

ZGINANIE OBROTOWO-SYMETRYCZNE SFERYCZNEJ, MAŁOWYNIOSŁEJ POWŁOKI ORTOTROPOWEJ

ROMAN NAGÓRSKI i KRZYSZTOF TRAWIŃSKI (WARSZAWA)

W pracy rozważono sprężystą, ortotropową powłokę sferyczną o małej wyniosłości, obciążoną obrotowo-symetrycznie. Rozwiązanie ogólne problemu zginania uzyskano na podstawie równań H. Reissnera za pomocą funkcji Bessela i szeregów potęgowych (całki szczególne). Na przykładzie powłoki o jednym brzegu, obciążonej ciężarem własnym zbadano zachowanie się ustroju przy różnych parametrach charakteryzujących ortotropię i wpływ pominięcia całek szczególnych równań Reissnera na rozwiązanie.

1. WSTĘP

Przedmiotem pracy jest analiza problemu zginania cienkiej, małowyniosłej, sferycznej powłoki ortotropowej o stałej grubości, wykonanej z materiału podlegającego prawu Hooke'a i znajdującej się w obrotowo-symetrycznym stanie przemieszczenia i naprężenia.

Rozwiązanie ogólne uzyskamy na podstawie równań H. Reissnera [1, 2 i 3] dla przypadku ortotropii, które po odpowiednich uproszczeniach wynikających z małej wyniosłości powłoki scałkujemy za pomocą funkcji Bessela i szeregów potęgowych (całki szczególne). Inne rozwiązanie omawianego problemu można otrzymać, wykorzystując równania Własowa powłok o małej wyniosłości.

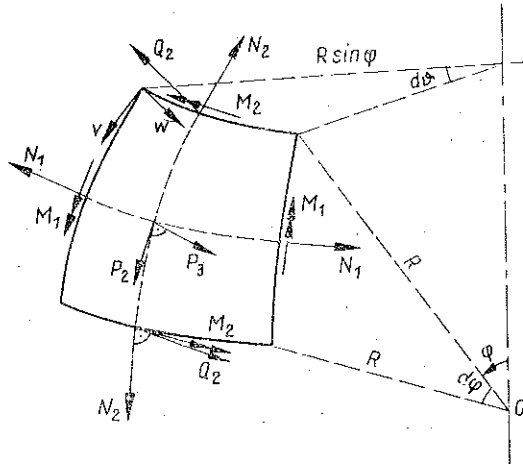
Zbadano również wpływ różnych parametrów charakteryzujących ortotropię na wielkości statyczne i geometryczne występujące w rozważanym ustroju oraz określono wpływ na rozwiązanie całek szczególnych równań H. Reissnera w przypadku obciążenia powłoki ciężarem własnym.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA I ZWIĄZKI. ROZWIĄZANIE OGÓLNE

Przyjmujemy układ współrzędnych uogólnionych φ i ϑ (rys. 1). Układ równań równowagi ma w rozważanym przypadku postać następującą [1 i 2]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{dN_2}{d\varphi} + (N_2 - N_1) \operatorname{ctg} \varphi - Q_2 + Rp_2 &= 0, \\ \frac{dQ_2}{d\varphi} + Q_2 \operatorname{ctg} \varphi + N_1 + N_2 + Rp_3 &= 0, \\ \frac{dM_2}{d\varphi} + (M_2 - M_1) \operatorname{ctg} \varphi - RQ_2 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie N_1, N_2 oznaczają siły podłużne, Q_2 siłę poprzeczną, M_1, M_2 momenty zginające, p_2, p_3 składowe obciążenia zewnętrznego oraz R promień sfery (rys. 1).



Rys. 1

Związki fizyczne w przypadku ortotropii przyjmujemy w postaci

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{C_1}{R} \left[(v \operatorname{ctg} \varphi - w) + v_1 \left(\frac{dv}{d\varphi} - w \right) \right] - C_1 (\dot{\varepsilon}_1 + v_1 \dot{\varepsilon}_2), \\
 N_2 &= \frac{C_2}{R} \left[\left(\frac{dw}{d\varphi} - w \right) + v_2 (v \operatorname{ctg} \varphi - w) \right] - C_2 (\dot{\varepsilon}_2 + v_2 \dot{\varepsilon}_1), \\
 M_1 &= -\frac{D_1}{R} \left(\chi \operatorname{ctg} \varphi + v_1 \frac{d\chi}{d\varphi} \right) - D_1 (\dot{\kappa}_1 + v_1 \dot{\kappa}_2), \\
 M_2 &= -\frac{D_2}{R} \left(\frac{d\chi}{d\varphi} + v_2 \chi \operatorname{ctg} \varphi \right) - D_2 (\dot{\kappa}_2 + v_2 \dot{\kappa}_1),
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

gdzie

$$C_\alpha = \frac{E_\alpha h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad D_\alpha = \frac{C_\alpha h^2}{12} \quad (\alpha = 1, 2),
 \tag{2.3}$$

a ponadto

$$\chi = \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\varphi} + v \right)
 \tag{2.4}$$

jest kątem obrotu stycznej do południka, w oraz v są odpowiednio przemieszczeniem normalnym i południkowym, h oznacza grubość powłoki, $\dot{\varepsilon}_\alpha, \dot{\kappa}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) — odkształcenia wstępne lub termiczne, natomiast E_α, ν_α moduły Younga i współczynniki Poissona odpowiednio w kierunku równoleżnikowym i południkowym, przy czym zachodzi znany związek

$$E_1 \nu_1 = E_2 \nu_2.
 \tag{2.5}$$

Związki fizyczne (2.2) zachowują swoją ważność dla tzw. ortotropii technicznej, jeśli powłoka jest zbudowana symetrycznie względem środkowej powierzchni.

