

METODA PERTURBACYJNA W ZASTOSOWANIU DO POWŁOK Z LOSOWYMI ODCHYLENIAMI GEOMETRYCZNYMI

MIROSLAW SKOWRONEK (GDAŃSK)

Praca zawiera podstawowe wzory liniowej teorii cienkich powłok z losowymi parametrami geometrycznymi. Stosując zmodyfikowaną metodę perturbacyjną otrzymano odpowiednie związki geometryczne, statyczne i fizyczne dla zerowego i pierwszego przybliżenia.

Otrzymane wzory zweryfikowano na drodze numerycznej w przypadku powłoki sferycznej o małej wyniosłości.

1. WSTĘP

Występowanie różnic geometrycznych między konstrukcją projektowaną idealną a jej realizacją w procesie technologicznym jest zjawiskiem w pewnym sensie obiektywnym. Jednym z zadań cyklu technologicznego tworzenia konstrukcji jest między innymi minimalizacja tych odchyłeń geometrycznych. Problem jest szczególnie istotny w konstrukcjach powłokowych z racji ich znacznie mniejszej sztywności w kierunku normalnym do powierzchni środkowej — w stosunku do sztywności w płaszczyźnie stycznej do tejże powierzchni.

W zagadnieniu stateczności powłok z uwzględnieniem deterministycznych zmian parametrów geometrycznych za podstawowe przyjmuje się prace FLÜGGEGO [13], BOLOTINA [5] i KOITERA [14]. Ogólną konsekwencją wynikającą z uwzględnienia wstępnych odchyłeń geometrycznych w problemie stateczności powłok jest znaczna redukcja obciążenia krytycznego w stosunku do powłok o idealnej geometrii. Potwierdzeniem tego faktu mogą być między innymi wyniki prac HIROYUKI [12], TURULI [19], FRESKAKISA [11], ARBOCZA [2], TALASLIDISA [17] i innych.

Wobec pewnej nieokreśloności ilościowej występującej w odchyleniach geometrycznych oraz ich losowego charakteru odnośnie kształtu — bardziej realistyczny opis problemu uzyskuje się traktując wstępne imperfekcje jako pola losowe o określonych charakterystykach. Formalnie losowe zmiany kształtu należałoby zdefiniować jako wektorowe pola losowe; jednakże w zakresie stosowalności liniowej teorii cienkich powłok izotropowych przyjęcie skalarnego pola wstępnych odchyłeń normalnych do powierzchni środkowej jest całkowicie wystarczające. Spośród wielu prac z tego zakresu wymienić można kilka charakterystycznych: 1) AMAZIGO [3] traktującą o zastosowaniu metody hierarchicznej dla belki na losowo zmiennym podłożu oraz dla długiej powłoki cylindrycznej z obrotowo symetrycznymi losowymi odchyleniami geometrycznymi. Dla odchyłeń stacjonarnych otrzymano formuły dla

obciążenia krytycznego zależne od gęstości widmowej odchyłeń geometrycznych. 2) VAN SLOOTENA i SOONGA [20], gdzie dla nieskończonej długiej powłoki cylindrycznej osiowo ściskanej z losowymi imperfekcjami geometrycznymi do wyznaczenia obciążenia krytycznego zastosowano metodę perturbacyjną do równania von Kármána-Donnella. 3) BOLOTINA [5] zawierającą m.in. równania podstawowe powłoki małowyniosłej dla zerowego i pierwszego przybliżenia — otrzymane przez zastosowanie rozwinięcia względem małego parametru do drugiego podstawowego tensora powierzchni środkowej. Z zakresu statycznej pracy konstrukcji powłokowych AL-DABBAGHA i GUPTA [1] oraz CROLLA [10] analizują awaryjny przypadek lokalnego wpływu imperfekcji geometrycznych w wieżowej chłodni hiperbolicznej.

W pracach tych dla kilku postaci deterministycznych imperfekcji otrzymano znaczny wzrost momentów południkowych oraz sił równoleżnikowych, w stosunku do wyników powłoki idealnej. Zastosowanie metody małego parametru do powłoki sferycznej małowyniosłej z losowymi zmianami kształtu podano w pracy [8], dokonując aproksymacji dla funkcji zespolonej w równaniu zagadnienia.

W niniejszym opracowaniu zastosowano konsekwentne rozwinięcie względem małego parametru przy formułowaniu odpowiednich zależności geometrycznych, statycznych i fizycznych w granicach stosowalności liniowej teorii powłok Kirchhoffa-Love'a z uwzględnieniem wstępnych małych odchyłeń geometrycznych o losowym charakterze.

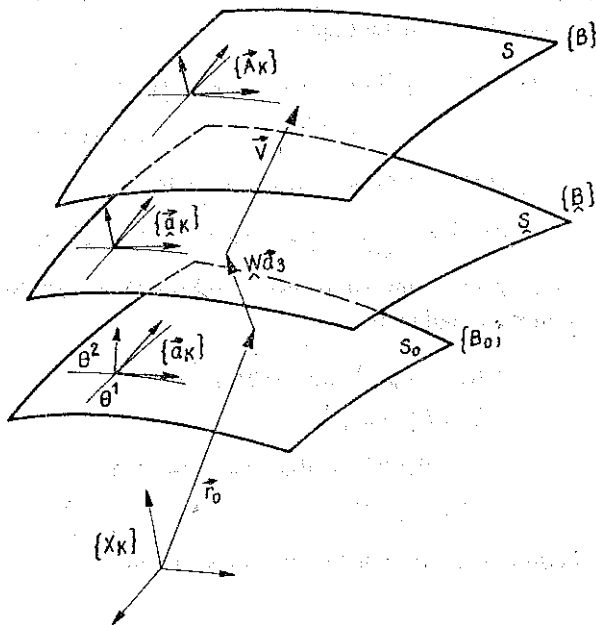
W stosunku do pracy [8] w niniejszym opracowaniu analiza powłoki sferycznej ze zmianami geometrycznymi jest konsekwentnym zastosowaniem wyprowadzonych ogólnych zależności dla zerowego i pierwszego przybliżenia. Proponowana modyfikacja metody perturbacyjnej polega na zastosowaniu rozwinięcia względem małego parametru w stosunku do reprezentacji, jak też polibaz odpowiednich pól tensorowych. Fakt ten jest szczególnie istotny w zagadnieniu stochastycznie nieliniowym, gdyż umożliwia otrzymanie tensorów sił wewnętrznych oraz wektora przemieszczenia w bazie wektorów deterministycznych określonych dla kształtu idealnego powierzchni środkowej. Za podstawę rozważań przyjęto liniową teorię cienkich powłok wg Koitera-Sandersa [14 i 15].

Końcowe zależności geometryczne statyczne i fizyczne dla zerowego i pierwszego przybliżenia mogą stanowić podstawę do utworzenia algorytmu numerycznego umożliwiającego wyznaczanie charakterystyk losowych sił wewnętrznych i przemieszczeń w cienkich powłokach z małymi losowymi zmianami geometrycznymi [16].

2. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI GEOMETRYCZNE

Ze względów formalnych rozpatruje się następujące konfiguracje: 1) B_0 , zwana dalej idealną lub odniesienia, w której znajduje się powłoka o powierzchni środkowej S_0 ; 2) początkowa B , której odpowiada powierzchnia S powstała z nałożenia na S_0 losowego pola odchyłek w (θ^1, θ^2); 3) końcowa B , w której znajduje się powłoka o powierzchni S w wyniku działania obciążenia zewnętrznego.

Przyjęto parametryzację powierzchni środkowych konwekcyjnym krzywoliniowym układem $\{\theta^\alpha\}$. Stosując opis Lagrange'a za powierzchnię odniesienia przyjętego S_0 .



