2. MODEL PRZEKŁADNI

W pracy [5] wykazano pełną analogię matematyczną opisu zachodzących zjawisk statycznych i dynamicznych pomiędzy przyjętym — zgodnie z poczynionymi wyżej założeniami — schematem przekładni (rys. 3) a wspomnianym modelem Müllera.

Model ten (rys. 4) składa się z układu sprężyn, który porusza się ze stałą prędkością  $V_0$  względem odpowiednio ukształtowanej bryły o masie  $m_0$  i obciążonej siłą  $P_0 + P(t)$ .



Rys. 3



Rys. 4

Zarys bryły współpracującej ze sprężynami odpowiada funkcji błędów wzdłuż odcinka przyporu, może uwzględniać błędy kształtu zarysu zębów lub opisywać dowolną ich modyfikację. Przemieszczenie bryły zaś  $z=z(y)$ , gdzie  $y=V_0 t$ , odpowiada względnemu ruchowi kół przekładni  $\varphi=\varphi(t)$ , a  $V_0$  — stałej prędkości obwodowej kół (tzn. dla  $\dot{\varphi}_1=\text{const}$ ). Sztywność pary zębów i tłumienie na ich powierzchni współpracującej uwzględniają zaznaczone na rys. 4 współczynniki  $c$  i  $\beta$ .

W dalszej analizie teoretycznej zajęto się więc dynamiką modelu wg rys. 4, na podstawie którego uzyskano (podane w następnym rozdziale) układy równań różniczkowych, natomiast obliczenia numeryczne przeprowadzono — zgodnie z analogią — dla zmiennych dotyczących rzeczywistej przekładni.

Do obliczeń numerycznych przyjęto odpowiednie oznaczenia i dane liczbowe:

$P, P_0=10^4$ [N]	statyczne obciążenie średnie przekładni,
$T, t_z=10^{-2}$ [m]	podziałka na kole zasadniczym,
$AO, \text{tg } \alpha_M=0,4$	$\alpha_M, \alpha_z$ — parametry modyfikacji zarysu
$A1, \text{tg } \alpha_z=0,03$	
$C, c=6 \cdot 10^8$ [N/m]	sztywność pary zębów,
$B, \beta=5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^2$ [kg/s]	współczynnik tłumienia,
$M, m_0=20$ [kg]	zredukowana masa kół na wałek koła $z_1$ ,
$V, V_0=1, 10, 15, 20, 25, 35$ [m/s]	prędkość obwodowa kół.

### 3. WZGLĘDNE PRZEMIESZCZENIA KÓŁ. ROZKŁAD OBCIĄŻENIA NA POWIERZCHNI ZĘBÓW

Niniejszy rozdział dotyczy analizy względnych przemieszczeń statycznych i dynamicznych współpracujących kół oraz odpowiadających im rozkładów obciążenia międzyzębego.

Dla ruchu quasi-statycznego, tzn. dla prędkości obwodowej kół bliskiej zeru, określono przemieszczenia i siły statyczne, a dla ruchu ustalonego odpowiednie równanie różniczkowe ruchu, opisujące zachodzące tam zjawiska dynamiczne.

#### 3.1. Względne statyczne przemieszczenia. Rozkład obciążenia statycznego

Opierając się na rys. 4 przy quasi-statycznym ruchu palisady sprężyn ( $V_0=0$ ) względem bryły o masie  $m_0$ , stwierdzamy, że środek jej masy przemieszcza się zgodnie z równaniami:

dla  $0 \leq y \leq y_1$

$$(3.1) \quad z^0 = 0,5 \left[ \frac{P_0}{c} + (y_1 - y) (\text{tg } \alpha_M + \text{tg } \alpha_z) + t_z \text{tg } \alpha_z \right],$$

gdzie

$$y_1 = \frac{P_0/c - t_z \text{tg } \alpha_z}{\text{tg } \alpha_M - \text{tg}^2 \alpha_z};$$

dla  $y_1 \leq y \leq y_2$

$$(3.2) \quad z^0 = 0,5 \left[ \frac{P_0}{c} + (y - y_1) (\text{tg } \alpha_M - \text{tg } \alpha_z) + t_z \text{tg } \alpha_z \right],$$

gdzie

$$y_2 = 2 \frac{P_0/c - t_z \operatorname{tg} \alpha_z}{\operatorname{tg}^2 \alpha_M - \operatorname{tg}^2 \alpha_z};$$

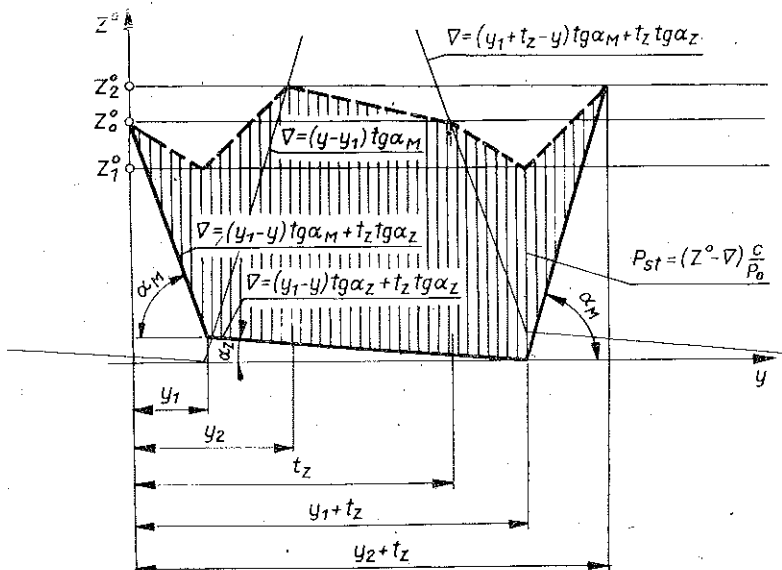
dla  $y_2 \leq y \leq t_z$

$$(3.3) \quad z^0 = P_0/c + (t_z + y_1 - y) \operatorname{tg} \alpha_z.$$

Rys. 5 ilustruje wykresy tych przemieszczeń, których wartości na końcach przedziałów odpowiednio wynoszą:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} z_0^0 &= \frac{(P_0/c) \operatorname{tg} \alpha_M - t_z \operatorname{tg}^2 \alpha_z}{\operatorname{tg} \alpha_M - \operatorname{tg} \alpha_z}, \\ z_1^0 &= P_0/2c + 0,5 t_z \operatorname{tg} \alpha_z, \\ z_2^0 &= \frac{(P_0/c + t_z \operatorname{tg} \alpha_z) \operatorname{tg} \alpha_M}{\operatorname{tg} \alpha_M + \operatorname{tg} \alpha_z} \end{aligned}$$

oraz przedstawia bezwymiarowe obciążenie statyczne jako funkcję zmiennej  $y$  (tzn. wzdłuż odcinka przyporu).



