

O PEWNEJ PROCEDURZE IDENTYFIKACJI NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

BRUNON STĘPIŃSKI (WARSZAWA)

Przedstawiono szczegółowe założenia, a następnie procedurę identyfikacji układu nieliniowego o wielu stopniach swobody i o znanych wymuszeniach. Przy założeniu aproksymacji członów nieliniowych wielomianami potęgowymi zbudowano funkcję jakości i kryterium identyfikacji z wykorzystaniem równania Fokkera-Plancka-Kołmogorowa. Podano weryfikację eksperymentalną procedury. Omówiono też identyfikację układu w obecności zakłóceń.

1. WPROWADZENIE

W pracy [1] przedstawiono procedurę identyfikacji rozumianej jako budowy modelu układu dynamicznego, tj. takiej jego idealizacji, przy której, uwzględniając najważniejsze własności a odrzucając pozostałe, można uzyskać przy takich samych sygnałach wejściowych dla układu i modelu dostatecznie bliskie w (określonym sensie) sygnały wyjściowe. Rozważono nieliniowy układ mechaniczny o jednym stopniu swobody z wymuszeniem w postaci «białego szumu». Założono, że nieliniowe charakterystyki sił sprężystości i tłumienia są funkcjami ciągłymi i można je, zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa, aproksymować wielomianami. Do sformułowania funkcji jakości wykorzystano równanie Fokkera-Plancka-Kołmogorowa (równanie FPK). Znalezienie minimum funkcji jakości (kryterium identyfikacji) dało poszukiwane wartości współczynników wielomianów aproksymujących wskazane wyżej charakterystyki. Pozwoliło to zbudować model matematyczny adekwatny do badanego układu.

W niniejszym artykule zajmujemy się identyfikacją, z wykorzystaniem równania FPK, układów mechanicznych o n stopniach swobody o znanych wymuszeniach i identyfikacją układów w obecności zakłóceń. Podamy weryfikację eksperymentalną procedury.

Wszelkie rozważania w niniejszej pracy dotyczą bezpośrednio układów mechanicznych. Jednakże proponowana procedura identyfikacji może być stosowana do innych układów dynamicznych, np. elektrycznych, elektromechanicznych, jeśli tylko spełnione są założenia podane w p. 2.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA DO IDENTYFIKACJI UKŁADÓW DYNAMICZNYCH ZA POMOCĄ RÓWNIANIA FPK

Najogólniej można powiedzieć, że proponowana procedura identyfikacji może być stosowana do takich układów dynamicznych, dla których można napisać równanie FPK, jego zaś rozwiązanie wyznaczyć na podstawie wyników pomiarów

odpowiednich wielkości. Powyższe stwierdzenie obejmuje również układy, których wyrazy nieliniowe są dowolnymi funkcjami. Każde postępowanie identyfikacyjne, w tym również proces budowy modelu matematycznego układu jest, obok eksperymentu, ciągiem określonych operacji matematycznych i dlatego należy poczynić takie założenia, aby te operacje można było wykonać w możliwie prosty sposób, np. przez przyjęcie struktury wyrazów nieliniowych.

Podstawowe założenia do identyfikacji układów za pomocą równania FPK są następujące:

1. Z dokładnością do parametrów znane są równania ruchu układu dynamicznego. Są to równania różniczkowe zwyczajne dowolnego rzędu — w przypadku układów mechanicznych rzędu drugiego, przy czym dadzą się rozwikłać względem pochodnych najwyższego rzędu i sprowadzić do układów równań rzędu pierwszego (normalne układy równań).

2. Współczynniki równań ruchu są zdeterminowanymi funkcjami swoich argumentów i nie zależą w sposób jawny od czasu.

3. Aprioryczne informacje o układzie pozwalają przyjąć, że wyrazy nieliniowe w równaniach ruchu są jednoargumentowymi funkcjami ciągłymi w swoich przedziałach zmienności. Wobec tego, na podstawie twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji funkcji ciągłej [2], można je zastąpić wielomianami potęgowymi stopnia wyższego niż 1. Współczynniki tych wielomianów nie są znane.

4. Wymuszenia (wejścia) działające na układ są normalnymi stacjonarnymi⁽¹⁾ procesami stochastycznymi i analityczne przedstawienia ich gęstości widmowych są funkcjami wymiernymi [4].

5. Układ dynamiczny rozpatrujemy w stanie ruchu ustalonego, tj. ruchu odpowiadającego chwilom na tyle odległym od chwili początkowej, że można przyjąć, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa przejścia występująca w równaniu FPK nie zależy w sposób jawny od czasu.

6. Na podstawie wyników pomiarów możliwe jest obliczenie wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa przejścia.

Z założeń 2, 4 i 5 wynika [3], że wyjścia (reakcje) układu będą procesami stacjonarnymi.

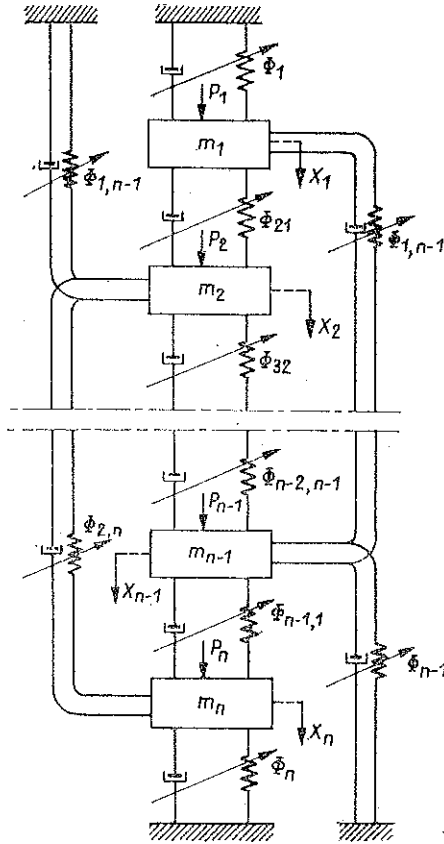
Mając na uwadze uproszczenie rachunkowej strony rozważanych problemów, w dalszym ciągu pracy będziemy przyjmowali, że wymuszenia są normalnymi «białymi szumami» o zerowej wartości średniej i funkcji korelacji równej delcie Diraca ($R(\tau) = \delta(\tau)$), co nie stanowi istotnego ograniczenia [4].

Celem niniejszej pracy jest opracowanie procedury budowy modelu dyskretnego nieliniowego układu dynamicznego poddanego działaniu wymuszeń, będących procesami stochastycznymi, przy założeniu aproksymacji wyrazów nieliniowych wielomianami potęgowymi, których współczynniki wyznacza się przez minimalizację funkcji jakości zbudowaną z wykorzystaniem równania FPK.

(1) Mówiąc w dalszym ciągu o procesach stacjonarnych będziemy mieli na myśli stacjonarność w szerokim sensie [4].

3. IDENTYFIKACJA UKŁADU MECHANICZNEGO O n STOPNIACH SWOBODY O ZNANYCH WYMUSZENIACH

Przyjmijmy, że układ mechaniczny z wystarczającą dokładnością może być reprezentowany przez nieliniowy, dyskretny model fizyczny przedstawiony na rys. 1 [5]. Jeżeli założymy, że na ciała o masach skupionych m_i , $i=1, 2, \dots, n$ dzia-



Rys. 1

ją siły zewnętrzne $P_i(t)$ będące normalnymi stacjonarnymi procesami stochastycznymi, to współrzędne uogólnione $X_i(t)$ opisujące ruchy tych ciał będą również stacjonarnymi procesami stochastycznymi. Układ stochastycznych różniczkowych równań ruchu ma następującą postać:

$$(3.1) \quad \ddot{X}_i(t) = \Phi_i(X_i, \dot{X}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Phi_{i,j}(X_i - X_j, \dot{X}_i - \dot{X}_j) + \frac{1}{m_i} P_i(t), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Występujące w układzie (3.1) funkcje nieliniowe $\Phi_i(X_i, \dot{X}_i)$ opisują reakcje (odniesione do jednostki masy) odnoszące się do nieliniowych członów tłumieniowo-

-sprężystych łączących i -te ciało (o masie m_i) z nieruchomym punktem utwierdzenia układu, a nieliniowe funkcje $\Phi_{ij}(X_i - X_j, \dot{X}_i - \dot{X}_j)$ przedstawiają reakcje (również odniesione do jednostki masy) odnoszące się do członów łączących i -te ciało z j -tym.