Stosując znane postępowanie [1, 2 i 3] sprowadzamy równania (2.1) i związki (2.2) do układu równań różniczkowych Reissnera

$$(2.6) \quad \begin{aligned} L(Q_2) + \nu_2 Q_2 - E_1 h \chi &= F, \\ L(\chi) - \nu_2 \chi + \frac{R_2}{D_2} Q_2 &= G, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.7) \quad \begin{aligned} L(\dots) &= \frac{d^2(\dots)}{d\varphi^2} + \frac{d(\dots)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - \alpha(\dots) \operatorname{ctg}^2 \varphi, & \alpha &= \frac{E_1}{E_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \\ F &= (1 + \nu_2) R p_2 - R \frac{dp_3}{d\varphi} - (1 - \alpha) \frac{P}{\sin^2 \varphi} \operatorname{ctg} \varphi + \\ &+ E_1 h \left[\frac{d\dot{\varepsilon}_1}{d\varphi} + (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2) \operatorname{ctg} \varphi \right], \\ G &= -R \left\{ \frac{d}{d\varphi} (\dot{\kappa}_2 + \nu_2 \dot{\kappa}_1) + [(1 - \nu_2) \dot{\kappa}_2 - (\alpha - \nu_2) \dot{\kappa}_1] \operatorname{ctg} \varphi \right\}, \\ P &= P^0 + R \int_{\varphi}^{\varphi_0} (p_2 \sin^2 \alpha + p_3 \cos \alpha \sin \alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

przy czym $P^0/\sin \bar{\varphi}$ oznacza intensywność składowej pionowej obciążenia górnego brzegu powłoki o współrzędnej $\varphi = \bar{\varphi}$.

Po wyznaczeniu wielkości Q_2 i χ określamy siły N_1, N_2 ze wzorów

$$(2.8) \quad N_1 = -\frac{dQ_2}{d\varphi} + \frac{P}{\sin^2 \varphi} - R p_3, \quad N_2 = -Q_2 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{P}{\sin^2 \varphi},$$

oraz przemieszczenia v, w ze wzorów

$$(2.9) \quad \begin{aligned} v &= \frac{R \sin \varphi}{E_1 h} \int \left[(1 + \nu_2) \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{Q_2}{\sin \varphi} \right) + (1 - \alpha) \frac{Q_2 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + (1 + \nu_2) \frac{R p_3}{\sin \varphi} - \right. \\ &\left. - (2\nu_2 + 1 + \alpha) \frac{P}{\sin^3 \varphi} + \frac{E_1 h}{\sin \varphi} (\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1) \right] d\varphi, \\ w &= v \operatorname{ctg} \varphi - \frac{R}{E_1 h} (N_1 - \nu_2 N_2) - R \dot{\varepsilon}_1. \end{aligned}$$

W równaniach (2.6) można rozdzielić niewiadome:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} LL(Q_2) + \mu^4 Q_2 &= \tilde{F}, \\ LL(\chi) + \mu^4 \chi &= \tilde{G}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \tilde{F} &= L(F) - v_2 F + E_1 hG, \\
 \tilde{G} &= L(G) + v_2 G - \frac{R^2}{D_2} F, \\
 \mu^4 &= \frac{E_1 hR^2}{D_2} - v_2^2 = \frac{12\alpha R^2}{h^2} (1 - v_1 v_2) - v_2^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Przedstawiając równanie jednorodne (2.10)₂ w postaci

$$(L + i\mu^2)(L - i\mu^2)\chi = 0, \quad i = \sqrt{-1},$$

wniosujemy, że w celu określenia całki ogólnej χ_0 wystarczy rozwiązać równanie

$$L(\chi_0) + i\mu^2 \chi_0 = 0. \tag{2.12}$$

Układ równań (2.6) jest rzędu czwartego, zatem rozwiązanie ogólne można napisać w postaci

$$\begin{aligned}
 \chi(\varphi) &= \frac{R^2}{D_2} \left[\bar{\chi}_s(\varphi) + \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \chi_i(\varphi) \right], \\
 Q_2(\varphi) &= \bar{Q}_s(\varphi) + \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \bar{Q}_i(\varphi),
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

gdzie $R^2/D_2 \bar{\chi}_s, \bar{Q}_s$ są całkami szczególnymi równań (2.6) lub (2.10) χ_i ($i=1, 2, 3, 4$) są niezależnymi całkami równania jednorodnego (2.10)₂ \bar{Q}_i na podstawie równania jednorodnego (2.6)₂ są następujące:

$$\bar{Q}_i = L(\chi_i) - v_2 \chi_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \tag{2.14}$$

oraz \bar{A}_i są stałymi całkowania.

W przypadku powłok o małej wyniosłości, wobec niewielkiego zakresu zmienności kąta φ , można zastąpić funkcje trygonometryczne pierwszymi wyrazami rozwinięć w szereg Taylora (Laurenta):

$$\text{ctg } \varphi = \frac{1}{\varphi}, \quad \sin \varphi = \varphi, \quad \cos \varphi = 1. \tag{2.15}$$