Rys. 1. Konfiguracja powłoki

Podstawowe wielkości geometryczne dla powierzchni \bar{S} mają postać następującą:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}_0 + \varepsilon \hat{w} \mathbf{a}_3, \\
 \hat{\mathbf{a}}_\alpha &= \mathbf{a}_\alpha + \varepsilon \mathbf{a}_{\alpha 1}, \quad \hat{\mathbf{a}}_3 = -w b_\alpha^\lambda \mathbf{a}_\lambda + w_{,\alpha} \mathbf{a}_3, \\
 \hat{a}_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} - 2\varepsilon w b_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 (w^2 c_{\alpha\beta} + w_{,\alpha} w_{,\beta}), \\
 \hat{a} &\approx a (1 - 2\varepsilon w b_\alpha^\alpha), \quad c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}, \\
 \hat{a}^{\beta\delta} &\approx a^{\beta\delta} + 2\varepsilon w b^{\beta\delta} - 4\varepsilon^2 w^2 e^{\beta\varphi} e^{\delta\varrho} b_{\varphi\varrho} b_\lambda^\lambda, \\
 \hat{\mathbf{a}}^\alpha &\approx \mathbf{a}^\alpha + \varepsilon \mathbf{a}^{\alpha 1}, \quad \hat{\mathbf{a}}_1 = w b^{\alpha\lambda} \mathbf{a}_\lambda + w^{|\alpha} \mathbf{a}_3, \\
 (2.1) \quad \hat{\mathbf{a}}_3 &= \sqrt{\frac{a}{\hat{a}}} [(1 - \varepsilon w b_\alpha^\alpha + \varepsilon^2 w^2 K) \mathbf{a}_3 - \varepsilon \mathbf{a}^\alpha (w_{,\alpha} + \varepsilon^2 \varepsilon_{2\alpha} e^{\gamma\varphi} w_{,\gamma} b_\varphi^\lambda w)], \\
 \hat{\mathbf{a}}_3 &\approx \mathbf{a}_3 - \varepsilon w_{,\alpha} \mathbf{a}^\alpha, \\
 \hat{b}_{\alpha\beta} &= \sqrt{\frac{a}{\hat{a}}} \{ b_{\alpha\beta} + \varepsilon [w_{|\alpha\beta} - w (b_{\alpha\beta} b_\lambda^\lambda + c_{\alpha\beta})] + \varepsilon^2 [w^2 (K b_{\alpha\beta} + b_\lambda^\lambda b_\alpha^\delta b_{\delta\beta}) + \\
 &\quad + w_{,\lambda} w_{,\lambda} (b_{\alpha,\beta}^\lambda + \Gamma_{\delta\beta}^\lambda b_\alpha^\delta - \delta_{\delta\gamma}^{\lambda\varphi} b_\varphi^\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma) + w_{,\alpha} w_{,\alpha\beta} b_\lambda^\lambda - w_{,\lambda} (w_{,\alpha} b_\beta^\lambda + \\
 &\quad + w_{,\beta} b_\alpha^\lambda)] + \varepsilon^3 w [K w (w_{,\alpha\beta} - w c_{\alpha\beta}) - \delta_{\delta\lambda}^{\gamma\varphi} w_{,\gamma} b_\varphi^\delta (w_{,\alpha} b_\beta^\lambda + \\
 &\quad + w_{,\beta} b_\alpha^\lambda - w (b_{\alpha,\beta}^\lambda + \Gamma_{\delta\beta}^\gamma b_\alpha^\delta))] \}, \\
 \hat{b}_{\alpha\beta} &\approx b_{\alpha\beta} + \varepsilon w_{|\alpha\beta} - \varepsilon w c_{\alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{a}_L, a_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, a$ są odpowiednimi wielkościami na powierzchni S_0 , K zaś oznacza krzywiznę Gaussa. Natomiast ε jest bezwymiarowym małym parametrem.

Pierwszy i drugi tensor podstawowy powierzchni \hat{S} można na podstawie [4] napisać w bazie wektorów \mathbf{a}_i następująco:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{a}}} &= a^{\alpha\beta} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta \approx (a^{\alpha\beta} + \varepsilon a^{\alpha\beta}) (\underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha + \varepsilon \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha) \otimes (\underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta + \varepsilon \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta) = \\ &= a^{\alpha\beta} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta + \varepsilon \omega^{|\alpha} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}_3 + \varepsilon \omega^{|\beta} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_3 \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta = \underline{\underline{\mathbf{a}}} + \varepsilon \underline{\underline{\mathbf{a}}}_1, \\ \underline{\underline{\mathbf{b}}} &= b^{\alpha\beta} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta \approx (b^{\alpha\beta} + \varepsilon b^{\alpha\beta}) (\underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha + \varepsilon \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha) \otimes (\underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta + \varepsilon \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta) = \\ &\approx (b^{\alpha\beta} + \varepsilon \omega^{|\alpha\beta} - \varepsilon \omega^{|\alpha\beta}) \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta + \varepsilon b^{\alpha\beta} \omega_{,\beta} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}_3 + \varepsilon b^{\alpha\beta} \omega_{,\alpha} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_3 \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta. \end{aligned}$$

Stosując powyższe uproszczone rozwinięcia wektorów $\underline{\underline{\mathbf{a}}}_i$ symbolem Christoffela dla powierzchni \hat{S} można nadać postać

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta} &\approx \Gamma_{\lambda\alpha\beta} - \varepsilon \gamma_{\alpha\lambda\beta} - 2\varepsilon \omega b_{\delta\beta} \Gamma_{\alpha\lambda}^\delta, \\ \Gamma_{\alpha\lambda}^\delta &\approx \Gamma_{\alpha\lambda}^\delta - \varepsilon \gamma_{\alpha\lambda}^{\cdot\delta}, \\ \gamma_{\alpha\lambda\beta} &= (b_{\alpha\beta} \omega)_{|\lambda} + (b_{\lambda\beta} \omega)_{|\alpha} - (b_{\alpha\lambda} \omega)_{|\beta}, \\ \gamma_{\alpha\lambda}^{\cdot\delta} &\approx \gamma_{\alpha\lambda\beta} \alpha^{\beta\delta}, \end{aligned}$$

gdzie $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ są symbolami Christoffela na powierzchni S_0 .

3. STAN ODKSZTALCENIA

W zakresie stosowalności hipotezy K-L (Kirchhoffa-Love'a) w liniowej teorii cienkich powłok — miary odkształcenia wg [14] można sprowadzić do opisu na wybranej powierzchni odniesienia. Analogicznie jak w [4] zastosowano opis deformacji powłoki wg Lagrange'a sprowadzając zależności geometryczne do powierzchni idealnej S_0 , traktując ją jako porównawczą. Przyjęto ponadto iż powłoka w konfiguracji B znajduje się w stanie beznaprężeniowym. Sytuacja taka występuje, gdy stan B jest końcową rzeczywistą konfiguracją powłoki w procesie budowy.

Dla pola przemieszczeń odniesionego do powierzchni \hat{S} w postaci

$$(3.1) \quad \mathbf{V} = V^\alpha \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha + V^3 \underline{\underline{\mathbf{a}}}_3$$

miary odkształcenia są określone za pomocą następujących wzorów:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{a}}}) = \gamma_{\alpha\beta} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (V_{\alpha\|\beta} + V_{\beta\|\alpha}) - b_{\alpha\beta} V^3, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} &= -(\underline{\underline{\mathbf{B}}} - \underline{\underline{\mathbf{b}}}) = \kappa_{\alpha\beta} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}_\beta, \\ \kappa_{\alpha\beta} &= -V_{\alpha\|\beta}^3 - V_{\lambda\|\beta} b_\alpha^\lambda - V_{\lambda\|\beta} b_\beta^\lambda - V_\lambda b_{\alpha\|\beta}^\lambda + c_{\alpha\beta} V^3, \end{aligned}$$

gdzie $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}$, $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}$ są odpowiednio tensorami odkształcenia i zmiany krzywizny określonymi w polibazie wektorów $\underline{\underline{\mathbf{a}}}_\alpha$ na powierzchni \hat{S} . W powyższych związkach $(\dots)_{|\alpha}$ oznacza różniczkowanie kowariantne w metryce powierzchni \hat{S} ; np.

$$(3.3) \quad V_{\alpha\|\beta} = V_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda V_\lambda \approx V_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda V_\lambda + \varepsilon \gamma_{\alpha\beta}^{\cdot\lambda} V_\lambda = V_{\alpha|\beta} + \varepsilon \gamma_{\alpha\beta}^{\cdot\lambda} V_\lambda,$$

$\underline{\mathbf{A}}$ i $\underline{\mathbf{B}}$ są zaś podstawowymi tensorami powierzchni zdeformowanej S ; tensorzy te w metryce $\underline{\mathbf{a}}_\alpha$ mają postać

$$(3.4) \quad \underline{\mathbf{A}} = A^{\alpha\beta} \underline{\mathbf{a}}_\alpha \otimes \underline{\mathbf{a}}_\beta, \quad \underline{\mathbf{B}} = B^{\alpha\beta} \underline{\mathbf{a}}_\alpha \otimes \underline{\mathbf{a}}_\beta.$$

Przyjmując dla pola przemieszczeń przybliżenie:

$$(3.5) \quad \underline{V}_l \approx V_l + \varepsilon V_l, \quad l=1, 2, 3$$

przy zastosowaniu (2.1) i (2.3) otrzymano następujące przybliżone rozwinięcia dla miar odkształcenia wg (3.2):