Założmy, że jest możliwe rozdzielenie reakcji występujących w układzie na reakcje zależne od przemieszczeń $X_i(t)$ i reakcje zależne od prędkości $\dot{X}_i(t)$. Wówczas możemy napisać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Phi_i(X_i, \dot{X}_i) &= K_{ii}(X_i) + C_{ii}(\dot{X}_i), \\ \Phi_{ij}(X_i - X_j, \dot{X}_i - \dot{X}_j) &= K_{ij}(X_i - X_j) + C_{ij}(\dot{X}_i - \dot{X}_j) \quad i, j=1, 2, \dots, n, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Jeżeli przyjmiemy, że funkcje po prawej stronie powyższych wzorów są funkcjami ciągłymi to można je zastąpić wielomianami:

$$(3.3) \quad K_{ij}(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{r_{ij}} k_{ijk} X_{ij}^k, \quad C_{ij}(\dot{X}_{ij}) = \sum_{l=1}^{s_{ij}} c_{ijl} \dot{X}_{ij}^l, \quad i, j=1, 2, \dots, n,$$

przy czym

$$(3.3') \quad X_{ij} = \begin{cases} X_i & \text{dla } i=j, \\ X_i - X_j & \text{dla } i \neq j, \end{cases} \quad \dot{X}_{ij} = \begin{cases} \dot{X}_i & \text{dla } i=j, \\ \dot{X}_i - \dot{X}_j & \text{dla } i \neq j, \end{cases} \quad i, j=1, 2, \dots, n.$$

Funkcje $K_{ij}(X_{ij})$ i $C_{ij}(\dot{X}_{ij})$ będziemy nazywali charakterystykami odpowiednio sił sprężystości i sił tłumienia.

Współczynniki wielomianów po prawej stronie wzorów (3.3) powinny mieć takie wartości, aby funkcje $K_{ij}(X_{ij})$ i $C_{ij}(\dot{X}_{ij})$ spełniały warunki zgodne z własnościami dysypatywnych układów mechanicznych:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} K_{ij}(X_{ij}) X_{ij} &> 0 \quad \text{dla } X_{ij} \neq 0, \\ C_{ij}(\dot{X}_{ij}) \dot{X}_{ij} &> 0 \quad \text{dla } \dot{X}_{ij} \neq 0, \quad i, j=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Warunki

$$K_{ij}(0) = 0, \quad C_{ij}(0) = 0, \quad i, j=1, 2, \dots, n$$

są spełnione dla dowolnych współczynników wielomianów definiujących charakterystyki.

Aby zbudować model układu opisanego równaniami ruchu (3.1) przy przyjętych założeniach, należy wyznaczyć elementy macierzy wierszowych:

$$(3.5) \quad \mathbf{k}_{ij} = [k_{ij1}, k_{ij2}, \dots, k_{ijr_{ij}}], \quad \mathbf{c}_{ij} = [c_{ij1}, c_{ij2}, \dots, c_{ijs_{ij}}],$$

oraz masy m_i , $i=1, 2, \dots, n$.

Uwzględniając wzory (3.2) i (3.3), można równania ruchu (3.1) napisać w następującej formie:

$$(3.6) \quad \ddot{X}_i = H_i(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}; \mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}) + \frac{1}{m_i} P_i(t), \quad i=1, 2, \dots, n,$$

gdzie

$$\mathbf{X} = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)], \quad \dot{\mathbf{X}} = [\dot{X}_1(t), \dot{X}_2(t), \dots, \dot{X}_n(t)].$$

Wprowadzając oznaczenie

$$Y_k = X_i \quad \text{dla} \quad k = 2i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

przekształcimy układ równań (3.6) do równoważnego mu układu równań normalnych:

$$(3.7) \quad \dot{Y}_k = H_k(Y; \mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}) + \frac{1}{m_k} P_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

przy czym

$$\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_{2n}] \equiv [X_1, \dot{X}_1, X_2, \dot{X}_2, \dots, X_n, \dot{X}_n],$$

$$H_k = \begin{cases} Y_{2i-1} & \text{dla } k = 2i - 1, \\ H_{2i} & \text{dla } k = 2i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{1}{m_k} = \begin{cases} \frac{1}{m_i} & \text{dla } k = 2i, \\ 0 & \text{dla pozostałych } k, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Jeżeli przyjmiemy, że wymuszenia $P_k(t)$ są niezależnymi «białymi szumami» i spełniają założenia podane wyżej, to [4] proces wektorowy

$$\mathbf{Y} = [Y_1(t), Y_2(t) \dots Y_{2n}(t)] \equiv [X_1(t), \dot{X}_1(t), X_2(t), \dot{X}_2(t), \dots, X_n(t), \dot{X}_n(t)]$$

jest dyfuzyjnym, jednorodnym procesem Markowa o wektorze przenoszenia $\mathbf{H} = [H_1(t), H_2(t), \dots, H_{2n}(t)]$ i macierzy dyfuzji $\mathbf{B} = \{b_{kl}\}$, przy czym

$$b_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{m_k^2} & \text{dla } k=l, \quad \text{gdy } k, l \text{ parzyste;} \\ 0 & \text{dla pozostałych } k, l, \quad k, l = 1, 2, \dots, 2n. \end{cases}$$

Wobec tego funkcja gęstości prawdopodobieństwa przejścia $f(\mathbf{y}) = f(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$ procesu $\mathbf{Y}(t)$ spełnia równanie FPK:

$$(3.8) \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_{2k-1}} (H_{2k-1} \cdot f) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{m_k^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_{2k}} (H_{2k} \cdot f).$$

Po prawej stronie powyższego związku zgrupowane są wyrazy zawierające poszukiwane parametry. Wobec tego można go napisać krócej:

$$(3.9) \quad L(\mathbf{y}) = P(\mathbf{y}; \mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{m}),$$

gdzie \mathbf{c}_{ij} i \mathbf{k}_{ij} są zdefiniowane związkami (3.5) oraz

$$(3.10) \quad \mathbf{m} = [0, m_1, 0, m_2, \dots, 0, m_n].$$

W celu sformułowania funkcji jakości skorzystamy z pojęcia metryki w przestrzeni $\mathcal{L}^2(\mathcal{Y})$ [6], tj. przestrzeni złożonej ze wszystkich funkcji $g(\mathbf{y}) = g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ określonych w obszarze \mathcal{Y} takich, że

$$\int_{\mathcal{Y}} [g(\mathbf{y})]^2 d\mathbf{y} < \infty.$$

Metrykę w tej przestrzeni definiuje się następująco:

$$(3.11) \quad \rho(h, g) = \left\{ \int_{\mathcal{Y}} [h(y) - g(y)]^2 dy \right\}^{1/2}, \quad h \in \mathcal{L}^2, \quad g \in \mathcal{L}^2.$$

Przyjmijmy, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa przejścia została wyznaczona doświadczalnie i jej przedstawienie analityczne (np. drogą aproksymacji danych z pomiaru) ma postać

$$(3.12) \quad \begin{aligned} f(y) &= f(y_1, y_2, \dots, y_{2n}), \quad y \in \mathcal{Y}, \\ \mathcal{Y} &= \{(y_1, y_2, \dots, y_{2n}) : a_{11} < y_1 < a_{12}, a_{21} < y_2 < a_{22}, \dots, a_{2n-1} < y_{2n} < a_{2n2}\}. \end{aligned}$$