Rys. 5

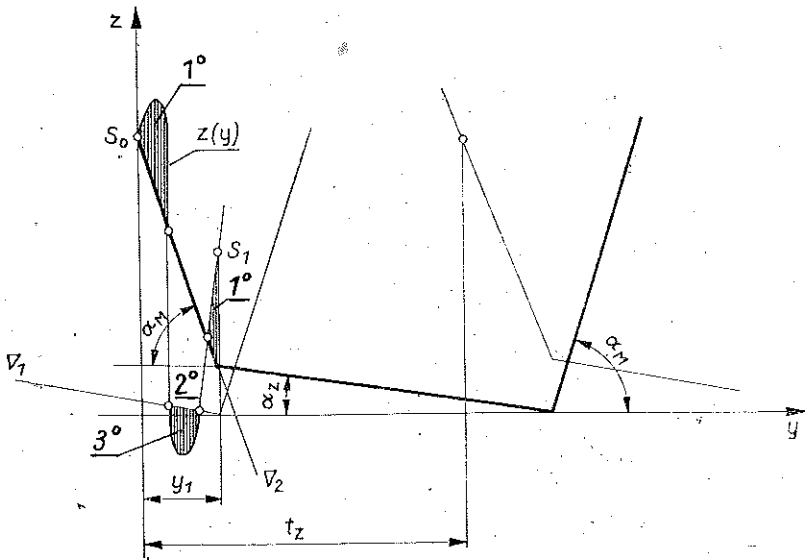
### 3.2. Względne przemieszczenia dynamiczne. Rozkład obciążenia dynamicznego

Równania różniczkowe ruchu wyprowadzono dla dwóch zasadniczych przedziałów:

- (I)  $0 \leq y \leq y_1,$
- (II)  $y > y_1.$

W obydwu przypadkach należało oddzielnie rozpatrzyć wpływ sztywności i tłumienia dla dwu i jednoparowego ząbienia, dlatego w każdym z nich otrzymano odpowiednie układy równań ruchu.

I tak w przedziale I, w zależności od warunków początkowych  $z(0)$  i  $z'(0)$  oraz kolejnych rozwiązań, które w następnym kroku numerycznego całkowania stają się warunkami początkowymi do dalszych obliczeń, otrzymano trzy równania, opisujące kolejno wg rys. 6 dwuparowe (1) i jednoparowe (2) ząbienie oraz całkowite rozzerwanie styku międzyzębnego (3).



Rys. 6

Niech punkt  $S_0 [z(0), z'(0)]$  określa warunki początkowe ruchu. Wówczas zgodnie z rys. 6 dla  $0 \leq y \leq y_1$ , funkcje błędów dla poszczególnych par odpowiednio wynoszą:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \nabla_1 &= (y_1 - y) \operatorname{tg} \alpha_z, \\ \nabla_2 &= (y_1 - y) \operatorname{tg} \alpha_M + t_z \operatorname{tg} \alpha_z, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.6) \quad y_1 = \frac{z(0) - t_z \operatorname{tg} \alpha_z}{\operatorname{tg} \alpha_M},$$

a równania różniczkowe ruchu przyjmują postać

1) dla  $(z - \nabla_2) \geq 0$  i  $(z - \nabla_1) > 0$ .

$$(3.7) \quad \ddot{z} + \frac{2\beta}{m_0} \dot{z} + \frac{2c}{m_0} z = \frac{P_0}{m_0} + \frac{\beta}{m_0} (\dot{\nabla}_1 + \dot{\nabla}_2) + \frac{c}{m_0} (\nabla_1 + \nabla_2);$$

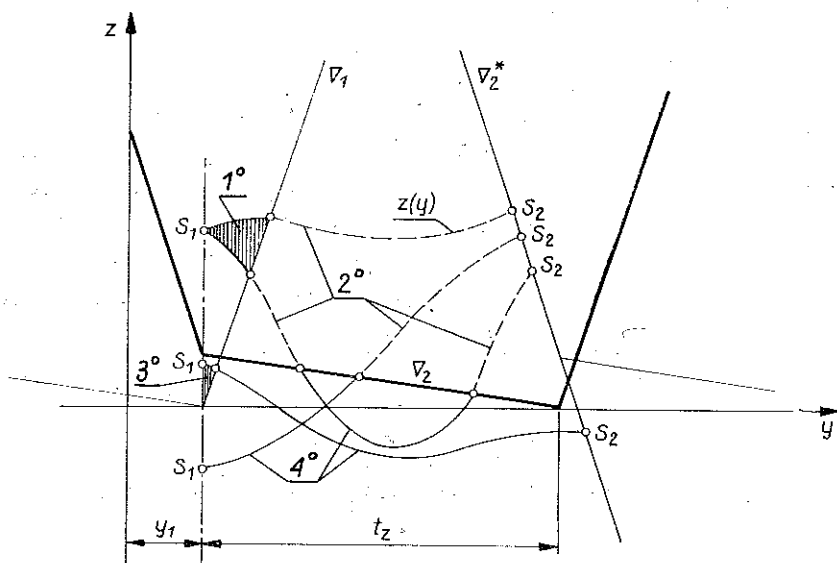
2) dla  $(z - V_2) < 0$  i  $(z - V_1) \geq 0$ ,

$$(3.8) \quad \ddot{z} + \frac{\beta}{m_0} \dot{z} + \frac{c}{m_0} z = \frac{P_0}{m_0} + \frac{\beta}{m_0} \dot{V}_1 + \frac{c}{m_0} V_1;$$

3) dla  $(z - V_2) < 0$  i  $(z - V_1) < 0$ ,

$$(3.9) \quad \ddot{z} = \frac{P_0}{m_0}.$$

W II przedziale, tzn. dla  $y > y_1$ , warunki początkowe określa nowy punkt  $S_1 [z, z', y]$ , który już w pierwszym kroku obliczeń może przyjąć trzy różne położenia (rys. 7), gdyż jego współrzędne są końcowymi wartościami obliczonymi z przedziału pierwszego.