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \underline{\gamma} &\approx \underline{\gamma} + \varepsilon \underline{\gamma} = (\gamma_{\alpha\beta} + \varepsilon \gamma_{\alpha\beta}) (\mathbf{a}^\alpha + \varepsilon \mathbf{a}^\alpha) \otimes (\mathbf{a}^\beta + \varepsilon \mathbf{a}^\beta) \approx [\gamma_{\alpha\beta} + \varepsilon \gamma_{\alpha\beta} + \\ &\quad + \varepsilon w (\gamma_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda + \gamma_{\lambda\beta} b_\alpha^\lambda)] \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + \varepsilon \gamma_{\alpha\beta} (w|\beta^\alpha \mathbf{a}_3 + w|\alpha \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}^\beta), \\ \underline{\kappa} &\approx \underline{\kappa} + \varepsilon \underline{\kappa} = (\kappa_{\alpha\beta} + \varepsilon \kappa_{\alpha\beta}) (\mathbf{a}^\alpha + \varepsilon \mathbf{a}^\alpha) \otimes (\mathbf{a}^\beta + \varepsilon \mathbf{a}^\beta) \approx [\kappa_{\alpha\beta} + \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} + \\ &\quad + \varepsilon w (\kappa_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda + \kappa_{\lambda\beta} b_\alpha^\lambda)] \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} (w|\beta^\alpha \mathbf{a}_3 + w|\alpha \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}^\beta), \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (V_{\alpha|\beta} + V_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} V^3, \\ \kappa_{\alpha\beta} &= -V^3|_{\alpha\beta} - V_{\lambda|\beta} b_\alpha^\lambda - V_{\lambda|\alpha} b_\beta^\lambda - b_\alpha^\lambda|_\beta V_\lambda + c_{\alpha\beta} V^3, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (V_{\alpha|\beta} + V_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} V^3 + \gamma_{\alpha\beta}^\lambda V_\lambda - V^3 (w|\alpha\beta - c_{\alpha\beta} w), \\ \kappa_{\alpha\beta} &= -V^3|_{\alpha\beta} - b_\alpha^\lambda V_{\lambda|\beta} - b_\beta^\lambda V_{\lambda|\alpha} - b_{\alpha|\beta}^\lambda V_\lambda + c_{\alpha\beta} V^3 - V_{\lambda|\beta} (w|\alpha^\lambda - c_\alpha^\lambda w) - \\ &\quad - V_{\lambda|\alpha} (w|\beta^\lambda - c_\beta^\lambda w) - V_\lambda [w|\alpha\beta^\lambda - (c_\alpha^\lambda w)|_\beta] + V^3 [b_\alpha^\lambda (w|\lambda\beta - c_{\lambda\beta} w) + \\ &\quad + b_{\lambda\beta} (w|\alpha^\lambda - c_\alpha^\lambda w)] - V^3|_\lambda \gamma_{\alpha\lambda}^\lambda + V_\lambda [b_\alpha^\delta \gamma_{\delta\beta}^\lambda + b_\beta^\delta \gamma_{\alpha\delta}^\lambda - b_\alpha^\delta \gamma_{\beta\delta}^\lambda + b_\beta^\delta \gamma_{\delta\alpha}^\lambda]. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\kappa_{\alpha\beta}$ są miarami odkształcenia dla zerowego przybliżenia określonymi w metryce powierzchni idealnej S_0 oraz $\gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ i $\kappa_{\alpha\beta}^\lambda$ dodatkowymi tensorami odkształcenia zależnymi od pól przemieszczeń V^l i V^l , a również od losowego pola odchyień w .

Miary odkształcenia powłoki wg (3.2) są określone w stosunku do powierzchni \underline{S} ; konsekwencją tego jest brak w (3.6) wyrazów deformacyjnych pochodzących od losowego pola odchyień w .

4. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

Analogicznie jak dla zależności geometrycznych (2.1) oraz tensorów odkształcenia (3.2) dokonano linyaryzacji sił wewnętrznych w opisie Lagrange'a określonych w metryce powierzchni \underline{S} ; mianowicie

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \underline{\mathbf{k}} &= k^{\alpha\beta} \underline{\mathbf{a}}_\alpha \otimes \underline{\mathbf{a}}_\beta \approx (k^{\alpha\beta} + \varepsilon k^{\alpha\beta}) (\mathbf{a}_\alpha + \varepsilon \mathbf{a}_\alpha) \otimes (\mathbf{a}_\beta + \varepsilon \mathbf{a}_\beta) = k^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta + \\ &\quad + \varepsilon (k^{\alpha\beta} - w b_\lambda^\beta k^{\lambda\alpha} - w b_\lambda^\alpha k^{\lambda\beta}) \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta + \varepsilon k^{\alpha\beta} [w|\beta \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_3 + \\ &\quad + w|\alpha \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_\beta] = \underline{\mathbf{k}} + \varepsilon \underline{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{m}}, \underline{\mathbf{z}}$$

gdzie

$$k^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, \quad k_1^{\alpha\beta} = n_1^{\alpha\beta}, m_1^{\alpha\beta}$$

są siłami wewnętrznymi odpowiednio dla zerowego i pierwszego przybliżenia odniesionymi do geometrii powierzchni S_0 . Pomijając w niniejszym opracowaniu obciążenia na brzegu powłoki, równaniu pracy wirtualnej możemy nadać postać

$$(4.2) \quad \int_{\hat{S}} [\underline{n} \delta \underline{\gamma} + \underline{m} \delta \underline{\kappa}] d\hat{S} - \int_{\hat{S}} \underline{p} \delta \underline{V} d\hat{S} = 0.$$

Tensory $\delta \underline{\gamma}$ i $\delta \underline{\kappa}$ są wirtualnymi miarami odkształcenia, które wyznaczamy dla wirtualnego pola przemieszczeń $\delta \underline{V}$ ze wzorów (3.6).

Wektor obciążenia zewnętrznego \underline{p} można przekształcić następująco:

$$(4.3) \quad \underline{p} = p_\alpha \underline{a}_\alpha + p_3 \underline{a}_3 \approx (p^\alpha + \varepsilon p_1^\alpha) (\underline{a}_\alpha + \varepsilon \underline{a}_{\alpha 1}) + (p + \varepsilon p_1) (\underline{a}_3 + \varepsilon \underline{a}_{31}),$$

gdzie p^α , p są składowymi powierzchniowego obciążenia deterministycznego; p_1^α , p_1 oznaczają dodatkowe składowe obciążenia o charakterze losowym; \underline{a}_α , \underline{a}_3 są określone wg (2.1).

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń w (4.2) otrzymano następujące równania równowagi:

a) dla zerowego przybliżenia

$$(4.4) \quad \begin{aligned} (n^{\alpha\beta} - b_\lambda^\beta m^{\alpha\lambda})|_\alpha - b_\lambda^\beta m^{\alpha\lambda}|_\alpha + p^\beta &= 0, \\ m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} + p &= 0, \end{aligned}$$

b) dla pierwszego przybliżenia

$$(4.5) \quad \begin{aligned} (n_1^{\alpha\beta} - b_\lambda^\beta m_1^{\alpha\lambda})|_\alpha - b_\lambda^\beta m_1^{\alpha\lambda}|_\alpha + p_*^\beta &= 0, \\ m_1^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} n_1^{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} m_1^{\alpha\beta} + p_* &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.6) \quad \begin{aligned} p_*^\beta &= -4 (w_\lambda b_\lambda^\alpha n^{\lambda\beta})|_\alpha - \gamma_{\alpha\lambda}^{\cdot\beta} n^{\alpha\lambda} + p_1^\beta + 2b_\lambda^\beta (w_\lambda b_\lambda^\alpha m^{\alpha\varphi})|_\alpha + 2(c_\lambda^\lambda w m^{\alpha\beta})|_\alpha + \\ &+ 2b_\lambda^\beta (w_\lambda b_\lambda^\alpha m^{\alpha\lambda})|_\alpha + 2(b_\lambda^\beta b_\varphi^\alpha w m^{\alpha\lambda})|_\alpha - m^{\alpha\lambda} (b_\alpha^\delta \gamma_{\delta\lambda}^{\cdot\beta} + b_\delta^\beta \gamma_{\alpha\lambda}^{\cdot\delta} - b_\alpha^\delta \gamma_{\lambda\delta}^{\cdot\beta} + \\ &+ b_\lambda^\delta \gamma_{\delta\alpha}^{\cdot\beta}) - 2w_\lambda b_\lambda^\beta p^\alpha - m^{\alpha\lambda}|_\alpha (w_\lambda|_\alpha^\beta - c_\lambda^\beta w) - [m^{\alpha\lambda} (w_\lambda|_\alpha^\beta - c_\lambda^\beta w)]|_\alpha, \\ p_* &= -2 (w_\lambda b_\lambda^\beta m^{\alpha\lambda})|_{\alpha\beta} + 2w_\lambda b_\lambda^\beta c_{\alpha\beta} m^{\alpha\lambda} - 2 (w_\lambda b_\lambda^\alpha m^{\lambda\beta})|_{\alpha\beta} + 2w_\lambda b_\lambda^\alpha c_{\alpha\beta} m^{\lambda\beta} - \\ &- m^{\alpha\beta} b_\alpha^\lambda (w_\lambda|_{\lambda\beta} - c_{\lambda\beta} w) - m^{\alpha\beta} b_{\lambda\beta} (w_\lambda|_\alpha^\lambda - c_\lambda^\lambda w) - 4w c_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + \\ &+ n^{\alpha\beta} (w_\lambda|_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} w) + p_1. \end{aligned}$$

Jak wynika z (4.4) równania równowagi dla zerowego przybliżenia są identyczne z równaniami dla powłoki idealnej [14], przy sprowadzeniu obciążenia zewnętrznego do geometrii powierzchni środkowej S_0 .