Uwzględniając wzory (3.3) możemy teraz obliczyć lewą i prawą stronę równania (3.8). Oznaczając je (przez analogię do (3.9)) jako $\hat{L}(y)$ i $\hat{P}(y; \mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{m})$ i zakładając, że $\hat{L} \in \mathcal{L}^2$ i $\hat{P} \in \mathcal{L}^2$, nietrudno spostrzec, że odległość pomiędzy \hat{L} i \hat{P} w sensie metryki (3.11) będzie funkcją parametrów \mathbf{k}_{ij} , \mathbf{c}_{ij} , \mathbf{m} . Kwadrat tej odległości będziemy nazywali funkcją jakości:

$$(3.13) \quad J(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{m}) = \int_{\mathcal{Y}} [\hat{L}(y) - \hat{P}(y; \mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{m})]^2 dy.$$

Stąd mamy następujące kryterium identyfikacji:

$$(3.14) \quad J(\mathbf{k}_{ij}^*, \mathbf{c}_{ij}^*, \mathbf{m}^*) = \min_{\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{m}} J(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{m}).$$

Powyższy związek oznacza, że poszukujemy takich wartości \mathbf{k}_{ij}^* , \mathbf{c}_{ij}^* , \mathbf{m}^* , przy których odległość w sensie metryki (3.11) pomiędzy punktami (elementami) \hat{L} i \hat{P} przestrzeni \mathcal{L}^2 osiąga minimum.

Warunek konieczny dla minimum w zastosowaniu do funkcji (3.13) daje:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{m})}{\partial \mathbf{k}_{ij}} &= 0, \\ \frac{\partial J(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{m})}{\partial \mathbf{c}_{ij}} &= 0, \\ \frac{\partial J(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} &= 0. \end{aligned}$$

Jest to układ $\sum_{i,j=1}^n r_{ij} + \sum_{i,j=1}^n s_{ij} + n$ równań algebraicznych liniowych niejednorodnych. Rozwiązaniem układu są poszukiwane parametry, tzn. elementy macierzy wierszowych zdefiniowanych za pomocą wzorów (3.5) i (3.10).

Wzory (3.13) i (3.15) są użyteczne wtedy, gdy znane jest przedstawienie analityczne funkcji $f(y)$. Jeśli $f(y)$ jest dana w postaci tablicy, to całkę (3.13) należy zastąpić odpowiednią sumą skończoną. Wówczas działania (3.13) i (3.15) oparte są na odpowiednich procedurach numerycznych.

Pozostaje jeszcze sprawdzenie, czy dla obliczonych parametrów k_{ij} , c_{ij} spełnione są warunki (3.4) w przedziałach zmienności argumentów X_{ij} , \dot{X}_{ij} zdefiniowanych wzorami (3.3). Ze sposobu wyznaczania funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa (3.12) [7] i z przyjętych oznaczeń $Y_{2i-1} = X_i$, $Y_{2i} = \dot{X}_i$, $i=1, 2, \dots, n$ wynika, że

$$(3.16) \quad \begin{aligned} a_{2i-1,1} < X_i < a_{2i-1,2}, \\ a_{2j-1,1} < X_j < a_{2j-1,2}, \\ a_{2i,1} < \dot{X}_i < a_{2i,2}, \\ a_{2j,1} < \dot{X}_j < a_{2j,2}, \quad i, j=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Łącząc powyższe nierówności otrzymamy, że warunki (3.4) należy sprawdzić w przedziałach:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} a_{2i-1,1} - a_{2j-1} < X_i - X_j < a_{2i-1,2} - a_{2j-1,2}, \\ a_{2i,1} - a_{2j,1} < \dot{X}_i - \dot{X}_j < a_{2i,2} - a_{2j,2}, \quad i, j=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Dla $i=j$ mamy zgodnie z oznaczeniem (3.3) $X_{ii} = X_i$ oraz $\dot{X}_{ii} = \dot{X}_i$ i odpowiednie przedziały określone są wzorami (3.16). Mając wyznaczone przedziały zmienności argumentów warunki (3.4) można łatwo sprawdzić sporządzając wykresy, przy czym przedziały zmienności każdego z argumentów są identyczne z przedziałami, w których odpowiadające im funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa przyjmują wartości różne od zera. Jeżeli okaże się, że warunki te nie są spełnione, należy proces identyfikacji powtórzyć przy zmiennej postaci wielomianów aproksymujących poszukiwane charakterystyki, np. zmieniając stopień wielomianu.

W opisie ruchu układów mechanicznych nieliniowe charakterystyki siły sprężystości i siły tłumiącej przyjmuje się często w postaci zaproponowanej przez Duffinga:

$$(3.18) \quad K(X) = k_1 X + k_2 X^3, \quad C(\dot{X}) = c_1 \dot{X} + c_2 \dot{X}^3.$$

Przyjęcie do identyfikacji takich postaci charakterystyk jest bardzo wygodne, gdyż jeśli tylko z rozwiązania układu równań otrzymamy nieujemne wartości parametrów k_1, k_2, c_1, c_2 , to warunki (3.4) będą spełnione dla dowolnie dużych wartości argumentów.

Z tych samych powodów przyjęcie charakterystyk w postaci

$$K(X) = \sum_{k=1}^r k_k X^{2k-1}, \quad C(\dot{X}) = \sum_{l=1}^s c_l \dot{X}^{2l-1}$$

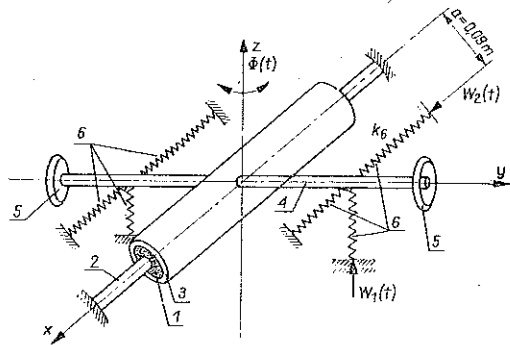
jest wygodniejsze, lecz przyjęcie charakterystyk w postaci (3.3) może, w pewnych przypadkach, lepiej odtwarzać ich rzeczywiste przebiegi.

Pokazaliśmy, że przy założeniu, iż ciągłe nieliniowe charakterystyki siły tłumienia i siły sprężystości mają postać wielomianów, można, wykorzystując równanie FPK, zbudować model matematyczny dyskretnego układu mechanicznego pod-

danego wymuszeniu siłami będącymi procesami stochastycznymi. Model rozważanego układu jest następujący:

$$(3.19) \quad \ddot{X}_i = \sum_{k=1}^{r_{ii}} k_{iik}^* X^k + \sum_{i=1}^{s_{ii}} c_{iil}^* \dot{X}^l + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left\{ \sum_{k=1}^{r_{ij}} k_{ijk}^* (X_i - X_j) + \sum_{l=1}^{s_{ij}} c_{ijl}^* (\dot{X}_i - \dot{X}_j) \right\} + \frac{1}{m_i^*} P_i(t), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Efektywność procedury najlepiej jest sprawdzić na podstawie wyników eksperymentu technicznego. Opisana procedura jest, o ile wiadomo, nową i dotychczas nie stosowaną w praktyce. Z tych powodów dla jej sprawdzenia najlepszym wydaje się być obiekt o prostej konstrukcji i znanych już własnościach dynamicznych. Dlatego pokażemy przykład realizacji procedury identyfikacji układu o jednym stopniu swobody. Wykorzystamy wyniki eksperymentu przeprowadzonego przez A. BARWICKIEGO i L. PŁONECKIEGO [8] w celu identyfikacji układu metodą inną niż prezentowana w niniejszym artykule. Jak widać, możliwe będzie porównanie wyników identyfikacji otrzymanych różnymi metodami. Szkic badanego obiektu pokazano na rys. 2.