Rys. 7

Podobnie jak poprzednio, w zależności od położenia punktu  $S_1$  i dalszych wyników obliczeń (zgodnie z rys. 7), otrzymano cztery równania ruchu.

Koniec obliczeń dla tego przedziału następuje w punkcie  $S_2$ , tzn. wtedy, gdy jego współrzędne  $y$  i  $z(y)$  spełnią równanie prostej  $V_2^*$ , czyli wtedy, gdy dla dalszych kroków będzie można posługiwać się znów układem równań z przedziału pierwszego (rys. 7).

Począwszy od punktu  $S_1$ , funkcje błędów dla nadal pracujących dwóch par zębów zmieniają się i odpowiednio wynoszą:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} V_1 &= (y - y_1) \operatorname{tg} \alpha_M, \\ V_2 &= [t_z - (y - y_1)] \operatorname{tg} \alpha_z, \end{aligned}$$

równania zaś ruchu dla poszczególnych przypadków przedstawiają się następująco:

1) dla  $(z - \nabla_1) \geq 0$  i  $(z - \nabla_2) \geq 0$ ,

$$(3.11) \quad \ddot{z} + \frac{2\beta}{m_0} \dot{z} + \frac{2c}{m_0} z = \frac{P_0}{m_0} + \frac{\beta}{m_0} (\dot{\nabla}_1 + \dot{\nabla}_2) + \frac{c}{m_0} (\nabla_1 + \nabla_2);$$

2) dla  $(z - \nabla_1) < 0$  i  $(z - \nabla_2) > 0$ ,

$$(3.12) \quad \ddot{z} + \frac{\beta}{m_0} \dot{z} + \frac{c}{m_0} z = \frac{P_0}{m_0} + \frac{\beta}{m_0} \dot{\nabla}_2 + \frac{c}{m_0} \nabla_2;$$

3) dla  $(z - \nabla_1) > 0$  i  $(z - \nabla_2) < 0$ ,

$$(3.13) \quad \ddot{z} + \frac{\beta}{m_0} \dot{z} + \frac{c}{m_0} z = \frac{P_0}{m_0} + \frac{\beta}{m_0} \dot{\nabla}_1 + \frac{c}{m_0} \nabla_1;$$

4) dla  $(z - \nabla_1) \leq 0$  i  $(z - \nabla_2) \leq 0$ ,

$$(3.14) \quad \ddot{z} = \frac{P_0}{m_0}.$$

Powyższe równania scałkowano na drodze numerycznej, bo jedynie tą metodą (narzucając określoną procedurę) można było uzyskać rozwiązania ciągłe przez kolejne rozwiązywanie równań w poszczególnych przedziałach, których (jak wyjaśniono wcześniej) ważność uzależniona jest od poprzednich rozwiązań.

W tym celu wykorzystując wzory (3.5) i (3.10) oraz biorąc pod uwagę, że

$$(3.15) \quad y = V_0 t, \quad \dot{z} = V_0 z', \quad \ddot{z} = V_0^2 z'',$$

gdzie

$$z' = dz/dy, \quad z'' = d^2 z/dy^2;$$

wszystkie równania sprowadzono do dwóch typów równań mających postać:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} z'' + 2T\omega z' + \omega^2 z &= D + \bar{D}y, \\ z'' &= D. \end{aligned}$$

Ich rozwiązania przedstawiają się następująco:

$$(3.17) \quad z = e^{-\omega T y} (A \sin \omega_0 y + \bar{A} \cos \omega_0 y) + E + \bar{E}y,$$

gdzie

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \omega_0 &= \omega \sqrt{1 - T^2} \\ \bar{E} &= \bar{D}/\omega^2, \\ E &= \frac{1}{\omega^2} \left( D - 2T \frac{\bar{D}}{\omega} \right), \end{aligned}$$

a stałe  $A$  i  $\bar{A}$  należy określić z warunków początkowych przyjmując, że dla  $y = y_n$ ,  $z = z_n$  i  $z' = z'_n$ .



oraz

$$(3.19) \quad z = \frac{1}{2} Dy^2 + \bar{E}y + E,$$

gdzie

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \bar{E} &= z'_n - Dy_n, \\ E &= z_n - z'_n y_n + \frac{1}{2} Dy_n^2. \end{aligned}$$

I tak równania (3.7), (3.8) i (3.9) można kolejno napisać:

$$1) \quad z'' + 2T_2 \omega_2 z' + \omega_2^2 z = D_1 + D_2 y,$$

gdzie

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \omega_2 &= \sqrt{\frac{2c}{V_0^2 m_0}}, \quad T_2 = \frac{\beta}{\sqrt{2m_0 c}}, \\ D_1 &= \frac{P_0}{m_0 V_0^2} + \left( \frac{cy_1}{m_0 V_0^2} - \frac{\beta}{m_0 V_0} \right) (\operatorname{tg} \alpha_z + \operatorname{tg} \alpha_M) + \frac{ct_z}{m_0 V_0^2} \operatorname{tg} \alpha_z, \\ D_2 &= -\frac{c}{m_0 V_0^2} (\operatorname{tg} \alpha_M + \operatorname{tg} \alpha_z); \end{aligned}$$

$$2) \quad z'' + 2T_1 \omega_1 z' + \omega_1^2 z = D_1 + D_2 y;$$

gdzie

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega_2}{\sqrt{2}}, \quad T_1 = \frac{T_2}{\sqrt{2}}, \\ D_1 &= \frac{P_0}{m_0 V_0^2} + \left( \frac{cy_1}{m_0 V_0^2} - \frac{\beta}{m_0 V_0} \right) \operatorname{tg} \alpha_z, \\ D_2 &= -\frac{c}{m_0 V_0^2} \operatorname{tg} \alpha_z; \end{aligned}$$