Równania równowagi (4.5) mają identyczną strukturę operatorów różniczkowych z równaniami (4.4); obciążenie sprowadzone p_*^β i p_* jest zależne zarówno od obciążenia dodatkowego p_1^β i p_1 jak też od rozwiązania z zerowego przybliżenia.

5. ZWIĄZKI FIZYCZNE

Dla cienkich powłok izotropowych tensory sił wewnętrznych określone w geometrii S można na podstawie [4 i 14] napisać następująco:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{n}} &= D [(1-\nu) \underline{\underline{\gamma}} + \nu \underline{\underline{a}} \operatorname{tr} \underline{\underline{\gamma}}], \\ \underline{\underline{m}} &= B [(1-\nu) \underline{\underline{\kappa}} + \nu \underline{\underline{a}} \operatorname{tr} \underline{\underline{\kappa}}], \\ D &= Et (1-\nu^2), \quad B = Et^3 / 12 (1-\nu^2). \end{aligned}$$

Dokonując analogicznego rozwinięcia jak w (3.6) otrzymano

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{n}} &\approx \underline{\underline{n}} + \varepsilon \underline{\underline{n}} \approx D [(1-\nu) (\underline{\underline{\gamma}} + \varepsilon \underline{\underline{\gamma}}) + \nu (\underline{\underline{a}} + \varepsilon \underline{\underline{a}}) \cdot \operatorname{tr} (\underline{\underline{\gamma}} + \varepsilon \underline{\underline{\gamma}})], \\ \underline{\underline{m}} &\approx \underline{\underline{m}} + \varepsilon \underline{\underline{m}} \approx B [(1-\nu) (\underline{\underline{\kappa}} + \varepsilon \underline{\underline{\kappa}}) + \nu (\underline{\underline{a}} + \varepsilon \underline{\underline{a}}) \cdot \operatorname{tr} (\underline{\underline{\kappa}} + \varepsilon \underline{\underline{\kappa}})]. \end{aligned}$$

Wobec (2.2) oraz (3.6) dodatkowe tensory $\underline{\underline{a}}_i$, $\underline{\underline{\gamma}}_i$ i $\underline{\underline{\kappa}}_i$ zawierają odpowiednie składowe w polibazie $\underline{\underline{a}}_\alpha \otimes \underline{\underline{a}}_\beta$ jak też w $\underline{\underline{a}}_\alpha \otimes \underline{\underline{a}}_3$ i $\underline{\underline{a}}_3 \otimes \underline{\underline{a}}_\beta$. Z punktu widzenia dalszego zastosowania istotne są tylko składowe w pierwszej z wyżej wymienionych polibaz.

Po dokonaniu w (5.2) niezbędnych działań i uproszczeń dla pierwszego przybliżenia oraz przy wykorzystaniu (4.1) otrzymano odpowiednio następujący wynik:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} n_{\alpha\beta} &= D [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta} + \nu a_{\alpha\beta} \gamma_\lambda^\lambda], \\ m_{\alpha\beta} &= B [(1-\nu) \kappa_{\alpha\beta} + \nu a_{\alpha\beta} \kappa_\lambda^\lambda], \\ n_{1\alpha\beta} &= D [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta} + \nu a_{\alpha\beta} \gamma_\lambda^\lambda + 2\nu w_\lambda (a_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\rho} b^{\lambda\rho} - b_{\alpha\beta} \gamma_\lambda^\lambda)], \\ m_{1\alpha\beta} &= B [(1-\nu) \kappa_{\alpha\beta} + \nu a_{\alpha\beta} \kappa_\lambda^\lambda + 2\nu w_\lambda (a_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\rho} b^{\lambda\rho} - b_{\alpha\beta} \kappa_\lambda^\lambda)], \end{aligned}$$

gdzie $n_{\alpha\beta}$ i $m_{\alpha\beta}$ są tensorami sił wewnętrznych dla zerowego przybliżenia, określonymi w bazie wektorów $\underline{\underline{a}}^\alpha$ na powierzchni S_0 i zależnymi od miar odkształcenia zerowego przybliżenia. $n_{1\alpha\beta}$, $m_{1\alpha\beta}$ oznaczają odpowiednie siły wewnętrzne pierwszego przybliżenia.

Dodatkowe siły wewnętrzne $n_{1\alpha\beta}$ i $m_{1\alpha\beta}$ są, jak wynika z powyższych wzorów, zależne od miar odkształcenia zerowego i pierwszego przybliżenia oraz od losowego pola odchyłeń w_λ .

6. POWŁOKA O MAŁEJ WYNIOSŁOŚCI. ZASTOSOWANIE METODY PERTURBACYJNEJ

Zastosowanie wzorów (3.6), (4.5) i (5.3) do szczegółowej analizy powłok z losowymi wstępnymi zmianami geometrycznymi przedstawiono na przykładzie powłoki o małej wyniosłości.

Wzorując się częściowo na pracy [22] otrzymano następujące równania problemu:

$$(6.1) \quad \Psi_0^{\alpha\beta} + \left(\frac{i}{\lambda}\right) e^{\alpha\rho} e^{\beta\gamma} Z|_{\alpha\beta} \Psi_0^{\rho\gamma} = \underline{\underline{q}}, \quad \Psi_1^{\alpha\beta} + \left(\frac{i}{\lambda}\right) e^{\alpha\rho} e^{\beta\gamma} Z|_{\alpha\beta} \Psi_1^{\rho\gamma} = \underline{\underline{q}}.$$

Pierwsze z powyższych równań jest klasycznym równaniem Helmholtza dla małowyniosłej powłoki o idealnym kształcie [6, 22]; nie jest zatem przedmiotem dalszych rozważań. Natomiast związek (6.1)₂ określa problem w ramach pierwszego przybliżenia przez funkcję

$$(6.2) \quad \Psi = V^3 + i\kappa \Phi, \quad \kappa = 1/Et\lambda, \quad \lambda = t/[12(1-\nu^2)]^{1/2},$$

gdzie V^3 oznacza dodatkowe przemieszczenie normalne wg pierwszego przybliżenia, Φ dodatkową funkcję naprężeń pierwszego przybliżenia związaną z siłami $n^{\alpha\beta}$ następującą zależnością:

$$(6.3) \quad n^{\alpha\beta} = c^{\alpha\gamma} e^{\beta\rho} \Phi|_{\gamma\rho} - \underline{B}^{\alpha\beta}.$$

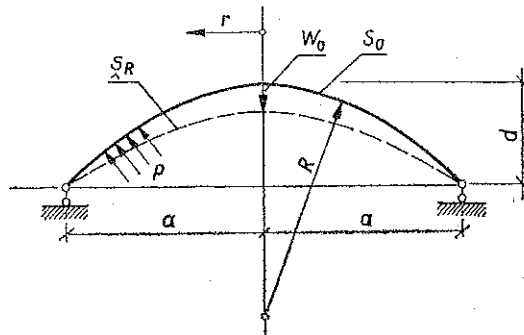
W zależności tej $\underline{B}^{\alpha\beta}$ jest rozwiązaniem szczególnym następującego równania:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \underline{B}^{\alpha\beta} &= P_1^{\beta}, \\ P_1^{\beta} &\approx D [(1-\nu) \underline{\gamma}^{\alpha\beta} + \nu \alpha^{\alpha\beta} \underline{\gamma}_\lambda^\lambda - 2\nu \underline{w} (\alpha^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\rho} b_{\lambda\rho} - b^{\alpha\beta} \gamma_\lambda^\lambda)]|_{\alpha} + \\ &\quad + 4 [\underline{w} b_\lambda^\alpha n^{\lambda\beta}]|_{\alpha} + m^{\alpha\lambda} |_{\alpha} \underline{w}|_\lambda^\beta + (n^{\alpha\lambda} \underline{w}|_\lambda^\beta)|_{\alpha}, \\ \underline{\gamma}^{\alpha\beta} &= \gamma^{\alpha\beta\lambda} V_\lambda + V^3 (\underline{w}|^{\alpha\beta} - c^{\alpha\beta} \underline{w}). \end{aligned}$$