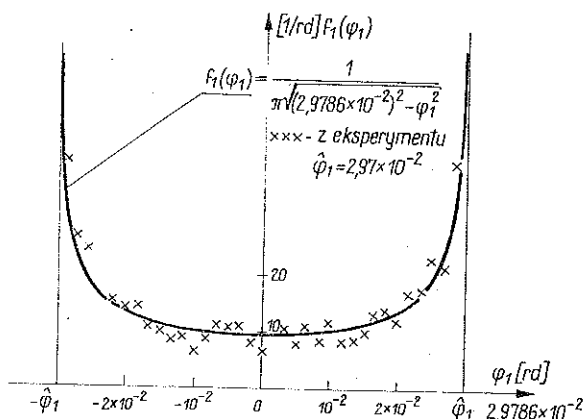
Rys. 2

Głównym elementem odkształcanym jest tuleja gumowa 1 (tzw. *silentblock*) wewnętrzną powierzchnią przywulkanizowana do nieruchomego trzpienia 2, powierzchnią zaś zewnętrzną do tulei metalowej 3, w której osadzone są ramiona 4 wraz z ciężarkami 5. W układzie tym tuleja 3 wraz z ramionami 4 i ciężarkami 5 stanowi nieodkształcalną bryłę o sześciu stopniach swobody. Dodatkowo zamocowane sprężyny śrubowe 6 służą do stabilizacji drgań oraz do przenoszenia kinematycznych wymuszeń $W_1(t)$ i $W_2(t)$, a ponadto umożliwiają, przy odpowiednio ukierunkowanych wymuszeniach, drgania selektywne, gdy układ drga jak układ o dwóch lub jednym stopniu swobody.

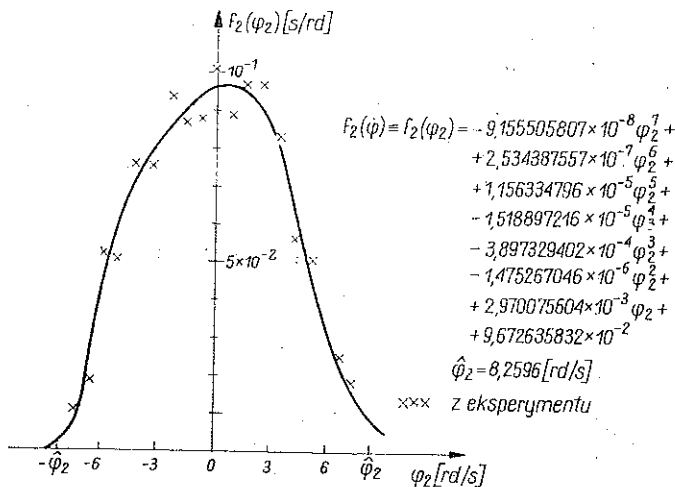
Spośród realizacji wielu wariantów pomiarów wymienionych w pracy [8] wybrano do weryfikacji procedury identyfikacji za pomocą równania FPK wariant, gdy obiekt (rys. 2) drgał jak układ o jednym stopniu swobody realizując jedynie

ruch obrotowy tulei 3 dookoła osi Z. Technika przeprowadzania pomiarów i użyta aparatura opisana jest w pracy [8]; w pracy [9] podano sposób przetwarzania danych z eksperymentu w procesie identyfikacji obiektu z wykorzystaniem równania FPK.

Wyniki obliczeń gęstości rozkładu prawdopodobieństwa procesów przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń kątowych zestawiono na rys. 3, 4 i 5, oznaczając najważniejsze z nich punktami, a linią ciągłą pokazano aproksymacje otrzymanych funkcji wielomianami potęgowymi.



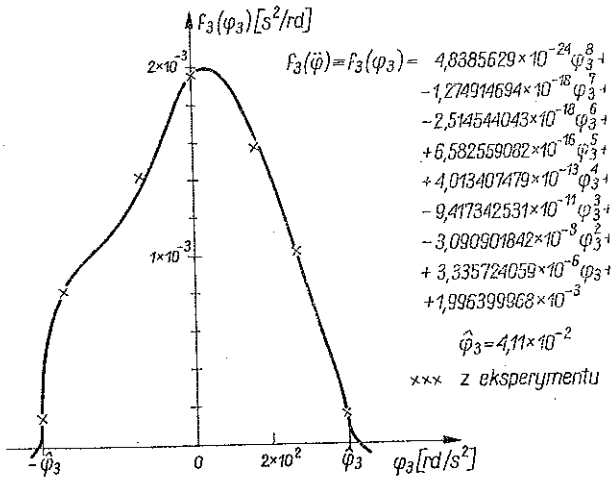
Rys. 3



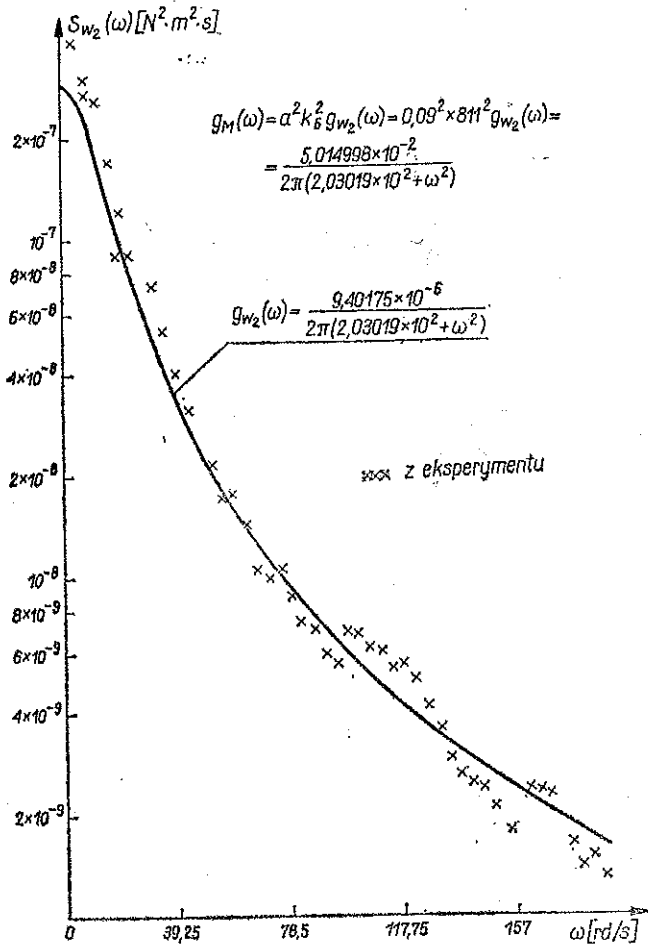
Rys. 4

Wymuszenie kinematyczne $W_2(t)$ zostało tak dobrane, że gęstość widmową sygnału wejściowego $M(t) = ak_6 W_2(t)$, $\left(k_6 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]\right)$ sztywność sprężyny; rys. 2) można było aproksymować funkcją

$$(3.20) \quad g_M(\omega) = \frac{A^2}{2\pi(B^2 + \omega^2)},$$



Rys. 5



Rys. 6

gdzie $A = \text{const}$ i $B = \text{const}$. Aproksymację dla wyznaczonej w pracy [8] gęstości widmowej sygnału $M(t)$ (punkty na rys. 6) przedstawiono linią ciągłą na tym rysunku.

Przedstawione charakterystyki procesów stochastycznych $\Phi(t)$, $\dot{\Phi}(t)$, $\ddot{\Phi}(t)$ i $M(t)$ traktowanych jako stacjonarne i ergodyczne oraz ich aproksymacje są jedyne, jakie na dostępnych sobie urządzeniach technicznych autor mógł otrzymać. Zdając sobie w pełni sprawę z ich niekompletności (brak łącznej gęstości prawdopodobieństwa $f(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$) konieczne było wprowadzenie dodatkowego założenia, że

$$(3.21) \quad f(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) \approx f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \approx f_1(\varphi_1) f_2(\varphi_2) f_3(\varphi_3).$$

Założenie to zostało więc podyktowane wyłącznie technicznymi możliwościami jakimi autor dysponował przy opracowywaniu wyników eksperymentu. Natomiast dopuszczalność takiego założenia musiała być stosownie uzasadniona dla badanego obiektu, czego tutaj czynić nie będziemy.