$$3) \quad z'' = D_1,$$

$$(3.23) \quad D_1 = \frac{P_0}{m_0 V_0^2},$$

Równania (3.11), (3.12), (3.13) i (3.14):

$$1) \quad z'' + 2T_2 \omega_2 z' + \omega_2^2 z = D_3 + D_4 y,$$

gdzie

$$(3.24) \quad \begin{aligned} D_3 &= \frac{P_0}{m_0 V_0^2} + \left( \frac{\beta}{m_0 V_0} - \frac{cy_1}{m_0 V_0^2} \right) (\operatorname{tg} \alpha_M - \operatorname{tg} \alpha_1) + \frac{ct_z}{m_0 V_0^2} \operatorname{tg} \alpha_1, \\ D_4 &= \frac{c}{m_0 V_0^2} (\operatorname{tg} \alpha_M - \operatorname{tg} \alpha_2); \end{aligned}$$

$$2) \quad z'' + 2T_1 \omega_1 z' + \omega_1^2 z = D_3 + D_4 y,$$

gdzie

$$(3.25) \quad D_3 = \frac{P_0}{m_0 V_0^2} + \left[ \frac{c(t_z + y_1)}{m_0 V_0^2} - \frac{\beta}{m_0 V_0} \right] \operatorname{tg} \alpha_z,$$

$$D_4 = -\frac{c}{m_0 V_0^2} \operatorname{tg} \alpha_z,$$

$$3) \quad z'' + 2T_1 \omega_1 z' + \omega_1^2 z = D_3 + D_4 y,$$

gdzie

$$(3.26) \quad D_3 = \frac{P_0}{m_0 V_0^2} + \left( \frac{\beta}{m_0 V_0} - \frac{c y_1}{m_0 V_0^2} \right) \operatorname{tg} \alpha_M,$$

$$D_4 = \frac{c}{m_0 V_0^2} \operatorname{tg} \alpha_M.$$

$$4) \quad z'' = D_3,$$

$$(3.27) \quad D_3 = \frac{P_0}{m_0 V_0^2}.$$

Znając przemieszczenia i prędkości tych przemieszczeń ( $z, z'$ ) w każdym punkcie odcinka przyporu można łatwo określić wielkości odpowiadających im międzyzębnych sił, gdyż są one opisane prostymi wzorami

$$(3.28) \quad R_1 = [z(y) - V_1(y)] \frac{c}{P_0} + \frac{\beta V_0}{P_0} [z'(y) - V_1'(y)],$$

$$R_2 = [z(y) - V_2(y)] \frac{c}{P_0} + \frac{\beta V_0}{P_0} [z'(y) - V_2'(y)],$$

przy czym  $R_1$  oznacza obciążenie zęba wychodzącego z zazębienia oraz  $R_2$  obciążenie zęba wchodzącego w zazębienie.

Obciążenia te w poszczególnych przedziałach wynoszą:

a) W przedziale I dla  $0 \leq y \leq y_1$

$$(3.29) \quad 1) \quad R_1 = (z - V_1) \frac{c}{P_0} + \frac{\beta V_0}{P_0} (z' + \operatorname{tg} \alpha_z),$$

$$R_2 = (z - V_2) \frac{c}{P_0} + \frac{\beta V_0}{P_0} (z' + \operatorname{tg} \alpha_M);$$

$$(3.30) \quad 2) \quad R_1 = (z - V_1) \frac{c}{P_0} + \frac{\beta V_0}{P_0} (z' + \operatorname{tg} \alpha_z),$$

$$R_2 = 0;$$

$$(3.31) \quad 3) \quad R_1 = 0,$$

$$R_2 = 0.$$

b) W przedziale II dla  $y \geq y_1$

$$(3.32) \quad 1) R_1 = (z - V_1) \frac{c}{P_0} + \frac{\beta V_0}{P_0} (z' - \operatorname{tg} \alpha_M),$$

$$R_2 = (z - V_2) \frac{c}{P_0} + \frac{\beta V_0}{P_0} (z' + \operatorname{tg} \alpha_z);$$

$$(3.33) \quad 2) R_1 = 0,$$

$$R_2 = (z - V_2) \frac{c}{P_0} + \frac{\beta V_0}{P_0} (z' + \operatorname{tg} \alpha_z);$$

$$(3.34) \quad 3) R_1 = (z - V_1) \frac{c}{P_0} + \frac{\beta V_0}{P_0} (z' - \operatorname{tg} \alpha_M),$$

$$R_2 = 0;$$

$$(3.35) \quad 4) R_1 = 0,$$

$$R_2 = 0.$$

Dla tak przygotowanych układów równań autorzy opracowali program w języku FORTRAN IV na komputer ODRA 1305.

#### 4. OPIS PROGRAMU

Program, którego ogólny schemat blokowy przedstawiono na rys. 8, znajduje się w Instytucie Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej. Umożliwia on przeprowadzenie obliczeń dotyczących analizy dynamicznej dowolnej przekładni.

Wprowadzając do obliczeń dodatkowo, oprócz danych z rozdziału 2, pozostałe dane:

Z8  $- z(0) = 10^{-5}$  m początkowe przemieszczenie względne kół,

Z9  $- z'(0) = 10^{-3}$  prędkość początkowa przemieszczenia,

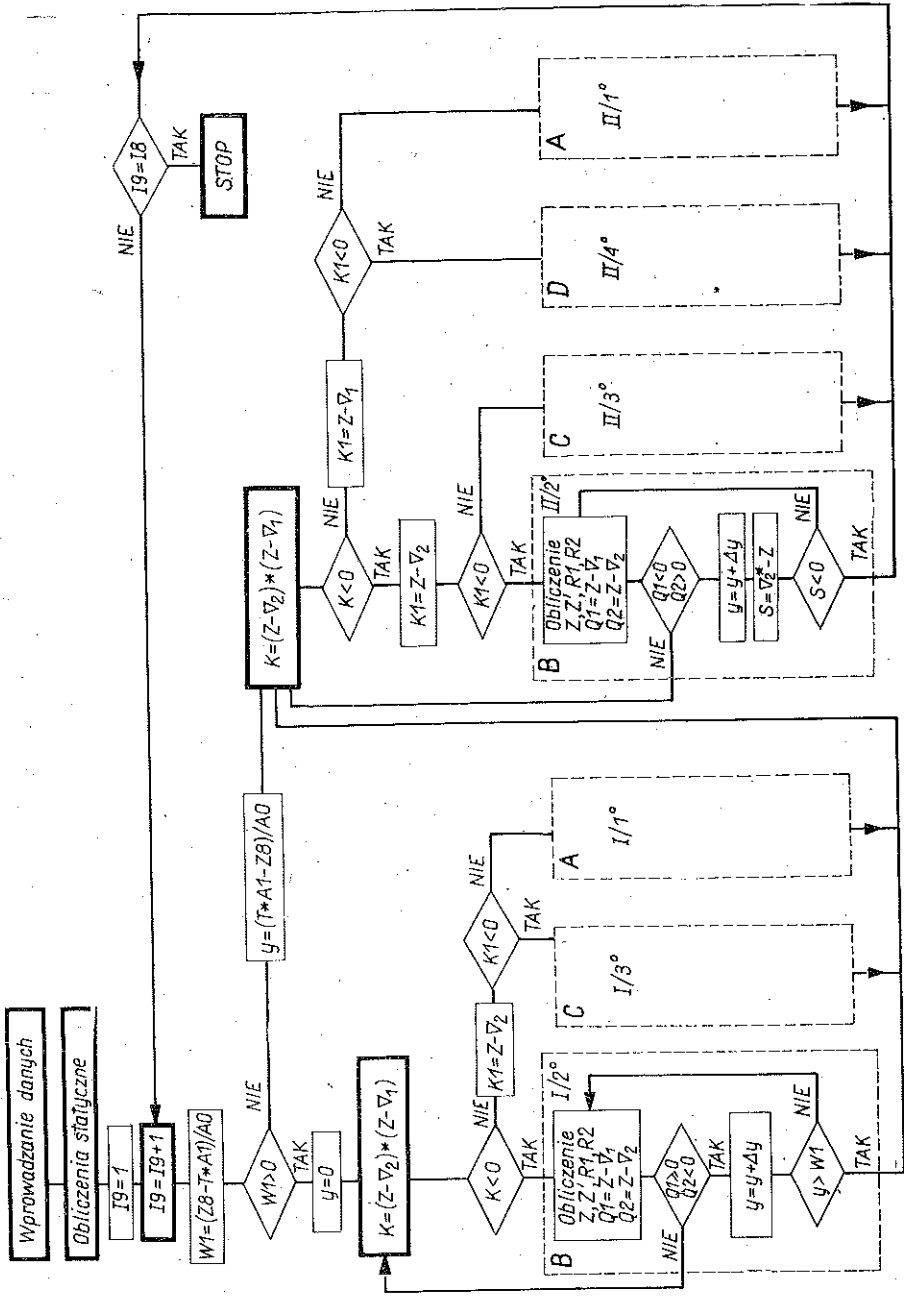
I8 = 60, 120 liczba par zębów,

I6 = 4 nr pary, do której otrzymano początkowe wydruki,

I7 = 58, 118 nr pary, od której otrzymano końcowe wydruki.

W rezultacie można otrzymać wydruki przemieszczeń, prędkości przemieszczeń oraz sił jako funkcji zmiennej  $y$  dla dowolnej liczby początkowych i końcowych par zębów.

Przy danej liczbie zębów na kołach  $z_1$  i  $z_2$ , można dobrać taką liczbę wspomnianych par, aby wydruki końcowe dotyczyły tych samych współpracujących zębów po określonej liczbie obrotów jednego z kół. W podanych przykładach dla  $z_1 = 19$  i  $z_2 = 57$  przyjęto 60 i 120 par, tzn. że wydruki trzech pierwszych i trzech ostatnich odnoszą się do tych samych par odpowiednio po jednym i dwóch obrotach koła dużego. Pozwala to na analizę charakteru drgań przekładni oraz ocenę, czy drgania przekładni (ze względów numerycznych) można uznać za ustalone.

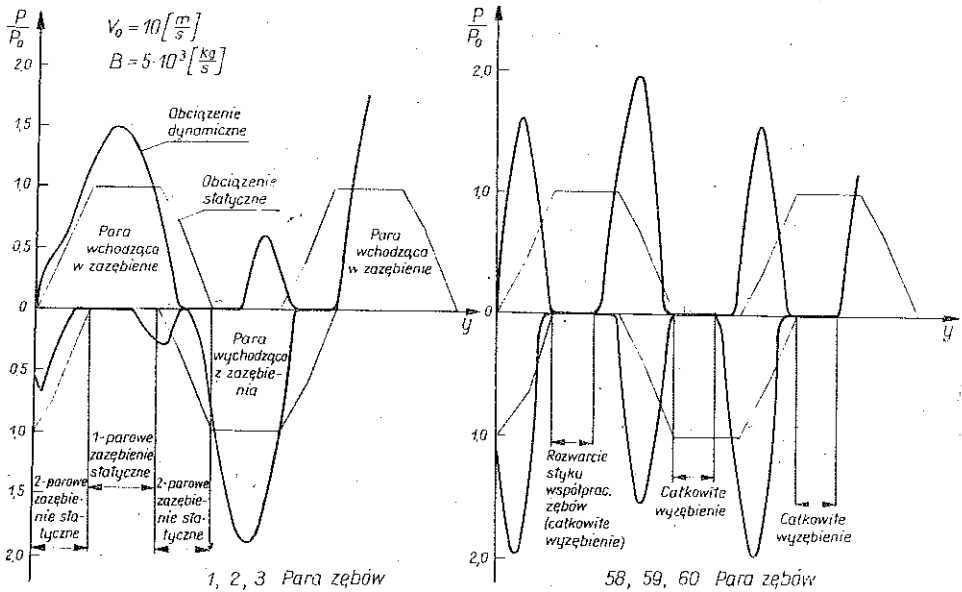


Rys. 8

Ponadto należy podkreślić, że program jest bardzo ogólny, gdyż rozpoczyna on obliczenia przy dowolnym początkowym przemieszczeniu i prędkości względnej kół, tzn. że można go uruchomić «startując» praktycznie z każdego punktu  $S_0$ .