Pozostałe wielkości w (6.1) są następujące: Z opisuje powierzchnię środkową powłoki S_0 , $e^{\alpha\beta}$ jest tensorem Ricciego na S_0 ,

$$(6.5) \quad \begin{aligned} q &= \frac{1}{B} [p_1 - \underline{B}^{\alpha\beta} Z|_{\alpha\beta}] - i\kappa \nu P_1^\alpha |_{\alpha} + i\kappa c^{\alpha\beta} e^{\gamma\rho} \underline{B}_{\alpha\gamma} |_{\beta\rho} - \\ &\quad - \frac{i}{\lambda} [(V^3 \underline{w}|_{\lambda\mu})|_{\alpha\beta} + \underline{w}|_{\lambda\beta} V^3 |_{\mu\alpha}] e^{\lambda\alpha} e^{\mu\beta}, \\ p_1 &= D [(1-\nu) \underline{\gamma}^{\alpha\beta} + \nu \alpha^{\alpha\beta} \underline{\gamma}_\lambda^\lambda - 2\nu \underline{w} (\alpha^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\rho} b_{\lambda\rho} - b^{\alpha\beta} \gamma_\lambda^\lambda)] b_{\alpha\beta} + \\ &\quad + B [(1-\nu) \underline{\kappa}^{\alpha\beta} + \nu \alpha^{\alpha\beta} \underline{\kappa}_\lambda^\lambda - 2\nu \underline{w} (\alpha^{\alpha\beta} \kappa^{\lambda\rho} b_{\lambda\rho} - b^{\alpha\beta} \kappa_\lambda^\lambda)]|_{\alpha\beta} + \\ &\quad + 2 (\underline{w} b_\lambda^\alpha m^{\lambda\beta})|_{\alpha\beta} + 2 (\underline{w} b_\lambda^\alpha m^{\lambda\beta})|_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} (b_\alpha^\lambda \underline{w}|_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \underline{w}|_{\lambda\alpha}) - n^{\alpha\beta} \underline{w}_{\alpha\beta}, \\ \underline{\kappa}_{\alpha\beta} &\approx -V^3 (b_\alpha^\lambda \underline{w}|_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \underline{w}|_{\lambda\alpha}), \end{aligned}$$

$n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$, V^3 oznaczają siły wewnętrzne i przemieszczenie normalne dla powłoki idealnej, tzn. dla zerowego przybliżenia.



Rys. 2. Powłoka sferyczna o małej wyniosłości.

W szczególnym przypadku powłoki sferycznej (rys. 2) równanie (6.1) sprowadza się do postaci

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\alpha}^4 \Psi - i \nabla_{\alpha}^2 \Psi &= q / \epsilon^4, \\
 \nabla_{\alpha}^2 &= d^2 / d\alpha^2 + \frac{1}{\alpha} d / d\alpha, \\
 \alpha &= \epsilon r, \quad \epsilon = \alpha_0 / a, \\
 \alpha_0^2 &= 4\delta (3(1-\nu^2))^{1/2} / t, \\
 R &= a^2 / 2\delta.
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

Przyjmując losowe pole odchyłek normalnych w w postaci

$$w = w_0 (1 - r^2 / a^2),
 \tag{6.7}$$

gdzie w_0 oznacza zmienną losową, możemy przedstawić obciążenie dodatkowe (6.5)₁ przy uwzględnieniu głównych składników w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
 q / \epsilon^4 \approx & \left[(\underline{A} + i\underline{B}) I_0(\alpha \sqrt{i}) \frac{4pa^4}{B\alpha_0^4} + \frac{p}{Be^4} \right] \frac{w_0}{\delta} + \\
 & + \frac{k}{BRE^4} [2\underline{C} + (2\underline{A} - i\nu\underline{B}) \operatorname{ber} \alpha - i(\nu\underline{A} - 2i\underline{B}) \operatorname{bei} \alpha] + \\
 & + \frac{k}{BRE^4} \left[-\underline{A}Br(\alpha) + \underline{B} \cdot Bi(\alpha) + \frac{i}{\alpha} (\underline{A}Br(\alpha) - \underline{B} \cdot Bi(\alpha)) \right], \\
 k = & \frac{2pa^2}{1-\nu^2} \frac{w_0}{\delta}.
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

Pierwszy składnik w (6.8) jest identyczny ze składnikiem podanym w pracy [8], który był wyprowadzony z klasycznego zastosowania metody małego parametru. A, B, C są stałymi całkowania rozwiązania równania (6.1) dla zerowego przybliżenia [6]. $I_0(\alpha \sqrt{i})$ oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu, $\operatorname{ber} \alpha, \operatorname{bei} \alpha$ są funkcjami Kelvina, a pozostałe wielkości są następujące:

$$\begin{aligned}
 Br(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int \alpha \operatorname{ber}' \alpha d\alpha, \quad (\dots)' = \frac{d(\dots)}{d\alpha}, \\
 Bi(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int \alpha \operatorname{bei}' \alpha d\alpha.
 \end{aligned}
 \tag{6.9}$$

Jak wynika z oszacowania funkcji (6.8), składniki tam występujące są wielkościami tego samego rzędu i uwzględnienie tylko pierwszego składnika jest nieuzasadnione.

Rozwiązanie równania (6.6) wobec (6.8) jest następujące:

$$\Psi = C_1 + (A_1 + iB_1) I_0(\alpha \sqrt{i}) + \Psi_{1p},
 \tag{6.10}$$

$$(6.11) \quad \Psi_{1p} = -\frac{4pa^4}{B\alpha_0^4} \frac{\alpha}{2} [\underline{A} \operatorname{ber}' \alpha - \underline{B} \operatorname{bei}' \alpha + i(\underline{A} \operatorname{bei}' \alpha + \underline{B} \operatorname{ber}' \alpha)] \frac{w_0}{\delta} + \\ + i\alpha^2 \frac{p}{4Be^4} \frac{w_0}{\delta} - \frac{k}{4BRE^4} \{ (2+\nu) [\underline{A} \operatorname{ber} \alpha - \underline{B} \operatorname{bei} \alpha - i(\underline{A} \operatorname{bei} \alpha + \\ + \underline{B} \operatorname{ber} \alpha)] + (2-\nu) \alpha [\underline{A} \operatorname{ber}' \alpha - \underline{B} \operatorname{bei}' \alpha + i(\underline{A} \operatorname{bei}' \alpha + \\ + \underline{B} \operatorname{ber}' \alpha)] \} + i \frac{\alpha^2}{2} \frac{C \cdot k}{BRE^4} + \Psi_{kp},$$

gdzie A_1, B_1, C_1 oznaczają stałe całkowania rozwiązania ogólnego równania (6.6), Ψ_{kp} całkę szczególną równania (6.6) zależną od funkcji (6.9) i wyznaczoną numerycznie na komputerze.