Równanie ruchu przyjętego wariantu eksperymentu na obiekcie z rys. 2 ma postać [8]

$$(3.22) \quad J\ddot{\Phi} + C(\dot{\Phi}) + K(\Phi) = M(t).$$

Zadanie identyfikacji ograniczymy do wyznaczenia jedynie funkcji $K(\Phi)$, przyjmując z pracy [8] następujące wartości:

$$J = 0,02232 \text{ kgm}^2$$

oraz z aproksymacji liniowej

$$C(\dot{\Phi}) = c_z \cdot \dot{\Phi},$$

gdzie $c_z = 0,691 \text{ Nms/rd}$.

Przy wymienionych ograniczeniach procedurę identyfikacji za pomocą równania FPK zrealizowano dla następujących dwóch przypadków szczególnych:

1. Charakterystyka siły sprężystości jako funkcja stanów procesu $\Phi(t)$ jest liniowa:

$$(3.23) \quad K_L(\varphi) = k \cdot \varphi.$$

Należy obliczyć k .

Równanie FPK dla rozpatrywanego układu przy tym założeniu jest następujące:

$$(3.24) \quad \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial}{\partial \varphi_3} \left[f \left(\frac{c_z}{J} \varphi_3 + \frac{k}{J} \varphi_2 + B\varphi_3 + \frac{c_z B}{J} \varphi_2 + \frac{kB}{J} \varphi_1 \right) \right] - \frac{A}{2J^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_3^2} = 0,$$

gdzie $f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = f(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ oznacza gęstość prawdopodobieństwa przejścia procesu $[\Phi(t), \dot{\Phi}(t), \ddot{\Phi}(t)]$. Oznaczmy lewą stronę równania (3.24) przez

$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; k)$. Budując funkcję jakości w sposób opisany wyżej i stosując omawiane tam kryterium otrzymamy

$$(3.25) \quad \int_{-\hat{\varphi}_1}^{\hat{\varphi}_1} \int_{-\hat{\varphi}_2}^{\hat{\varphi}_2} \int_{-\hat{\varphi}_3}^{\hat{\varphi}_3} \left(\varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} + B\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \right) \hat{F}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, k) d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3 = 0.$$

Granice całkowania zostały odczytane z wykresów funkcji gęstości prawdopodobieństwa przejścia: są to liczby ograniczające przedziały zmienności argumentów, w których funkcje gęstości są nieujemne i przyjmują skończone wartości. W wyniku obliczenia całki otrzymujemy równanie następujące:

$$1,985318172 \cdot 10^{-5} k = 4,957924039 \cdot 10^{-3}.$$

Skąd $k = 249,7 \text{ Nm/rd}$. Wobec tego poszukiwana charakterystyka jest opisana funkcją

$$(3.26) \quad K_L(\varphi) = 249,7\varphi \text{ [Nm]}.$$

2. Charakterystyka siły sprężystości jako funkcja stanów procesu $\Phi(t)$ jest następująca:

$$(3.27) \quad K_N(\varphi) = k_1 \varphi + k_2 \varphi^3.$$

Należy obliczyć k_1 i k_2 .

Dla tego przypadku równanie FPK ma postać

$$(3.28) \quad \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial}{\partial \varphi_3} \left[f \left(\frac{c_2}{J} \varphi_3 + \frac{k_1}{J} \varphi_2 + \frac{3k_2}{J} \varphi_1^2 \varphi_2 + B\varphi_3 + \frac{C_2 B}{J} \varphi_2 + \frac{k_1 B}{J} \varphi_1 + \frac{k_2 B}{I} \varphi_1^3 \right) \right] - \frac{A}{2J^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_3^2} = 0.$$

Oznaczając lewą stronę powyższego równania przez $F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; k_1, k_2)$ i postępując jak w poprzednim punkcie, otrzymujemy

$$(3.29) \quad \int_{-\hat{\varphi}_1}^{\hat{\varphi}_1} \int_{-\hat{\varphi}_2}^{\hat{\varphi}_2} \int_{-\hat{\varphi}_3}^{\hat{\varphi}_3} \left(\varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} + B\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} \right) \cdot \hat{F}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; k_1, k_2) d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 = 0,$$

$$\int_{-\hat{\varphi}_1}^{\hat{\varphi}_1} \int_{-\hat{\varphi}_2}^{\hat{\varphi}_2} \int_{-\hat{\varphi}_3}^{\hat{\varphi}_3} \left(3\varphi_1^2 \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} + B\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} \right) \cdot \hat{F}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; k_1, k_2) d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 = 0.$$

W wyniku obliczenia całek otrzymujemy układ równań:

$$1,985318172 \cdot 10^{-5} k_1 + 3,640932594 \cdot 10^{-2} k_2 = 4,957924039 \cdot 10^{-3},$$

$$3,640932594 \cdot 10^{-2} k_1 + 8,250190311 \cdot 10^{-11} k_2 = 9,302422414 \cdot 10^{-6}.$$

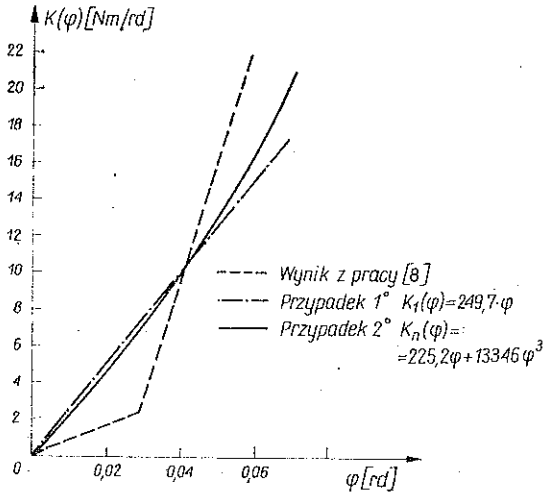
Rozwiązanie tego układu jest następujące:

$$k_1 = 225,2 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}}, \quad k_2 = 13346 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}^3}.$$

Wobec tego poszukiwana charakterystyka jest funkcją następującą:

$$(3.30) \quad K_N(\varphi) = 225,2 \varphi + 13346 \varphi^3.$$

Otrzymane wyniki pokazane są na rys. 7. Pokazano również wynik z pracy [8]: identyfikacja polegała na wyznaczeniu parametrów układu zlinearyzowanego przez zminimalizowanie funkcji jakości zbudowanej przy wykorzystaniu gęstości widmowych odpowiednich sygnałów.



Rys. 7

Warto dodać, że w pracy [1] zamieszczono przykład weryfikacji omawianej procedury w zastosowaniu do układu mechanicznego o jednym stopniu swobody z wymuszeniem w postaci »białego szumu«, przy czym jako wynik pomiaru potraktowano analityczne rozwiązanie równania FPK podane w monografii [4].

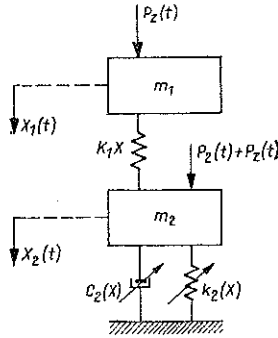
4. ROZWIĘNIĘCIE PROCEDURY IDENTYFIKACJI NA UKŁADY Z ZAKŁÓCENIAMI

Zastosowanie równania FPK stwarza możliwości przybliżonej identyfikacji charakterystyk nieliniowych pewnych układów w przypadkach, kiedy nie wszystkie wymuszenia działające na układ są znane. Wymuszenia te będziemy nazywali zakłóceniami. Zakłócenia, czyli wymuszenia nie zmierzone, mogą być nieprzewidywanymi zaburzeniami ustalonych warunków pracy układu, bądź też mogą być spowodowane działaniem aparatury pomiarowej.