5. OPIS WYNIKÓW

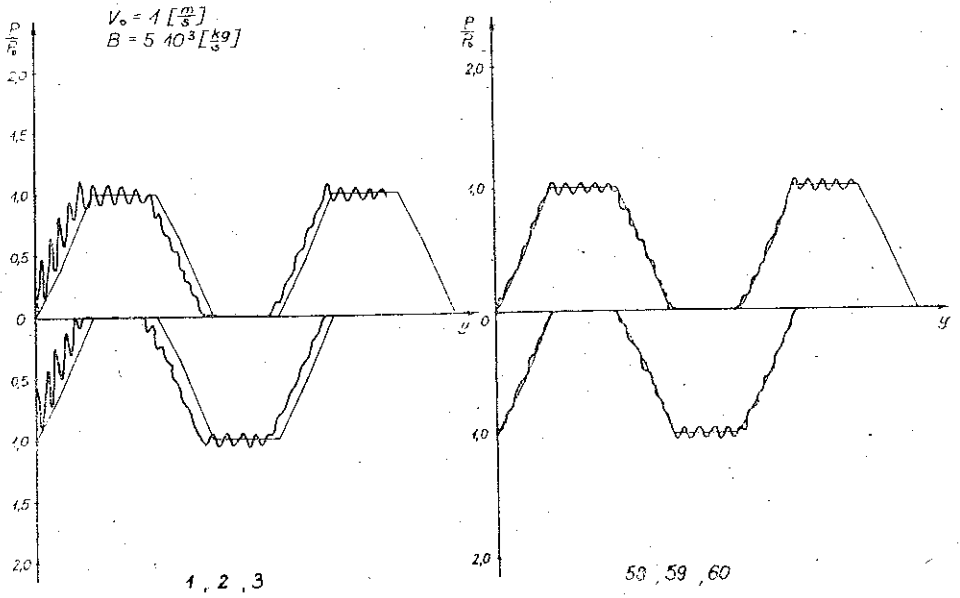
Załączone wykresy na rysunkach od 9 do 13 zostały opracowane na podstawie otrzymanych wyników dla danych przedstawionych w poprzednich rozdziałach. Każdy z nich ilustruje rozkład obciążenia wielkości sił dynamicznych w początkowej i końcowej fazie ruchu na tle sił statycznych dla różnych wartości prędkości obwodowej i współczynnika tłumienia.



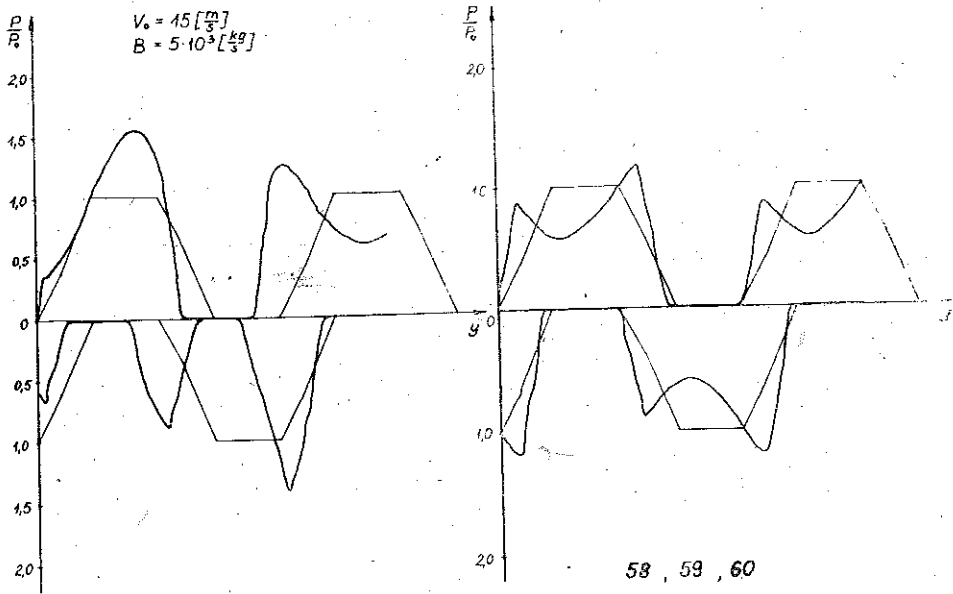
Rys. 9

Wykres na rys. 9, który zawiera wszystkie charakterystyczne elementy, opisano szczegółowo. Charakter pozostałych wykresów jest analogiczny i dlatego ich interpretacja nie powinna sprawić trudności czytelnikowi po uprzednim zapoznaniu się z rys. 9. Przykład ten dotyczy zjawiska rezonansu, podobnie jak zilustrowany na rys. 12, gdzie zostały uwidocznione bardzo duże nadwyżki dynamiczne oraz przemieszczenia względne, które w rezultacie doprowadzają do rozerwania się styku międzyzębnego.