Sily wewnętrzne pierwszego przybliżenia wyznaczono ze wzorów następujących:

$$(6.12) \quad N_r = \frac{\epsilon^2}{\alpha} \Phi_{1,\alpha}, \quad N_\theta = \epsilon^2 \Phi_{1,\alpha\alpha}, \\ M_r = -B \left[V_{1,\alpha\alpha}^3 + \frac{\nu}{\alpha} V_{1,\alpha}^3 \right] \epsilon^2, \\ M_\theta = -Be^2 \left[\frac{1}{\alpha} V_{1,\alpha}^3 + \nu V_{1,\alpha\alpha}^3 \right], \\ V_1^3 = \operatorname{Re}(\Psi), \quad \kappa\Phi = \operatorname{Im}(\Psi).$$

Po wykonaniu koniecznych przekształceń sily wewnętrzne i przemieszczenie normalne — dla pierwszego przybliżenia — sprowadzić można do następującej postaci:

$$(6.13) \quad N_r = \frac{2pa^2}{\delta} \frac{\circ}{\delta} \underline{N}_r + \frac{w_0}{\delta} \frac{pa^2}{4\delta} \left(\frac{2}{1-\nu} \right) (\underline{N}_r^p + \underline{N}_r^{kp}), \\ N_\theta = \frac{2pa^2}{\delta} \frac{\circ}{\delta} \underline{N}_\theta + \frac{w_0}{\delta} \frac{pa^2}{4\delta} \left(\frac{2}{1-\nu} \right) (\underline{N}_\theta^p + \underline{N}_\theta^{kp}), \\ M_r = \frac{4pa^2}{\alpha_0^2} \frac{\circ}{\delta} \underline{M}_r + \frac{w_0}{\delta} \frac{pa^2}{\alpha_0^2} \left(\frac{1}{1-\nu} \right) (\underline{M}_r^p + \underline{M}_r^{kp}), \\ M_\theta = \frac{4pa^2}{\alpha_0^2} \frac{\circ}{\delta} \underline{M}_\theta + \frac{w_0}{\delta} \frac{pa^2}{\alpha_0^2} \left(\frac{1}{1-\nu} \right) (\underline{M}_\theta^p + \underline{M}_\theta^{kp}), \\ V_1^3 = \frac{4pa^4}{B\alpha_0^4} \frac{\circ}{\delta} \underline{V}_1^3 + \frac{4pa^4}{B\alpha_0^4} \frac{w_0}{\delta^4} \left(\frac{1}{1-\nu} \right) \left(\underline{V}_1^3 + \underline{V}_1^{kp} \right), \\ \frac{\circ}{\delta} \underline{N}_r = \underline{A}_1 \frac{\operatorname{bei}' \alpha}{\alpha} + \underline{B}_1 \frac{\operatorname{ber}' \alpha}{\alpha}, \\ \underline{N}_r^p = \frac{2-\nu}{\alpha} (\underline{A} \operatorname{bei}' \alpha + \underline{B} \operatorname{ber}' \alpha) - \underline{A} \operatorname{ber} \alpha (4-3\nu) + \\ + \underline{B} \operatorname{bei} \alpha (4-3\nu) + 4\underline{C} + (1-\nu)/2,$$

$$\begin{aligned}
 (6.13) \quad \underset{\text{[cd.1]}}{\overset{0}{\sim}} N_{\theta} &= \underset{\sim}{A}_1 \left(\text{ber } \alpha - \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} \right) - \underset{\sim}{B}_1 \left(\text{bei } \alpha + \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} \right), \\
 N_{\theta}^p &= \underset{\sim}{A} \left[(4\nu-2) \text{ber } \alpha - \frac{(2+\nu)}{\alpha} \text{bei}' \alpha - (4-3\nu) \alpha \text{ber}' \alpha \right] + \\
 &\quad + \underset{\sim}{B} \left[(2-4\nu) \text{bei } \alpha - \frac{(2+\nu)}{\alpha} \text{ber}' \alpha + (4-3\nu) \alpha \text{bei}' \alpha \right] + 4\underset{\sim}{C} + (1-\nu)/2, \\
 \overset{0}{\sim} M_r &= \underset{\sim}{A}_1 \left[\text{bei } \alpha + (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} \right] + \underset{\sim}{B}_1 \left[\text{ber } \alpha - (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} \right], \\
 \overset{0}{\sim} M_r^p &= -\underset{\sim}{A} \left[(6+2\nu-3\nu^2) \text{bei } \alpha + (2+\nu) (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} + (4-3\nu) \alpha \text{bei}' \alpha \right] - \\
 &\quad - \underset{\sim}{B} \left[(6+2\nu-3\nu^2) \text{ber } \alpha + (2+\nu) (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} + (4-3\nu) \alpha \text{ber}' \alpha \right], \\
 \overset{0}{\sim} M_{\theta} &= \underset{\sim}{A}_1 \left[\nu \text{bei } \alpha - (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} \right] + \underset{\sim}{B}_1 \left[\nu \text{ber } \alpha + (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} \right], \\
 \overset{0}{\sim} M_{\theta}^p &= -\underset{\sim}{A} \left[\text{bei } \alpha (4+3\nu-2\nu^2) - (2+\nu) (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha \text{bei}' \alpha (2+\nu-2\nu^2) \right] - \underset{\sim}{B} \left[\text{ber } \alpha (4+3\nu-2\nu^2) + \right. \\
 &\quad \left. + (2+\nu) (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} + \alpha \text{ber}' \alpha (2+\nu-2\nu^2) \right], \\
 \overset{0}{\underset{1}{V}}^3 &= \underset{\sim}{C}_1 + \underset{\sim}{A}_1 \text{ber } \alpha - \underset{\sim}{B}_1 \text{bei } \alpha, \\
 \overset{p}{\underset{1}{V}}^3 &= -\underset{\sim}{A} [(2+\nu) \text{ber } \alpha + (4-3\nu) \alpha \text{ber}' \alpha] + \underset{\sim}{B} [(2+\nu) \text{bei } \alpha + (4-3\nu) \alpha \text{bei}' \alpha],
 \end{aligned}$$

gdzie $\underset{\sim}{N}_r^{kp}$, $\overset{kp}{\underset{1}{V}}^3$ oznaczają bezwymiarowe składniki zależne od Ψ_{kp} zgodnie z (6.11).

Tak np. dla powłoki wolnopodpartej (rys. 2) o następujących warunkach brzegowych:

$$(6.14) \quad \underset{1}{N}_r \Big|_{r=a} = 0, \quad \underset{1}{M}_r \Big|_{r=a} = 0, \quad \underset{1}{V}^3 \Big|_{r=a} = 0.$$

Stałe całkowania $\underset{\sim}{A}_1$, $\underset{\sim}{B}_1$, $\underset{\sim}{C}_1$ na podstawie (6.13) są następujące:

$$\begin{aligned}
 (6.15) \quad \underset{\sim}{A}_1 &= \frac{-w_0 \alpha_0}{4A_0 \delta} \left[\frac{1}{2} (\underset{\sim}{N}_r^p(\alpha_0) + \underset{\sim}{N}_r^{kp}(\alpha_0)) \left(\text{ber } \alpha_0 - (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha_0}{\alpha_0} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (\underset{\sim}{M}_r^p(\alpha_0) + \underset{\sim}{M}_r^{kp}(\alpha_0)) \frac{\text{ber}' \alpha_0}{\alpha_0} \right], \\
 \underset{\sim}{B}_1 &= -\frac{w_0}{\delta} \frac{\alpha_0}{4A_0} \left[(\underset{\sim}{M}_r^p(\alpha_0) + \underset{\sim}{M}_r^{kp}(\alpha_0)) \frac{\text{bei}' \alpha_0}{\alpha_0} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (\underset{\sim}{N}_r^p(\alpha_0) + \underset{\sim}{N}_r^{kp}(\alpha_0)) \left(\text{bei } \alpha_0 + (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha_0}{\alpha_0} \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$(6.15) \quad \underset{[od.]}{C_1} = \frac{w_0}{4\delta} \left(\underset{1}{V^3} + \underset{1}{V^{3kp}} \right) |_{\alpha=\alpha_0} - \underset{1}{A_1} \text{ber } \alpha_0 + \underset{1}{B_1} \text{bei } \alpha_0,$$

$$A_0 = \varphi_1 - (1-\nu) \varphi_2 / \alpha_0,$$

$$\varphi_1 = \text{ber } \alpha_0 \text{ bei}' \alpha_0 - \text{bei } \alpha_0 \text{ ber}' \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha|_{r=a}, \quad (\dots)' = \frac{d(\dots)}{d\alpha},$$

$$\varphi_2 = (\text{ber}' \alpha_0)^2 + (\text{bei}' \alpha_0)^2.$$

Całkowite siły wewnętrzne T_r, \dots, M_r wyznacza się ze wzorów

$$(6.16) \quad \begin{aligned} T_r &\approx T_r + \varepsilon N_r, & T_\theta &\approx T_\theta + \varepsilon N_\theta, \\ M_r &\approx M_r + \varepsilon M_r, & M_\theta &\approx M_\theta + \varepsilon M_\theta, \end{aligned}$$

gdzie T_r, \dots, M_θ są siłami wewnętrznymi dla zerowego przybliżenia [6].

Ponieważ dla sił wewnętrznych N_r, \dots, M_θ informacja o ich losowym charakterze jest zawarta w charakterystykach zmiennej losowej w_0 , przeto wartości oczekiwane $\langle D \rangle$ i wariancje $\langle DD \rangle$ tych sił wyznacza się z następujących związków:

$$(6.17) \quad \begin{aligned} \langle D \rangle &= D_0 + \frac{\langle W_0 \rangle}{\delta} D_1, \\ \langle DD \rangle &= \left[\frac{D_1}{\delta} \right]^2 \langle WW \rangle, \\ D_0 &= \{T_r, T_\theta, M_r, M_\theta\}, \\ D_1 &= \{N_r, N_\theta, M_r, M_\theta\}, \end{aligned}$$

gdzie $\langle W_0 \rangle$ i $\langle WW \rangle$ są odpowiednio wartością oczekiwaną i wariancją zmiennej losowej w_0 .