Wykorzystując (2.15) i podstawiając (2.13) do (2.8), (2.2)_{3,4} i (2.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{P}{\varphi^2} - Rp_3 - \left(\frac{d\bar{Q}_s}{d\varphi} + \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \frac{d\bar{Q}_i}{d\varphi} \right), \\
 N_2 &= -\frac{P}{\varphi^2} - \left(\frac{\bar{Q}_s}{\varphi} + \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \frac{\bar{Q}_i}{\varphi} \right), \\
 M_1 &= -\alpha R \left[\frac{\bar{\chi}_s}{\varphi} + v_1 \frac{d\bar{\chi}_s}{d\varphi} + \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \left(\frac{\chi_i}{\varphi} + v_1 \frac{d\chi_i}{d\varphi} \right) \right] - D_1 (\dot{\kappa}_1 + v_1 \dot{\kappa}_2),
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

$$(2.16) \quad M_2 = -R \left[v_2 \frac{\bar{\chi}_s}{\varphi} + \frac{d\bar{\chi}_s}{d\varphi} + \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \left(v_2 \frac{\chi_i}{\varphi} + \frac{d\chi_i}{d\varphi} \right) \right] - D_2 (\dot{\kappa}_2 + v_2 \dot{\kappa}_1),$$

$$v = \frac{R}{E_1 h} \left\{ v_p + (1 + v_2) \bar{Q}_s + (1 - \alpha) \bar{V}_s + \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i [(1 + v_2) \bar{Q}_i + (1 - \alpha) \bar{V}_i] \right\},$$

$$w = \frac{R}{E_1 h} \left\{ \frac{v_p}{\varphi} + \frac{\bar{Q}_s}{\varphi} + (1 - \alpha) \frac{\bar{V}_s}{\varphi} + \frac{d\bar{Q}_s}{d\varphi} + \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \left[\frac{\bar{Q}_i}{\varphi} + \frac{d\bar{Q}_i}{d\varphi} + (1 - \alpha) \frac{\bar{V}_i}{\varphi} \right] + R p_3 - \frac{(1 + v_2) P}{\varphi^2} - E_1 h \dot{\varepsilon}_1 \right\},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$v_p = \varphi \int \frac{1}{\varphi} \left[R(1 + v_2) p_3 - (2v_2 + 1 + \alpha) \frac{P}{\varphi^2} + E_1 h (\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1) \right] d\varphi,$$

$$(2.17) \quad \bar{V}_s = \sin \varphi \int \frac{\bar{Q}_s \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi = \varphi \int \frac{\bar{Q}_s}{\varphi^2} d\varphi,$$

$$\bar{V}_i = \sin \varphi \int \frac{Q_i \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi = \varphi \int \frac{Q_i}{\varphi^2} d\varphi.$$

Znajdziemy z kolei całki szczególne \bar{Q}_s , $R^2/D_2 \bar{\chi}_s$ równań (2.6) przy uproszczeniach (2.15) w przypadku, gdy

$$(2.18) \quad F_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \varphi^{n-3}, \quad \frac{D_2}{R^2} G_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n+2} \varphi^n.$$

Wielkości \bar{Q}_s , $\bar{\chi}_s$ poszukujemy w postaci

$$(2.19) \quad \bar{\chi}_s(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^n, \quad \bar{Q}_s(\varphi) = \sum_{n=-1}^{\infty} d_n \varphi^n,$$

otrzymując na współczynniki c_n , d_n następujący ciąg związków rekurencyjnych:

$$(2.20) \quad d_{-1} = \frac{\gamma - 1}{1 - \alpha}, \quad d_0 = -\frac{\gamma_0}{\alpha},$$

$$d_1 = \frac{\gamma_1 - v_2 d_{-1}}{1 - \alpha}, \quad c_1 = -\frac{d_{-1}}{1 - \alpha},$$

$$[(n+2)^2 - \alpha] a_{n+2} + v_2 a_n - \beta_0 c_n = \gamma_{n+2},$$

$$[(n+2)^2 - \alpha] c_{n+2} - v_2 c_n + d_n = \delta_{n+2},$$

$$n=0, 1, 2, 3, \dots, \quad \alpha \neq 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots,$$

gdzie

$$(2.21) \quad \beta_0 = \frac{E_1 h R^2}{D^2} = \frac{12\alpha R^2}{h^2} (1 - v_1 v_2) = \mu^4 + v_2^2.$$

Podstawiając (2.19) do (2.17)₂ znajdujemy

$$(2.22) \quad \bar{V}_s = -\frac{d_{-1}}{2\varphi} - a_0 + \varphi d_1 \ln \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{n-1} \varphi^n.$$

Następnie określimy wielkości χ_i , \bar{Q}_i , \bar{V}_i ($i=1, 2, 3, 4$).

Stosując w równaniu (2.12) podstawienia

$$(2.23) \quad z = \mu \sqrt{i} \varphi = \sqrt{i} \psi, \quad \psi = \mu \varphi, \quad \beta = \sqrt{\alpha},$$

sprowadzamy je do równania Bessela rzędu β :

$$(2.24) \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + 1 - \frac{\beta^2}{z^2} \right) \chi_0 = 0.$$

Całką nieosobliwą jest funkcja Bessela pierwszego rodzaju

$$(2.25) \quad J_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\beta+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\beta},$$

natomiast całką osobliwą funkcja

$$(2.26) \quad J_{-\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-\beta+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n-\beta}$$

dla $\beta \neq 1, 2, 3 \dots$ lub funkcja Neumanna

$$(2.27) \quad N_\beta(z) = \frac{2}{\pi} J_\beta(z) \left[\ln \left(\frac{z}{2} \right) + e \right] - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\beta-1} \frac{(\beta-n-1)!}{n!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n-\beta} + \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+\beta)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+\beta} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\beta}$$

dla $\beta=1, 2, 3, \dots$; $e=0,5772 \dots$ jest stałą Eulera, a $\Gamma(\xi)$ funkcją gamma [4].