W przypadku istnienia zakłóceń w postępowaniu identyfikacyjnym funkcję jakości buduje się również przy wykorzystaniu równania FPK. Jednakże realizacja procedury wymaga postępowania iteracyjnego. Zerowy krok iteracyjny jest, przy formalnym pominięciu zakłóceń, identyczny z opisanym w p. 3. W pierwszym i każdym następnym kroku iteracyjnym (parametry charakterystyk poprzedniego kroku są znane) można, w pewnych przypadkach, poszukiwać wartości parametrów

w obecności zakłóceń. Procedurę można zakończyć po z góry ustalonej liczbie kroków lub wówczas, gdy moduły różnic pomiędzy kolejno otrzymywanymi wartościami parametrów nie przekraczają pewnych dodatnich arbitralnie przyjętych liczb.

Dla przykładu rozważmy układ o dwóch stopniach swobody (rys. 8).



Rys. 8

Pomiar przemieszczeń $X_1(t)$ i $X_2(t)$ jest zniekształcony działaniem zakłócenia $P_z(t)$ nie objętego bezpośrednim pomiarem, które występuje obok znanego, dającego się zmierzyć wymuszenia $P_2(t)$. Przyjmijmy, że wymuszenia $P_2(t)$ jak i $P_z(t)$ są normalnymi stacjonarnymi procesami stochastycznymi. Ponadto przyjmijmy, że charakterystyka członu sprężystego łączącego obydwie ciała jest liniowa,

$$(4.1) \quad K_1(X) = k_1 X,$$

oraz że charakterystyki nieliniowych członów sprężystych i tłumiących łączących ciało o masie m_2 z nieruchomym podłożem są funkcjami ciągłymi i mają następującą postać:

$$(4.2) \quad K_2(X) = \sum_{k=1}^r k_{2k} X^{2k-1}, \quad C_2(\dot{X}) = \sum_{i=1}^s c_{2i} \dot{X}^{2i-1}.$$

Przyjęcie takich wielomianów aproksymujących ma na celu jedynie uproszczenie procedury identyfikacji: na to, aby spełnione były warunki (3.4), wystarczy, aby współczynniki $k_1, k_{2k}, c_{2i}, k, l=1, 2, \dots, n$ były nieujemne.

Napiszmy teraz równania ruchu układu przedstawionego na rys. 8:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + k_1 (X_1 - X_2) &= P_z(t), \\ m_2 \ddot{X}_2 + k_2 (X_2) + c_2 (\dot{X}_2) - k_1 (X_1 - X_2) &= P_2(t) + P_z(t). \end{aligned}$$

Założmy, że masy m_1 i m_2 zostały wyznaczone na drodze rachunkowo-doświadczalnej z wystarczającą dokładnością. Celem identyfikacji jest znalezienie parametrów charakterystyk sił sprężystości i tłumienia: $k_1, k_2 = [k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2r}]$, $c_2 = [c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2s}]$.

Przyjmijmy przy tym, że znane wymuszenie $P_2(t)$ jest normalnym stacjonarnym «białym szumem» o zerowej wartości przeciętnej oraz gdy $R_{P_2}(\tau) = \delta(\tau)$.

Rozwiązanie tak sformułowanego problemu będzie przebiegało metodą kolejnych przybliżeń, a poszczególne jego etapy będziemy nazywali krokami.

W kroku zerowym obliczymy poszukiwane parametry przy formalnym założeniu, że w równaniach ruchu (4.3) $P_z(t)=0$. Równanie FPK dla tak zmiennego układu czyli dla układu

$$(4.4) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + k_1 (X_1 - X_2) &= 0, \\ m_2 \ddot{X}_2 + k_2 (X_2) + c_2 (\dot{X}_2) - k_1 (X_1 - X_2) &= P_2(t) \end{aligned}$$

można napisać w postaci

$$(4.5) \quad \frac{\partial}{\partial y_1} (y_2 f_0) + \frac{\partial}{\partial y_3} (y_4 f_0) = \frac{1}{m_1} \frac{\partial}{\partial y_2} [k_1 (y_1 - y_3) f_0] - \\ - \frac{\partial}{\partial y_4} \{ [k_1 (y_1 - y_3) - K_2 (y_3) - C_2 (y_4)] f_0 \} + \frac{1}{2m_2^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial y_4^2},$$

lub

$$(4.6) \quad L_0(\mathbf{y}) = P_0(\mathbf{y}; k_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2),$$

gdzie $f_0(\mathbf{y}) = f_0(y_1, y_2, y_3, y_4)$ jest gęstością prawdopodobieństwa przejścia procesu wektorowego $\mathbf{Y}(t) = [Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t), Y_4(t)] \equiv [X_1(t), \dot{X}_1(t), X_2(t), \dot{X}_2(t)]$. Niech $f_0^{\circ}(\mathbf{y}) = f_0^{\circ}(y_1, y_2, y_3, y_4)$, gdzie $\mathbf{y} \in \mathcal{O}_0$,

$$\mathcal{O}_0 = \{ (y_1, y_2, y_3, y_4) : a_{11}^{(0)} < y_1 < a_{12}^{(0)}, a_{21}^{(0)} < y_2 < a_{22}^{(0)}, a_{31}^{(0)} < y_3 < a_{32}^{(0)}, a_{41}^{(0)} < y_4 < a_{42}^{(0)} \}$$

oznacza funkcję gęstości prawdopodobieństwa przejścia wyznaczoną na podstawie danych z eksperymentu. Napiszemy funkcję jakości:

$$I_0(k_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2) = \int_{\mathcal{O}_0} [\hat{L}_0(\mathbf{y}) - \hat{P}_0(\mathbf{y}; k_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2)]^2 d\mathbf{y},$$

gdzie \hat{L}_0 i \hat{P}_0 oznaczają lewą i prawą stronę równania (4.6) lecz opisane są na wartościach $f_0^{\circ}(\mathbf{y})$ (z pomiaru).

Stosując kryterium identyfikacji omawiane w poprzednim punkcie otrzymamy układ $r+s+1$ algebraicznych równań liniowych niejednorodnych:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial I_0(k_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2)}{\partial k_1} &= 0, \\ \frac{\partial I_0(k_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2)}{\partial \mathbf{k}_2} &= 0, \\ \frac{\partial I_0(k_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2)}{\partial \mathbf{c}_2} &= 0, \end{aligned}$$

którego rozwiązanie $k_1^{(0)}, \mathbf{k}_2^{(0)} = [k_{21}^{(0)}, k_{22}^{(0)}, \dots, k_{2r}^{(0)}]$, $\mathbf{c}_2^{(0)} = [c_{21}^{(0)}, c_{22}^{(0)}, \dots, c_{2s}^{(0)}]$ nazwiemy zerowym przybliżeniem szukanych parametrów.

Wyznamy teraz pierwsze przybliżenie parametrów układu. W tym celu odejmijmy stronami równania ruchu (4.3):

$$(4.8) \quad m_2 \ddot{X}_2 + K_2(X_2) + C_2(\dot{X}_2) = P_2(t) + m_1 \ddot{X}_1 + 2k_1(X_1 - X_2).$$

Zauważmy, że jeśli zamiast k_1 wstawimy $k_1^{(0)}$, to proces stacjonarny

$$(4.9) \quad P_{31}(t) = P_2(t) + m_1 \ddot{X}_1 + 2k_1^{(0)}[X_1(t) - X_2(t)]$$

jest znany i jego gęstość widmową można aproksymować funkcją wymierną, np.

$$(4.10) \quad g_{P_{31}}(\omega) = \frac{A_1}{2\pi(\omega^2 + B_1)}.$$

Wobec tego dla równania ruchu

$$(4.11) \quad m_2 \ddot{X}_2 + K_2(X_2) + C_2(\dot{X}_2) = P_{31}(t),$$

w którym funkcje $K_2(X_2)$ i $C_2(\dot{X}_2)$ są określone za pomocą wzorów (4.2), można napisać równanie FPK w postaci

$$(4.12) \quad \frac{\partial}{\partial y_1}(y_2 f) + \frac{\partial}{\partial y_2}(y_3 f_1) = \frac{1}{m_2} \frac{\partial}{\partial y_3} \left\{ \left[\frac{dK_2(y_1)}{dy_1} y_2 + \frac{dC_2(y_2)}{dy_2} y_3 + B_1(m_2 y_3 + K_2(y_1) + C_2(y_2)) \right] f_1 \right\} + \frac{A_1}{2m_2^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_3^2},$$

lub

$$(4.13) \quad L_1(y) = P_1(y; \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2),$$

gdzie $f(y) = f_1(y_1, y_2, y_3)$ jest gęstością prawdopodobieństwa przejścia procesu wektorowego $Y(t) = [Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)] \equiv [X_2(t), \dot{X}_2(t), \ddot{X}_2(t)]$.