Wzory niniejszego rozdziału zostały zawarte w programie na komputer Odra 1204, który jest rozszerzeniem algorytmu podanego w [7 i 8].

7. PRZYKŁAD

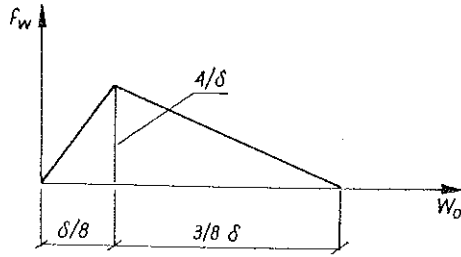
Dla powłoki sferycznej wolnopodpartej (rys. 2) wyznaczono wartości oczekiwane i odchylenia standardowe sił wewnętrznych. Zmienna losowa w_0 jest określona za pomocą następujących charakterystyk:

wartość oczekiwana i wariancja

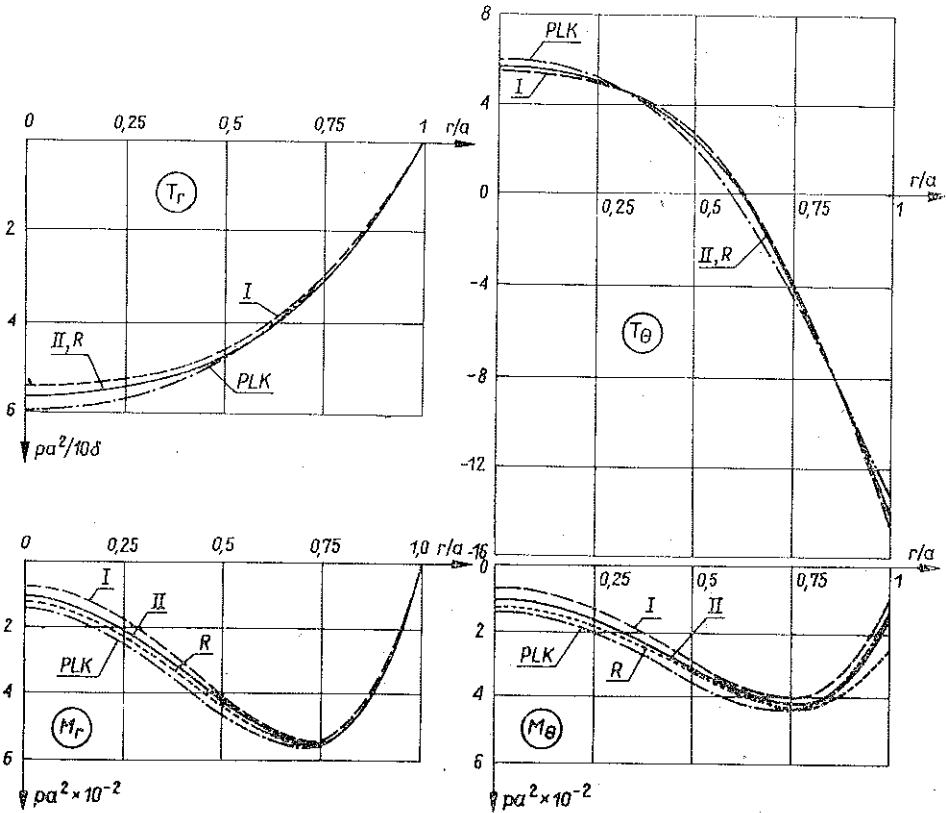
$$(7.1) \quad \langle W_0 \rangle = 5\delta/24, \quad \langle WW \rangle = 13\delta^2/1152;$$

funkcja gęstości prawdopodobieństwa (rys. 3)

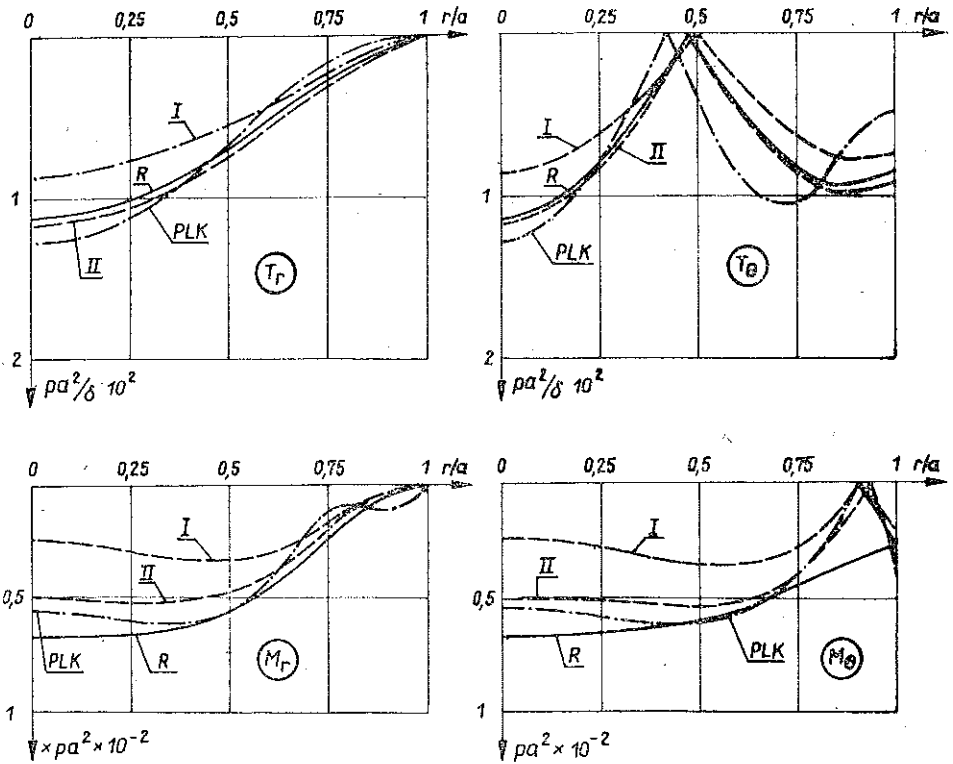
$$(7.2) \quad f(w_0) = \begin{cases} \frac{32w_0}{\delta^2} & \text{dla } 0 \leq w_0 \leq \frac{\delta}{8}, \\ \frac{16}{3\delta} \left(1 - 2\frac{w_0}{\delta}\right) & \text{dla } \frac{\delta}{8} \leq w_0 \leq \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$



Rys. 3. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej w_0



Rys. 4. Zestawienie wartości oczekiwanych sił wewnętrznych dla wolnopodpartej powłoki sferycznej. I, II — wartości oczekiwane dla pierwszego [8] i drugiego [21] przybliżenia wg metody małego parametru, R — wartości oczekiwane wg metody zbioru realizacji [8], PLK — wartości oczekiwane wg proponowanego algorytmu



Rys. 5. Zestawienie odchyleń standardowych sił wewnętrznych dla wolnopodpartej powłoki sferycznej.