Zatem jako funkcje χ_i ($i=1, 2, 3, 4$) możemy przyjąć

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \chi_1(\varphi) &= \operatorname{Re} J_\beta(\psi \sqrt{i}), & \chi_2(\varphi) &= \operatorname{Im} J_\beta(\psi \sqrt{i}), \\ \chi_3(\varphi) &= \operatorname{Re} J_{-\beta}(\psi \sqrt{i}), & \chi_4(\varphi) &= \operatorname{Im} J_{-\beta}(\psi \sqrt{i}), & \beta \neq 1, 2, 3 \dots, \\ \chi_3(\varphi) &= \operatorname{Re} N_\beta(\psi \sqrt{i}), & \chi_4(\varphi) &= \operatorname{Im} N_\beta(\psi \sqrt{i}), & \beta = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Na podstawie (2.12) mamy

$$(2.29) \quad \begin{aligned} L(\chi_1) &= \mu^2 \chi_2, & L(\chi_2) &= -\mu^2 \chi_1, \\ L(\chi_3) &= \mu^2 \chi_4, & L(\chi_4) &= -\mu^2 \chi_3. \end{aligned}$$

Stąd po uwzględnieniu (2.14) znajdujemy

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \bar{Q}_i &= \nu_2 \chi_i - \mu^2 \chi_{i+1}, & i &= 1, 3, \\ \bar{Q}_i &= \nu_2 \chi_i + \mu^2 \chi_{i-1}, & i &= 2, 4. \end{aligned}$$

Wykorzystując (2.25), (2.26), (2.28), (2.30), (2.17)₃, (2.23) oraz fakt, że

$$(2.31) \quad \varphi \int \frac{\bar{Q}_i}{\varphi^2} d\bar{\varphi} = \psi \int \frac{\bar{Q}_i}{\psi^2} d\psi = z \int \frac{\bar{Q}_i}{z^2} dz,$$

znajdujemy

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \bar{V}_1 &= v_2 V_1 - \mu^2 V_2, & \bar{V}_2 &= v_2 V_2 + \mu^2 V_1, \\ \bar{V}_3 &= v_2 V_3 - \mu^2 V_4, & \bar{V}_4 &= v_2 V_4 + \mu^2 V_3, \quad \beta \neq 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.33) \quad F_\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (2k + \beta - 1) \Gamma(k + \beta + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k + \beta},$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \right\} &= \begin{cases} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{cases} F_\beta(\psi \sqrt{i}), & \left. \begin{matrix} V_3 \\ V_4 \end{matrix} \right\} &= \begin{cases} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{cases} F_{-\beta}(\psi \sqrt{i}). \end{aligned}$$

Jeżeli $\beta=1$ ($\alpha=1$), to funkcje \bar{V}_i we wzorach (2.16)_{5,6} nie występują, natomiast gdy $\beta=2, 3, 4, \dots$ ($\alpha=4, 9, 16, \dots$), to wielkości \bar{V}_i ($i=3, 4$) wyznaczamy podobnie wykorzystując wzory (2.27), (2.28)_{5,6}.

Wielkości χ_i możemy przyjąć w innej, dogodnej postaci, wykorzystując fakt, że funkcje Bessela i Neumanna są kombinacją liniową uogólnionych funkcji Kelvina [4]. Niezależnymi całkami równania (2.12) są mianowicie funkcje

$$(2.34) \quad \chi_0 = \operatorname{ber}_\beta \psi - i \operatorname{bei}_\beta \psi$$

oraz

$$(2.35) \quad \begin{aligned} \chi_0 &= \operatorname{ber}_{-\beta} \psi - i \operatorname{bei}_{-\beta} \psi, & \beta &\neq 1, 2, 3, \dots, \\ \chi_0 &= \operatorname{ker}_\beta \psi - i \operatorname{kei}_\beta \psi, & \beta &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.36) \quad \begin{aligned} \operatorname{ber}_\beta \psi &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \frac{3}{4}(\beta + 2k)\pi}{k! \Gamma(\beta + k + 1)} \left(\frac{\psi}{2}\right)^{\beta + 2k}, \\ \operatorname{bei}_\beta \psi &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{3}{4}(\beta + 2k)\pi}{k! \Gamma(\beta + k + 1)} \left(\frac{\psi}{2}\right)^{\beta + 2k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ker}_\beta \psi &= (\ln 2 - e - \ln \psi) \operatorname{ber}_\beta \psi + \frac{1}{4} \pi \operatorname{bei}_\beta \psi + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\beta-1} \frac{(-1)^{\beta+k} (\beta - k - 1)!}{k!} \left(\frac{2}{\psi}\right)^{\beta-2k} \cos \frac{1}{4}(\beta + 2k)\pi + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta+k}}{k! (\beta + k)!} \left(\frac{\psi}{2}\right)^{\beta+2k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\beta+k}\right) \cos \frac{1}{4}(\beta + 2k)\pi, \end{aligned}$$

$$(2.36) \quad \text{kei}_\beta \psi = (\ln 2 - e - \ln \psi) \text{bei}_\beta \psi - \frac{1}{4} \pi \text{ber}_\beta \psi -$$

$$\text{cd.1} \quad - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\beta-1} \frac{(-1)^{\beta+k} (\beta-k-1)!}{k!} \left(\frac{2}{\psi}\right)^{\beta-2k} \sin \frac{1}{4} (\beta+2k) \pi -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta+k}}{k! (\beta+k)!} \left(\frac{\psi}{2}\right)^{\beta+2k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\beta+k}\right) \sin \frac{1}{4} (\beta+2k) \pi.$$

Przyjmujemy zatem

$$(2.37) \quad \begin{aligned} \chi_1(\varphi) &= \text{ber}_\beta \psi, & \chi_2(\varphi) &= -\text{bei}_\beta \psi, \\ \chi_3(\varphi) &= \text{ber}_{-\beta} \psi, & \chi_4(\varphi) &= -\text{bei}_{-\beta} \psi, & \beta &\neq 1, 2, 3, \dots, \\ \chi_3(\varphi) &= \text{ker}_\beta \psi, & \chi_4(\varphi) &= -\text{kei}_\beta \psi, & \beta &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\psi = \mu \varphi.$$

Wielkości \bar{Q}_i wyrażają się za pomocą (2.30), natomiast \bar{V}_i (przy $\beta \neq 1, 2, 3, \dots$) za pomocą (2.32), gdzie w tym przypadku

$$(2.38) \quad \begin{aligned} \left. \begin{aligned} V_1(\psi) \\ -V_2(\psi) \end{aligned} \right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\psi}{2}\right)^{\beta+2k}}{k! (\beta+2k-1) \Gamma(\beta+k+1)} \begin{cases} \cos \frac{3}{4} (\beta+2k) \pi \\ \sin \frac{3}{4} (\beta+2k) \pi, \end{cases} \\ V_3(\beta; \psi) &= V_1(-\beta; \psi), \\ V_4(\beta; \psi) &= V_3(-\beta; \psi). \end{aligned}$$

Przy wprowadzeniu wzorów (2.38)_{1,2} i (2.38)_{3,4} wykorzystano formuły (2.36)_{1,2}, (2.37), (2.30), (2.17), (2.23) i (2.31).