Jeśli

$$f_1(y) = f_1(y_1, y_2, y_3), \quad y \in \mathcal{Y}_1,$$

$$\mathcal{Y}_1 = \{(y_1, y_2, y_3) : a_{11}^{(1)} < y_1 < a_{12}^{(1)}, a_{21}^{(1)} < y_2 < a_{22}^{(1)}, a_{31}^{(1)} < y_3 < a_{32}^{(1)}\}$$

oznaczać będzie funkcję gęstości prawdopodobieństwa przejścia wyznaczoną na podstawie danych z eksperymentu, to możemy napisać funkcję jakości:

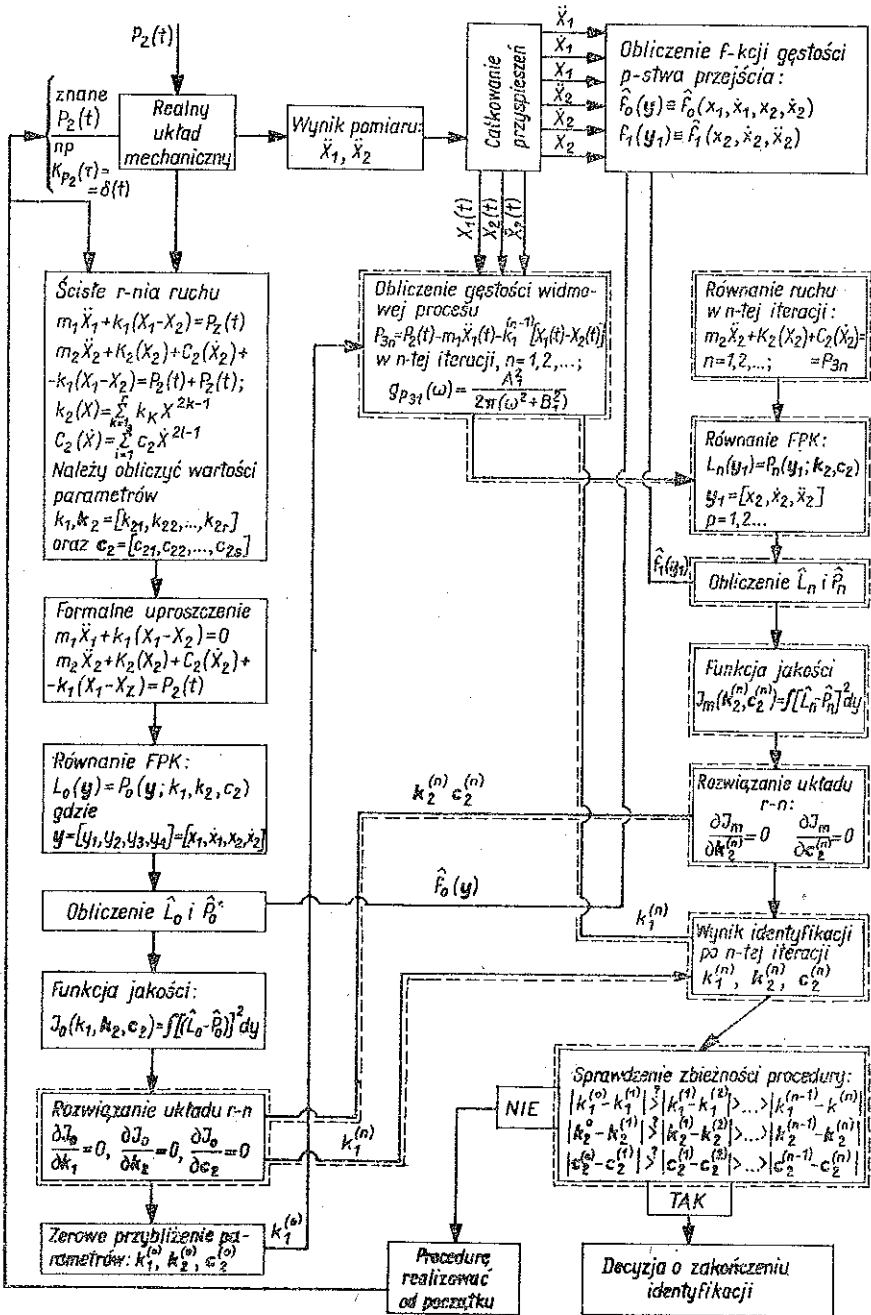
$$(4.14) \quad I_1(\mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2) = \int_{\mathcal{Y}_1} [\hat{L}_1(y) - P_1(y; \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2)]^2 dy,$$

przy czym \hat{L}_1 i \hat{P}_1 są opisane na wartościach $\hat{f}(y)$ (z pomiaru). Stosując kryterium identyfikacji jak poprzednio otrzymamy układ $r+s$ równań liniowych niejednorodnych:

$$(4.15) \quad \frac{\partial I_1(\mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2)}{\partial \mathbf{k}_2} = 0, \quad \frac{\partial I_1(\mathbf{k}_2, \mathbf{c}_2)}{\partial \mathbf{c}_2} = 0.$$

Rozwiązanie powyższego układu równań będzie wartością pierwszego przybliżenia parametrów \mathbf{k}_2 i \mathbf{c}_2 :

$$\mathbf{k}_2^{(1)} = [k_{21}^{(1)}, k_{22}^{(1)}, \dots, k_{2r}^{(1)}], \quad \mathbf{c}_2^{(1)} = [c_{21}^{(1)}, c_{22}^{(1)}, \dots, c_{2s}^{(1)}].$$



Rys. 9

Aby otrzymać wartość pierwszego przybliżenia k_1 , należy do jednego z równań (4.7) wstawić $\mathbf{k}_2^{(1)}$, $\mathbf{c}_2^{(1)}$ i obliczyć $k_1^{(1)}$.

Drugi krok iteracyjny rozpoczynamy od skonstruowania procesu

$$P_{32} = P_2(t) + m_1 \ddot{X}_1(t) + 2k_1^{(1)} [X_2(t) - X_1(t)]$$

i wyznaczenia analitycznej postaci jego gęstości widmowej jako funkcji wymiernej.

Obliczenie drugiego przybliżenia \mathbf{k}_2 i \mathbf{c}_2 będzie rezultatem identyfikacji parametrów układu opisanego równaniem

$$m_2 \ddot{X}_2 + K_2(X_2) + C_2(\dot{X}_2) = P_{32}(t).$$

Otrzymane $\mathbf{k}_2^{(2)} = [k_{21}^{(2)}, k_{22}^{(2)}, \dots, k_{2r}^{(2)}]$, $\mathbf{c}_2^{(2)} = [c_{21}^{(2)}, c_{22}^{(2)}, \dots, c_{2s}^{(2)}]$ należy wstawić do jednego z równań (4.7) i obliczyć $k_1^{(2)}$.