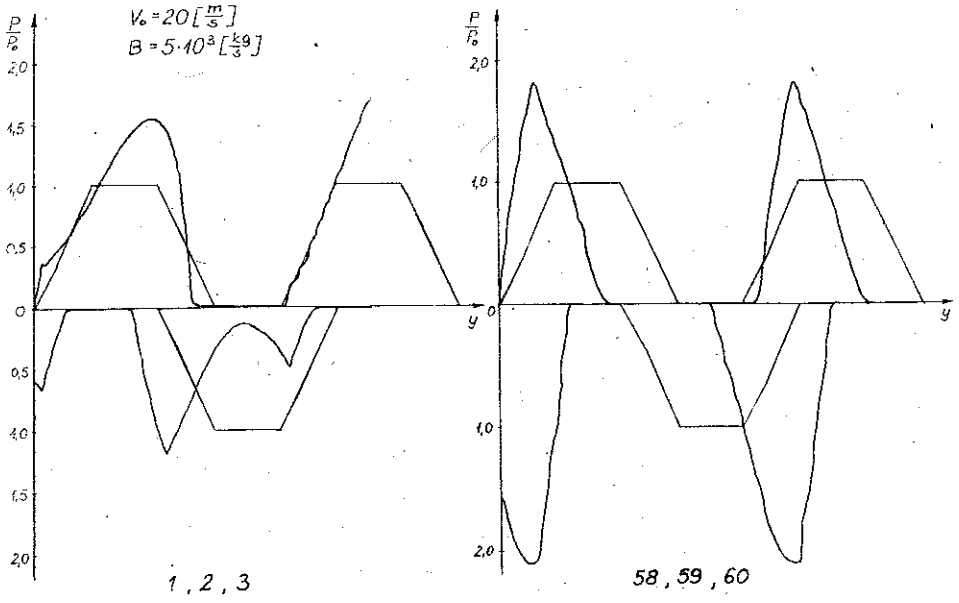
Na rys. 14 dokonano przekształcenia wykresu obciążenia statycznego (podobnie można przekształcić obciążenie dynamiczne) z odcinka przyporu na odpowiadający mu odcinek zarysu zęba. Pozwala to na dokładne określenie zarówno sił jak również ich miejsca na powierzchni pracującego zęba.