W przypadku, gdy $\beta=2, 3, 4, \dots$, znajdujemy V_i ($i=3, 4$) uwzględniając (2.36) i (2.37)_{5,6}.

Jeżeli $\beta=1$ ($\alpha=1$), co odpowiada przypadkowi izotropii, to χ_i można wyrazić za pomocą funkcji Kelvina rzędu zerowego. Mając na uwadze wzory

$$(2.39) \quad \frac{dJ_0}{dz} = -J_1, \quad \frac{dN_0}{dz} = -N_1,$$

możemy przyjąć

$$(2.40) \quad \begin{aligned} \chi_1 &= \text{ber}' \psi, & \chi_2 &= -\text{bei}' \psi, \\ \chi_3 &= \text{ker}' \psi, & \chi_4 &= -\text{kei}' \psi, \end{aligned}$$

przy czym

$$(\dots)' = \frac{d(\dots)}{d\psi}.$$

Wielkości Q_i obliczamy, podstawiając (2.40) do (2.30). Wykorzystamy również wzory na drugie pochodne funkcji Kelvina rzędu zerowego, wobec konieczności różniczkowania funkcji χ_i względem φ we wzorach (2.16) [4]:

$$(2.41) \quad \begin{aligned} \text{ber}'' \psi &= -\text{ber} \psi - \frac{1}{\psi} \text{ber}' \psi, \\ \text{bei}'' \psi &= \text{bei} \psi + \frac{1}{\psi} \text{bei}' \psi, \\ \text{ker}'' \psi &= \text{ker} \psi - \frac{1}{\psi} \text{ker}' \psi, \\ \text{kei}'' \psi &= -\text{ker} \psi - \frac{1}{\psi} \text{kei}' \psi. \end{aligned}$$

Przedstawiliśmy zatem ogólny algorytm rozwiązania omawianego problemu określając wszystkie wielkości występujące we wzorach (2.13) i (2.16).

3. PRZYKŁAD. POWŁOKA OBCIĄŻONA CIĘŻAREM WŁASNYM

Rozważmy powłokę o jednym brzegu ($\bar{\varphi}=0$), obciążoną ciężarem własnym o intensywności p odniesionej do jednostki pola środkowej powierzchni. Mamy zatem

$$(3.1) \quad p_2 = p \sin \varphi, \quad p_3 = p \cos \varphi.$$

Na podstawie (2.7)₃₋₅, (2.17)₁, (3.1) i (2.15) otrzymujemy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} R p \varphi^2, & F &= R p \left[(2 + \nu_2) \varphi - \frac{1 - \alpha}{2\varphi} \right], \\ G &= 0, & v_p &= R p \varphi \left(A + \frac{1 - \alpha}{2} \ln \varphi \right). \end{aligned}$$

Całki szczególnie równań (2.6) można po uwzględnieniu (3.2)_{2,3} (2.15) napisać w postaci

$$(3.3) \quad \chi = \frac{R^2}{D_2} \bar{\chi}_s = \frac{p R^3}{D_2} \chi_s \varphi, \quad \bar{Q}_s = R p Q_s \varphi,$$

gdzie w przypadku izotropii ($\alpha=1$) mamy

$$(3.4) \quad \chi_s = -(2 + \nu_2) \frac{1}{\mu^4}, \quad Q_s = -(1 + \nu_2) (2 + \nu_2) \frac{1}{\mu^4},$$

co można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, natomiast w przypadku ortotropii mamy

$$(3.5) \quad \chi_s = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^p \varphi^{2n}, \quad Q_s = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^p \varphi^{2n},$$

gdzie po podstawieniu (3.5) i (3.3) do równań (2.6) otrzymujemy ciąg wzorów rekurencyjnych na współczynniki c_n^p , a_n^p ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$(3.6) \quad \begin{aligned} d_0^p &= -0,5, & c_0^p &= 0, \\ [(2n+3)^2 - \alpha] d_{n+1}^p + v_2 d_n^p - \beta_0 c_n^p &= (2+v_2) \delta_{n0}, \\ [(2n+3)^2 - \alpha] c_{n+1}^p - v_2 c_n^p + d_n^p &= 0, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, & \alpha &\neq 1^2, 3^2, 5^2, \dots, \end{aligned}$$

przy czym

$$\delta_{n0} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } n > 0 \\ 1, & \text{jeśli } n = 0, \end{cases}$$

natomiast β_0 jest określone za pomocą (2.21).