Jeżeli otrzymywane kolejno wyniki będą wskazywały, że ciąg kolejnych przybliżeń jest zbieżny, czyli że

$$\begin{aligned} |k_1^{(0)} - k_1^{(1)}| &> |k_1^{(1)} - k_1^{(2)}| > \dots > |k_1^{(n-1)} - k_1^{(n)}|, \\ |\mathbf{k}_2^{(0)} - \mathbf{k}_2^{(1)}| &> |\mathbf{k}_2^{(1)} - \mathbf{k}_2^{(2)}| > \dots > |\mathbf{k}_2^{(n-1)} - \mathbf{k}_2^{(n)}|, \\ |\mathbf{c}_2^{(0)} - \mathbf{c}_2^{(1)}| &> |\mathbf{c}_2^{(1)} - \mathbf{c}_2^{(2)}| > \dots > |\mathbf{c}_2^{(n-1)} - \mathbf{c}_2^{(n)}|, \end{aligned}$$

to proces identyfikacji można zakończyć po 1) z góry ustalonej liczbie kroków n , lub po 2) takiej liczbie kroków n gdy

$$\begin{aligned} |k_1^{(n-1)} - k_1^{(n)}| &< \varepsilon_1, \\ |\mathbf{k}_2^{(n-1)} - \mathbf{k}_2^{(n)}| &< \varepsilon_2, \\ |\mathbf{c}_2^{(n-1)} - \mathbf{c}_2^{(n)}| &< \varepsilon_3, \end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ są liczbami dodatnimi przyjętymi arbitralnie, np. na podstawie intuicji inżynierskiej.

Omawiany tok postępowania pokazany jest na rys. 9, przy czym linią ciągłą zaznaczono schemat kroku zerowego, linią zaś kreskową zilustrowano kroki następne.

Zbieżność procedury jest niemożliwa do udowodnienia teoretycznego, gdyż w kolejnych iteracjach ingeruje eksperyment. Zbieżność procedury może potwierdzić tylko wynik jej zastosowania w konkretnym przypadku.

5. UWAGI KOŃCOWE

Proponowana procedura identyfikacji układów dynamicznych z zastosowaniem równania FPK może dać użyteczne dla praktyki inżynierskiej wyniki pod warunkiem, że spełnione są założenia sformułowane w p. 2. Niektóre z nich mogą być spełnione z większym lub mniejszym przybliżeniem (np. założenie o stacjonarności procesu wejściowego) i przeprowadzający identyfikację jakiegoś układu nie ma na to wpływu. Ocena stopnia spełnienia takiego założenia opiera się na intuicji i doświadczeniu badacza. Spełnienie innych założeń, np. dyskretyzacji układu, wymaga interwencji człowieka i może mieć decydujący wpływ na ostateczny wynik identyfikacji.

Przyjmując, że wszystkie założenia są spełnione możliwie najlepiej w danych warunkach i zakładając najwyższą precyzję pomiarów i obliczeń, można na podstawie powyższych rozważań stwierdzić:

1. Przedstawiony w pracy przykład dowodzi, że proponowana procedura identyfikacji z wykorzystaniem równania FPK może prowadzić do efektywnych wyników. W związku z tym przyjęty sposób postępowania jest poprawny. Ponadto może stanowić metodę konkurencyjną dla metod opartych na idei linearyzacji równań ruchu, w tych ostatnich identyfikację przeprowadza się na podstawie wykresów funkcji korelacyjnych lub gęstości widmowych. Ponieważ te charakterystyki procesów stochastycznych są wtórnymi w stosunku do pełnej charakterystyki, jaką jest gęstość prawdopodobieństwa użyta w proponowanej procedurze, przeto charakterystyki członów nieliniowych układów dynamicznych, obliczone za pomocą gęstości prawdopodobieństwa, mogą wierniej odtwarzać zjawiska w badanym układzie. Ponadto w procedurach z wykorzystaniem linearyzacji konieczne jest założenie słabej nieliniowości interesujących nas członów układu, wynik zaś identyfikacji zależy od sposobu linearyzacji. W procedurze z wykorzystaniem równania FPK te ograniczenia nie istnieją.

2. Przedstawiona procedura identyfikacji umożliwia sformułowanie takiego algorytmu, który może być zrealizowany przy użyciu techniki cyfrowej umożliwiającej automatyzację procesów analizy i syntezy układów dynamicznych. Jednakże w porównaniu z powszechnie stosowanymi procedurami opartymi na metodach korelacyjnych, jest ona w chwili obecnej pracochłonna i złożona pod względem rachunkowym. Wynika to z braku specjalizowanych automatycznych urządzeń cyfrowych (w układzie «hardware») do wyznaczania łącznych gęstości prawdopodobieństwa sygnałów ich pochodnych. Wyznaczanie ich drogą tradycyjną wymaga obecnie dużego nakładu pracy ludzkiej i czasu maszynowego.

3. Omawiana procedura może mieć zastosowanie do identyfikacji układów z częściowo nieznanymi sygnałami wejściowymi. Wprawdzie zamieszczona w pracy procedura przybliżonej identyfikacji układu o dwóch stopniach swobody jest przypadkiem szczególnym, lecz nie oznacza to ograniczenia tylko do tej klasy układów. Wydaje się możliwe rozwinięcie metody na inne układy nie rozpatrywane w pracy.

4. Rozważania zawarte w pracy dotyczą bezpośrednio układów mechanicznych, jednak ogólna koncepcja przedstawionej metody może być wykorzystana do identyfikacji innych układów, np. elektrycznych, elektromechanicznych pod warunkiem spełnienia założeń w p. 2.

5. Zastosowanie równania FPK do opisu układów dynamicznych nie wprowadza ograniczenia niestacjonarności procesu wejściowego [4]. Dlatego wydaje się możliwe rozszerzenie proponowanej metody na przypadek procesów niestacjonarnych. Powyższa sugestia związana jest z silnym w ostatnich latach rozwojem aparatury do pomiaru i analizy sygnałów losowych i elektronicznych maszyn cyfrowych.

Niniejsza praca nie wyczerpuje tematyki identyfikacji układów dynamicznych z wykorzystaniem równania FPK. Przedstawiona procedura jest, jak się wydaje, nową i dotychczas nie stosowaną, brak jest praktycznych wyników jej stosowania

do konkretnych układów dynamicznych. W miarę wzrostu jej zastosowań wyłonią się niewątpliwie nowe problemy, jak np. zagadnienie optymalizacji i dokładności procedury, które będą wymagały wszechstronnego opracowania.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. STĘPIŃSKI, *Zastosowanie równania Fokkera-Plancka do identyfikacji nieliniowego układu o jednym stopniu swobody*, Rozpr. Inżyn., 25, 3, 1977.
2. F. W. BYRON, R. W. FULLER, *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, t. I, PWN, 1973.
3. Н. А. ЛИШИН, В. Н. ПУГАЧЕВ, *Вероятностный анализ системы автоматического управления*, izd. Sovietskogo Radio, 1963.
4. K. SOB CZYK, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, 1973.
5. J. SKOWROŃSKI, *Wpływ tłumienia na charakter drgań silnie nieliniowych mechanicznych układów dyskretnych*, Zag. Drgań Nieln., 2, 1960.
6. S. HARTMAN, J. MIKUSIŃSKI, *Teoria miary i całki Lebesgue'a*, PWN, 1957.
7. I. S. BENDAT, A. G. PIERSOL, *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*, PWN, 1976.
8. A. BARWICKI, L. PŁONECKI, *O pewnej metodzie identyfikacji nieliniowego układu dynamicznego*, rozprawa doktorska, Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, 1978 [maszynopis].
9. B. STĘPIŃSKI, *Identyfikacja pewnych nieliniowych dyskretnych układów dynamicznych*, rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1979 [maszynopis].

Резюме

О НЕКОТОРОЙ ПРОЦЕДУРЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Представлены подробно предположения, а затем процедура идентификации нелинейной системы с многими степенями свободы. При предположении аппроксимации нелинейных членов степенными многочленами построены функция качества и критерий идентификации с использованием уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. Дается экспериментальная проверка процедуры. Обсуждена тоже идентификация системы в присутствии возмущений.

SUMMARY

ON A CERTAIN PROCEDURE OF IDENTIFICATION OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

In this paper detailed assumptions, and then the entire procedure is presented concerning the identification of a nonlinear, multi-degree-of-freedom dynamic system with prescribed excitations. Nonlinear terms being approximated by polynomials, the quality function and the identification criterion are constructed by means of the Fokker-Planck-Kolmogorov equation. Experimental verification of the procedure is given. Identification of the system in the presence of perturbation is also discussed.

PRZEMYSŁOWY INSTYTUT MOTORYZACJI, WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 maja 1980 r.