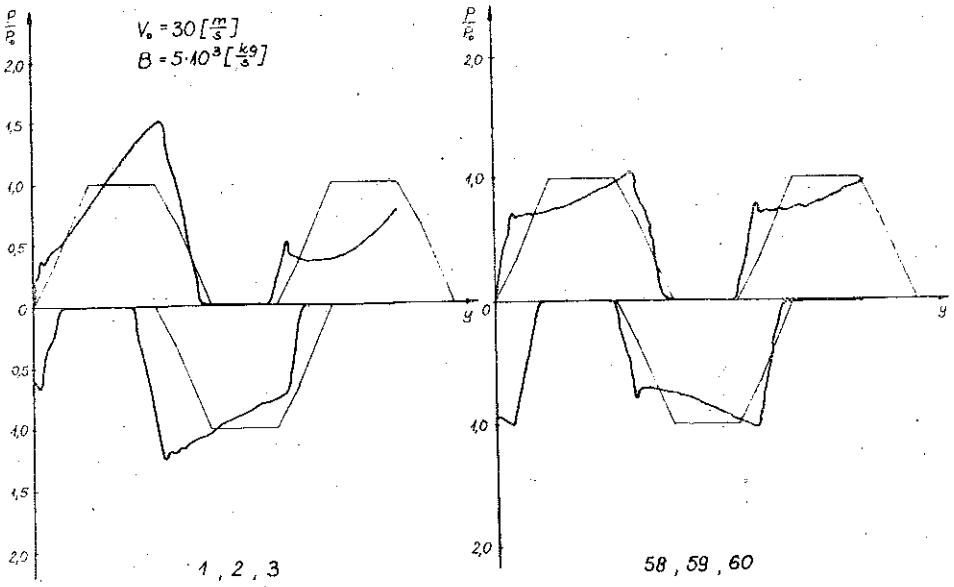
Rys. 10



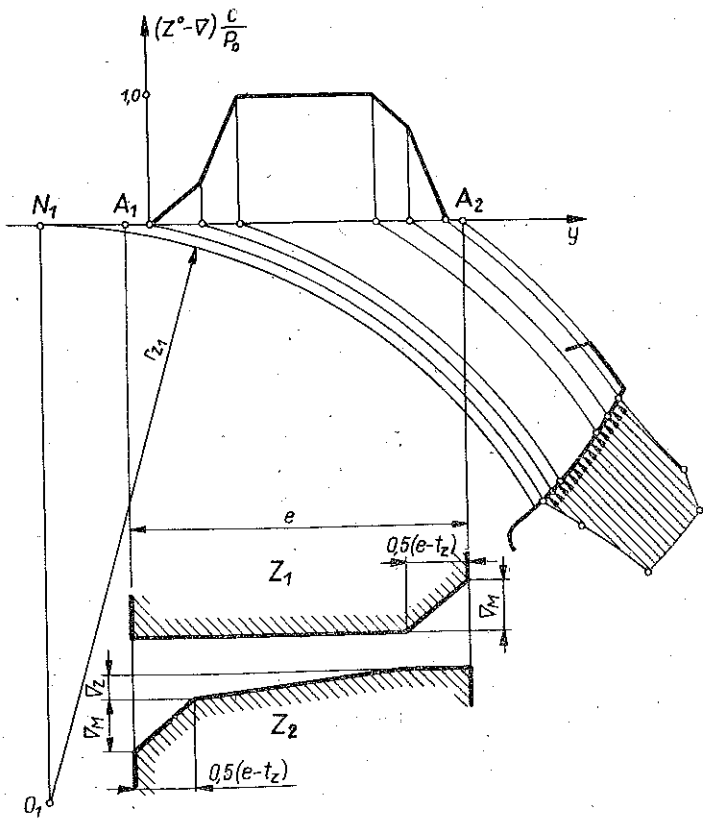
Rys. 11



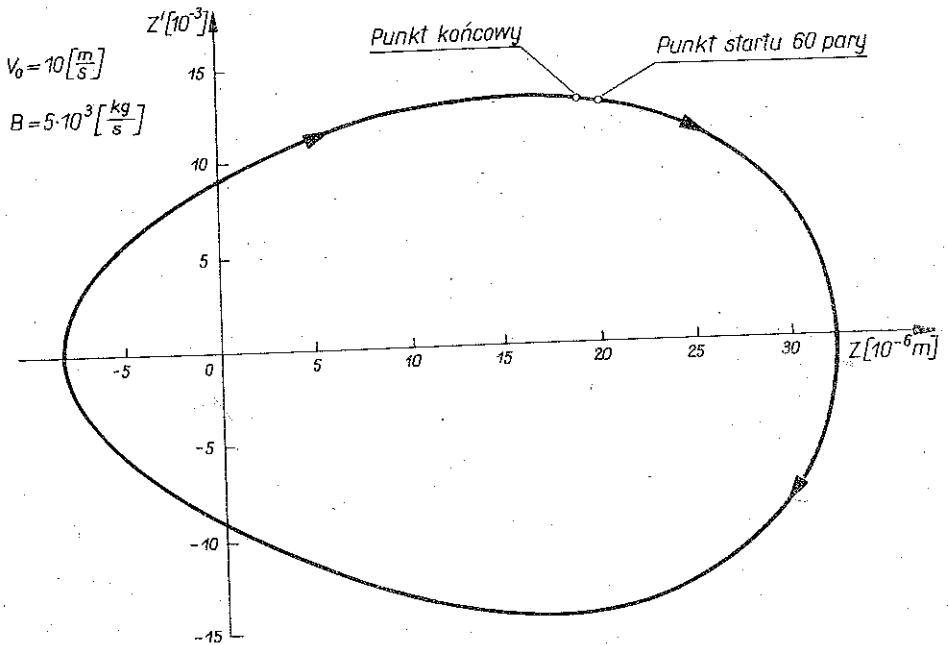
Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 15 przedstawia cykl graniczny na płaszczyźnie  $z$  z'. Istnienie zamkniętych cykli świadczy o stabilności numerycznego rozwiązania oraz o dokładności przełożenia kinematycznego rozpatrywanej przekładni.

## 6. WNIOSKI

Z przeprowadzonych rozważań i analizy przedstawionych wykresów wynikają następujące wnioski:

1) Istotnymi parametrami decydującymi o wielkościach nadwyżek dynamicznych są sztywność współpracującej pary zębów oraz prędkość obwodowa kół. Przy pewnych krytycznych dla danej sztywności wartościach prędkości dochodzi do zjawiska rezonansu, w wyniku którego następuje rozerwanie styku między zębami nawet wtedy, gdy podczas pracy statycznej pracują dwie pary zębów (rys. 9 i 12).

2) Przy małych prędkościach (kilkakrotnie mniejszych od krytycznej) rozkład obciążenia dynamicznego jest zbliżony do rozkładu statycznego, a nadwyżki nie przekraczają 10% wartości obciążenia statycznego (rys. 10).

3) W przedziale pozarezonansowym ze wzrostem prędkości obciążenie dynamiczne zmienia się nieznacznie. Rozkłady i jego wartości ustalają się na prawie tych samych poziomach, w których nadwyżki dynamiczne dochodzą do 20% (rys. 11 i 13).

4) Ze względu na lokalizację obciążenia na powierzchni bocznej zębów, współczynniki dynamiczne w obliczeniach inżynierskich należy przyjmować i traktować indywidualnie. W przypadku rezonansu (co łatwo można zauważyć na rys. 12) największe nadwyżki dynamiczne występują na wierzchołku zęba wchodzącego w zazębienie. W otoczeniu punktu toczonego dochodzi praktycznie do rozerwania styku współpracujących zębów. Taki rozkład obciążenia będzie sprzyjał zatarciu (duży współczynnik przy obliczeniach na zatarcie) oraz wywoła wysokie naprężenia zginające w zębach koła  $z_1$  i bardzo niskie w zębach koła  $z_2$  (obciążenie lokuje się w okolicach stopy zęba). W konsekwencji prowadzi to do przyjęcia dwóch różnych wartości współczynnika dynamicznego: wysokiej dla koła  $z_1$  i niskiej (nawet mniejszej od 1) dla koła  $z_2$ .

5) Dalszych dokładniejszych informacji dotyczących układów napędowych z przekładniami zębatymi można poszukiwać na drodze analizy numerycznej, stosując przedstawioną metodę opisu dynamiki, współpracującej pary kół zębatych.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. GRYBOŚ, *Drgania parametryczne jednostopniowej przekładni zębatej*, Rozprawy Inż., 1, 1972.
2. W. NADOLSKI, *Sily dynamiczne występujące między zębami kół przekładni jednostopniowej o osiach równoległych*, Rozpr. Inż., 3, 1971.
3. I. KAZONORI, H. FUJIO, *Dynamic behavior of heavy loaded spur gears*, Transaction ASME, seria B, 1974.
4. L. MÜLLER, *Nowy model dynamiczny przekładni walcowej*, Przegl. Mech., 21, 1974.
5. J. RYŚ, *Analiza obciążeń statycznych i dynamicznych w walcowych przekładniach zębatych*, Zesz. Nauk. Politech. Krakowskiej, 55, 1977.

## Резюме

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ  
НА ПОВЕРХНОСТИ ЗУБЬЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ

В работе анализируется модель цилиндрической зубчатой передачи с определенными отклонениями изготовления зубьев. Введена функция, описывающая относительное перемещение зубьев и она применена к расчетам статической и динамической нагрузки на поверхности зубьев. Определение перемещения и скорости перемещения опирается на решении нелинейных уравнений движения, получая периодическое решение в условиях установившегося движения. Численные расчеты проведены при предположении, что зубья имеют модификацию профиля Маага, а отклонения масштаба малы по отношению к статическому масотносительному перемещению зубьев. В расчетах учтены модификация профиля и разводка контакта зубьев, а находилось распределение нагрузки вдоль отрезка поддержки. Распределения нагрузок иллюстрированы графически.

## SUMMARY

NUMERICAL EVALUATION OF STATICAL AND DYNAMICAL LOADS ACTING ON  
THE SURFACE OF TEETH OF A CYLINDRICAL TOOTHED GEAR

A mechanical model of a cylindrical toothed gear with deterministic teeth profile errors is analysed. A function describing the relative displacements of teeth is introduced and used for evaluating the statical and dynamical teeth surface loads. The displacements and their time rates are derived from the nonlinear equations of motion and periodical solutions due to steady-state motion being obtained. Numerical calculations are made under the assumptions for Maag's modification of the teeth profile and pitch errors being small in comparison to the statical teeth displacement. Modification of the profile and setting of the teeth is taken into account, and the load distribution along the tooth contact is determined. The loads distributions are illustrated by an example.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
INSTYTUT MECHANIKI  
PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 18 września 1978 r.*