Podstawiając (3.5)₂ do (3.3)₂, a następnie do (2.17)₂ znajdujemy

$$(3.7) \quad \bar{V}_s = \varphi \left(V_s - \frac{1}{2} \ln \varphi \right), \quad \alpha \neq 1,$$

gdzie

$$(3.8) \quad V_s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^p}{2n} \varphi^{2n}.$$

Uwzględniając (3.2), (3.3), (3.7), (2.30) i (2.23)₂ we wzorach (2.13), (2.16) oraz przyjmując $A_3 = A_4 = 0$ z uwagi na fakt, że $\bar{\varphi} = 0$ (brzeg górny powłoki redukuje się do bieguna sfery), otrzymujemy

$$(3.9) \quad \begin{aligned} N_1 &= -Rp \left[\frac{1}{2} + Q_s + \varphi \frac{dQ_s}{d\varphi} + \mu \sum_{i=1}^2 B_i \frac{d\chi_i}{d\psi} \right], \\ N_2 &= -Rp \left[\frac{1}{2} + Q_s + \mu \sum_{i=1}^2 B_i \frac{\chi_i}{\psi} \right], \\ Q_2 &= Rp \left[Q_s \varphi + \sum_{i=1}^2 B_i \chi_i \right], \\ M_1 &= -\alpha R^2 p \left[(1+v_1) \chi_s + v_1 \varphi \frac{d\chi_s}{d\varphi} + \mu \sum_{i=1}^2 A_i \left(\frac{\chi_i}{\psi} + v_1 \frac{d\chi_i}{d\psi} \right) \right], \\ M_2 &= -R^n p \left[(1+v_2) \chi_s + \varphi \frac{d\chi_s}{d\varphi} + \mu \sum_{i=1}^2 A_i \left(v_2 \frac{\chi_i}{\psi} + \frac{d\chi_i}{d\psi} \right) \right], \\ v &= \frac{R^2 p}{E_1 h} \left\{ [(1+v_2) Q_s + (1-\alpha) V_s + A] \varphi + \mu \sum_{i=1}^2 B_i [(1+v_2) \chi_i + (1-\alpha) V_i] \right\}, \\ w &= \frac{R^2 p}{E_1 h} \left\{ -\frac{1-v_2}{2} + 2Q_s + \varphi \frac{dQ_s}{d\varphi} + (1-\alpha) V_s + A + \right. \\ &\quad \left. + \mu \sum_{i=1}^2 B_i \left[\frac{\chi_i}{\psi} + \frac{d\chi_i}{d\psi} + (1-\alpha) \frac{V_i}{\psi} \right] \right\}, \\ \chi &= \frac{R^3 p}{D_2} \left[\chi_s \varphi + \sum_{i=1}^2 A_i \chi_i \right], \end{aligned}$$

gdzie A_1, A_2 są nowymi stałymi całkowania oraz

$$(3.10) \quad B_1 = A_1 v_2 + \mu^2 A_2, \quad B_2 = A_2 v_2 - \mu^2 A_1.$$

Funkcje $\chi_1(\psi), \chi_2(\psi)$ oraz $V_1(\psi), V_2(\psi)$ przyjmujemy odpowiednio w jednej z postaci (2.28), (2.33) lub (2.37), (2.38), lub (2.40) w przypadku izotropii.

Stałe całkowania A, A_1, A_2 możemy, po uwzględnieniu (3.10), łatwo określić, wykorzystując warunki podparcia powłoki. Zauważmy jeszcze że dla określenia sił wewnętrznych, kąta obrotu χ i przemieszczenia poziomego

$$(3.11) \quad w_p = w \sin \varphi - v \cos \varphi = w\varphi - v$$

nie jest konieczna znajomość wartości funkcji $V_i(\psi)$ ($i=1, 2, 3, 4$).

4. PRZYKŁADY LICZBOWE

Na podstawie wyprowadzonych w punkcie 3 wzorów na siły wewnętrzne i przemieszczenia sporządzono program w języku FORTRAN i wykonano obliczenia na maszynie cyfrowej ODRA 1304, przyjmując $p=3000 \text{ N/m}^2$, $R_0=15 \text{ m}$, $h=0,06 \text{ m}$, $f=0,075$, gdzie $2R_0$ oznacza rozpiętość powłoki, a f wyniosłość względną. Uwzględniono dwa rodzaje podparcia brzegu:

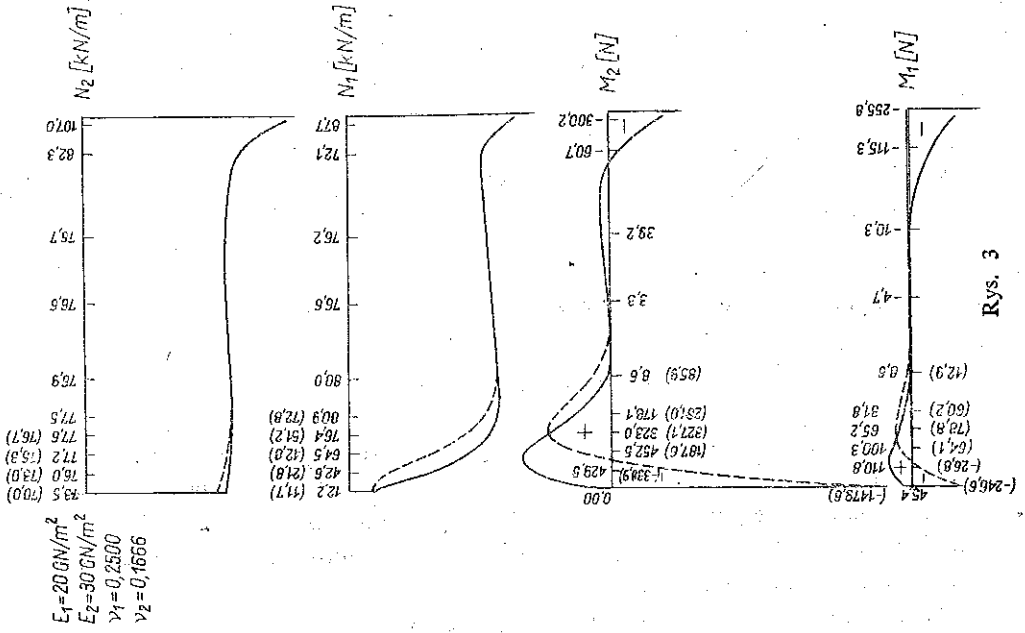
- 1) przegubowe ($v=w=M_2=0$),
- 2) utwierdzenie ($v=w=\chi=0$).

Przeprowadzono analizę zachowania się ustroju ze względu na wartość współczynnika $\alpha=E_1/E_2=v_2/\nu_1$ charakteryzującego ortotropię, przyjmując różne wartości modułów sprężystości i współczynników Poissona.

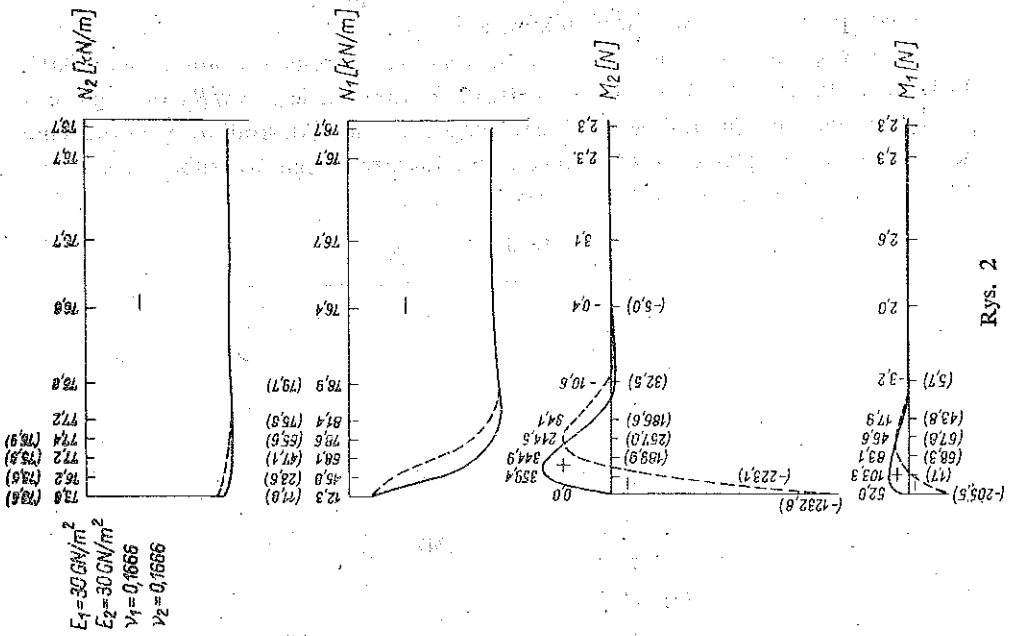
Siły wewnętrzne i przemieszczenia zestawiono na wykresach w punktach $\xi=0,02; 0,10; 0,32; 0,50; 0,70; 0,80; 0,85; 0,90; 0,95; 1,00$, gdzie $\xi=x/R_0$ oraz gdzie x jest odległością rzutu pionowego punktu leżącego na południku środkowej powierzchni powłoki od rzutu jej wierzchołka. Linia ciągła dotyczy brzegu przegubowego, a linia przerywana — brzegu utwierdzonego (rys. 2-6).

Tablica 1

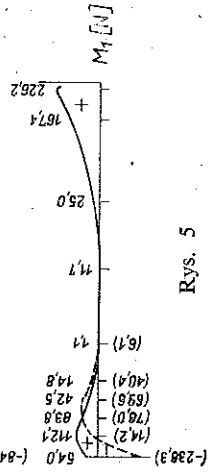
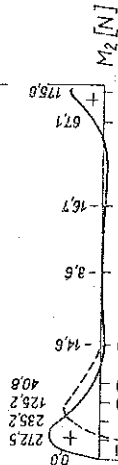
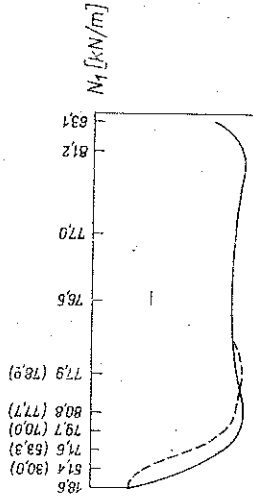
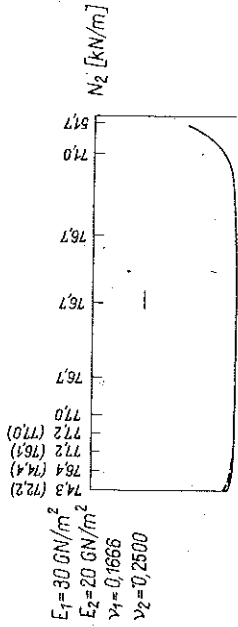
wielkość	brzeg 1 %	brzeg 2 %
$\frac{N_2^{sz} - N_2^d}{N_2^d}$	0,004	-0,001
$\frac{N_1^{sz} - N_1^d}{N_1^d}$	0,025	-0,013
$\frac{M_2^{sz} - M_2^d}{M_2^d}$	-0,247	-0,093 -1,979
$\frac{M_1^{sz} - M_1^d}{M_1^d}$	-0,430	-0,092 -0,890
$\frac{w^{sz} - w^d}{w^d}$	9,352	13,047



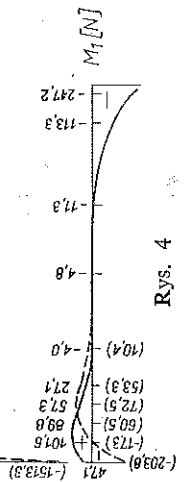
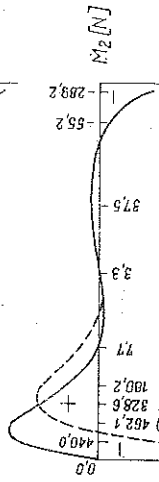
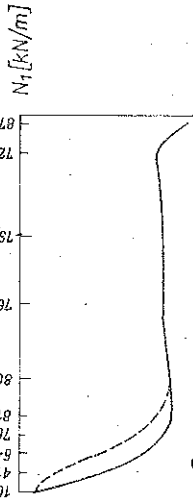
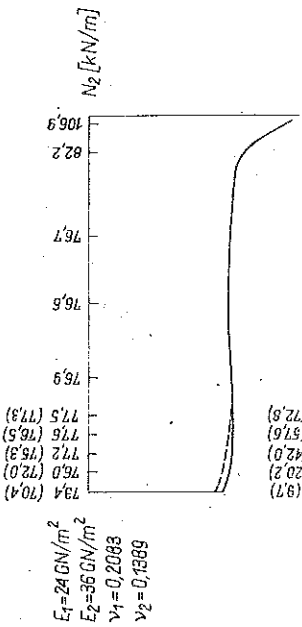
Rys. 3



Rys. 2

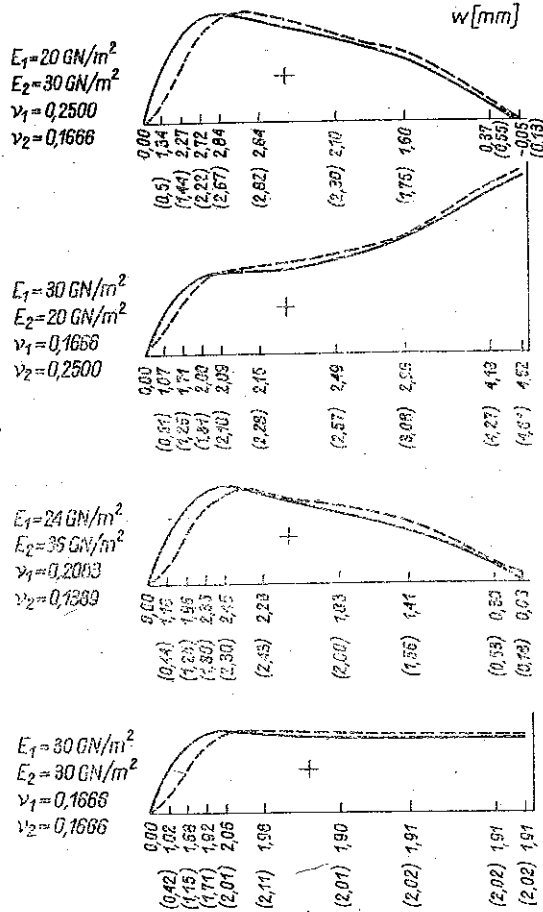


Rys. 5



Rys. 4

Zbadano również wpływ pominięcia całek szczególnych Q_s , χ_s na rozwiązanie, obliczając różnice względne między ekstremalnymi wartościami sił wewnętrznych i przemieszczenia normalnego (tablica 1; dolna wartość w drugiej kolumnie dotyczy drugiej „połówki fali”; dane jak na rys. 3).



Rys. 6

5. WNIOSKI

Z przedstawionych wykresów można wnioskować, że współczynnik α charakteryzujący ortotropię ustroju, ma istotny wpływ na siły wewnętrzne i przemieszczenia. Przy $\alpha < 1$ siły w wierzchołku dążą do $-\infty$, a przy $\alpha > 1$ do zera. Można też zauważyć istotną zmianę charakteru zmienności przemieszczenia w .

Istotnym może być też spostrzeżenie, że przy pominięciu całek szczególnych układu równań H. Reissnera znaczniejsze błędy występują tylko w przemieszczeniach (a nie w siłach wewnętrznych), które mają znaczenie drugorzędne, natomiast obliczenia zostają poważnie uproszczone i skrócone. Można przypuszczać, że również

dla innych ciągłych obciążeń (np. dla śniegu, ciśnienia gazów) takie uproszczenie nie spowoduje istotnych błędów.

Przedstawiony w pracy algorytm rozwiązania problemu można stosować do wyznaczania wielkości statycznych i geometrycznych przy praktycznie dowolnym obciążeniu obrotowo-symetrycznym — dla powłoki o jednym i dwu brzegach i różnych rodzajach podparcia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. MAZURKIEWICZ, R. NAGÓRSKI, *O równaniach powłok obrotowych obciążonych obrotowo-symetrycznie*, Arch. Inż. Łąd., 24, 1, 1978.
2. W. FLÜGGE, *Powłoki. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1972.
3. A. A. AMBARCUMIAN, *Teoria anizotropnych obołoczek*, Moskwa 1961.
4. N. W. MC LACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧМЫЙ ИЗГИБ СФЕРИЧЕСКОЙ, ПОЛОГОЙ, ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе рассмотрена упругая, ортотропная, сферическая, пологая оболочка, нагруженная осесимметричным образом. Общее решение задачи изгиба получено на основе уравнений Г. Рейсснера при помощи функций Бесселя и степенных рядов (особые интегралы). На примере оболочки с одним краем, нагруженной собственным весом, исследовано поведение устройства при разных параметрах, характеризующих ортотропию и влияние пренебрежения особыми интегралами уравнений Рейсснера на решение.

SUMMARY

ROTATIONALLY-SYMMETRIC BENDING OF A SPHERICAL, SHALLOW ORTHOTROPIC SHELL

Elastic, orthotropic, shallow spherical shell subject to rotationally symmetric loads is considered in the paper. The general solution of the bending problem is determined on the basis of the Reissner equations in terms of the Bessel functions and power series (particular integrals). Using the example of a shell with a single boundary loaded by its own weight, behaviour of the system is analyzed for various values of the orthotropy parameters; the effect of disregarding the particular integrals of the Reissner equations is considered.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 września 1978 r.