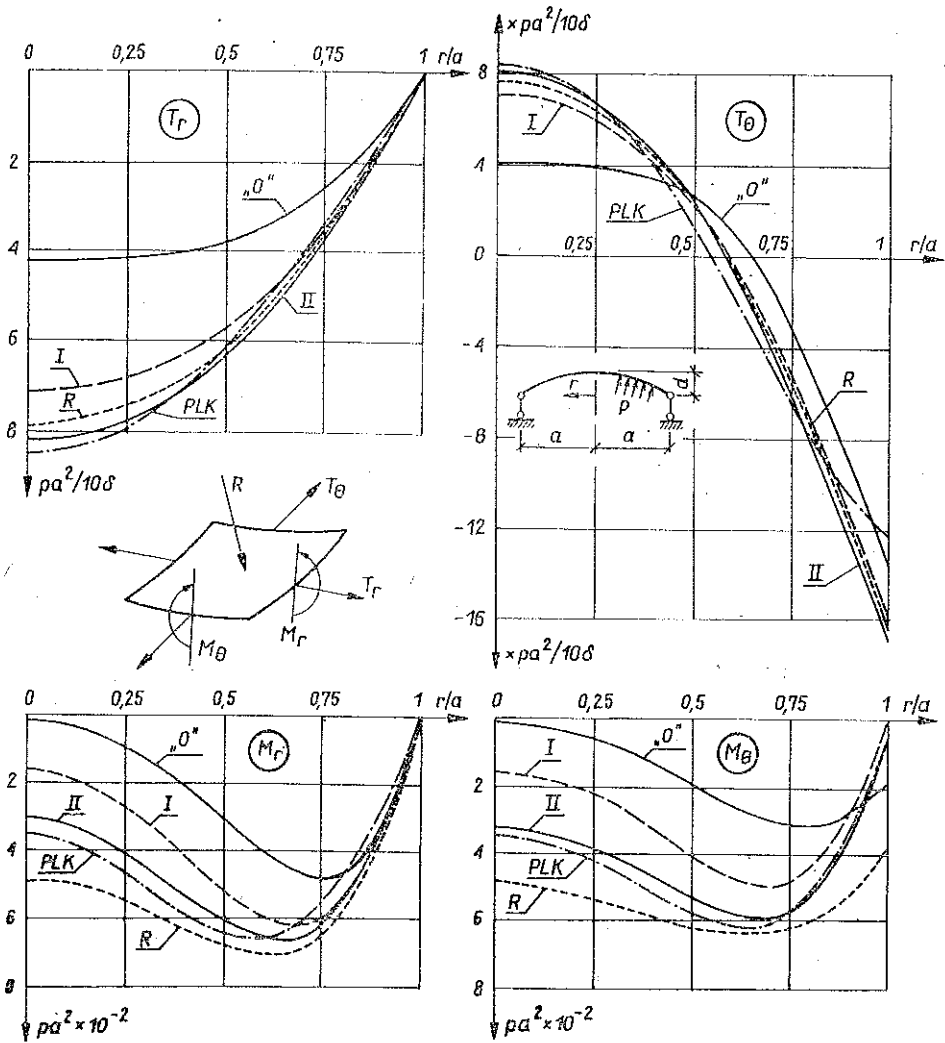
I, II — wyniki dla pierwszego [8] i drugiego [21] przybliżenia wg MMP, R — wyniki wg MZR [8], PLK — wyniki według proponowanego algorytmu

Wyniki obliczeń numerycznych według proponowanego algorytmu oznaczono umownie na rys. 4 i 5 jako PLK (Poincaré–Lightill–Kuo [18]) i porównano z wynikami prac [8 i 21]. Wyniki oznaczone na rys. 4 i 5 symbolem R są w ramach założeń teorii powłok o małej wyniosłości dokładne. Wyniki oznaczone symbolami I, II i PLK są przybliżone z definicji.

Różnice między ostatnimi wynikami a wynikami z symbolem R są miarą dokładności poszczególnych przybliżeń. Niezależnie od wyżej wymienionych obliczeń dla losowych imperfekcji wykonano również analizę powłoki dla deterministycznych zmian geometrycznych o strzałce $\delta = d/2$. Wyniki obliczeń naszego algorytmu łącznie z wynikami podanymi w pracach [8 i 21] przedstawiono na rys. 6.

8. UWAGI KOŃCOWE

W zadaniu o losowym kształcie (rys. 4 i 5), jeśli się przyjmie za poziom odniesienia wyniki uzyskane metodami zbioru realizacji (wyniki R), proponowany algorytm zmodyfikowanej metody perturbacyjnej (PLK) umożliwia w ramach pierw-



Rys. 6. Wyniki deterministyczne dla wolnopodpartej powłoki sferycznej.

O — powłoka idealna S_0 o wyniosłości $\delta=d$, I, II — wyniki dla pierwszego [8] i drugiego [21] przybliżenia wg MMP dla powłoki \hat{S}_R , R — wyniki dla powłoki idealnej \hat{S}_R o wyniosłości $\delta=d/2$, PLK — rozwiązania dla pierwszego przybliżenia wg proponowanego algorytmu dla powłoki \hat{S}_R

szego przybliżenia otrzymane dla wartości oczekiwanych sił T_r , T_θ oszacowanie od góry, natomiast dla wartości oczekiwanych momentów zginających wartości dokładniejsze nawet w stosunku do drugiego przybliżenia [21].

Podobną tendencję w rozkładach sił wewnętrznych można zaobserwować w zadaniu z deterministycznymi parametrami geometrycznymi (rys. 6), z tym zastrzeżeniem, że wyniki z poszczególnych przybliżeń są porównywane z rozwiązaniem dokładnym R (oznaczającym powłokę idealną o wyniosłości $\delta=d/2$).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. AL-DABBAGH, A. K. GUPTA, *Meridional imperfection in cooling tower design*, Journ. St. Div., **105**, ST6, 1089-1102, 1979.
2. J. ARBOCZ, J. G. WILLIAMS, *Imperfection surveys on 10-ft -diameter shell structure*, AJAA Journal, **15**, 7, 949-956, 1977.
3. J. C. AMAZIGO, *Buckling under axial compression of long cylindrical shells with random axisymmetric imperfections*, Quart. Appl. Math., **26**, 4, 537-566, 1969.
4. E. BIELEWICZ, M. SKOWRONEK, *Równania teorii powłok z geometrycznymi odchyleniami*, II Konferencja «Konstrukcje powłokowe teoria i zastosowanie», Góluń 1978.
5. В. В. БОЛОТНИ, *Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений*, Москва 1971.
6. CZ. BRANICKI, M. SKOWRONEK, *Obliczenie sferycznych o malej wyniosłości pokryw naczyń ciśnieniowych*, Arch. Bud. Maszyn., **18**, 2, 337-348, 1971.
7. CZ. BRANICKI, M. SKOWRONEK, *Obliczenia wytrzymałościowe sferycznych pokryw naczyń ciśnieniowych*, Dozór Techniczny, 3, 12-18, 1976.
8. CZ. BRANICKI, M. SKOWRONEK, *Losowe odchyłki geometrii w problemie statycznym mało-wyniosłej powłok isferycznej*, XXIV Konf. Nauk. KIL i w PAN i Kom. Nauki PZITB, 53-64, Krynica 1978.
9. J. CONNOR, N. MORIN, *Perturbation techniques in the analysis of geometrically nonlinear shells*, Proc. IUTAM symp. on High speed Computing of Elastic Structures, Liège, 683-705, 1970.
10. J. C. A. CROLL, F. KALELI, K. O. KEMP, *Meridionally imperfect cooling towers*, Journ. Eng. Mech. Div., **105**, EM5, 761-777, 1979.
11. G. N. FRESKAKIS, F. MORRIS, *Asymmetric buckling of imperfect spherical shells*, Journ. Eng. Mech. Div., **98**, EM5 1115-1131, 1972.
12. A. HIROYUKI, *On the influence of prebuckling deformations on the buckling of thin elastic shells*, Inter. Journ. Non-linear Mech., 8, 409-430, 1973.
13. W. FLÜGGE, *Powłoki — obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1972.
14. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. AK. Wet., Ser. B, **69**, 1, 1-54, 1966.
15. J. L. SANDERS, *An improved first approximation theory for thin shells*, NASA Report 24, 1959.
16. M. SKOWRONEK, *Metoda elementów skończonych i metoda małego parametru w zastosowaniu do powłok z odchyleniami geometrii*, IV Konf. «Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji» s. 249-259, Koszalin 1979.
17. D. VON TALASLIDIS, *Anwendung statistischer Methoden auf das Stabilitätsproblem «ungenaueigkeitsem — pfindlicher» Schalen*, Konstruktiver Ingenieurbau, Inst für Konstr. Ing. der Ruhr Universität Bochum, H. 25/26, Ag. 151-163, 1976.
18. H. S. TSIEN, *The Poincare-Lightill-Kuo method*, Advances Appl. Mech. 4, N. Y., 281-349, 1956.
19. P. TURULA, KUANG-HAN CHU, *Buckling of open cylindrical shells with imperfections*, J. Eng. Mech. Div., **96**, EM6, 1125-1142, 1970.
20. R. A. VAN SLOOTEN, T. T. SOONG, *Buckling of a long axially compressed, thin cylindrical shell with random initial imperfections*, J. Appl. Mech., **39** ser E, 4, 1066-1071, 1972.
21. Problem węzłowy 05.12. Temat 11.3. *Numeryczne obliczenia wytrzymałościowe konstrukcji przekryć powłokowych z uwzględnieniem czynników losowych*, Opracowanie Zakładu Mechaniki Budowli PG, 1978.
22. A. E. GREEN W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford 1968.

Резюме

ПЕРТУРБАЦИОННЫЙ МЕТОД В ПРИМЕНЕНИИ К ОБОЛОЧКАМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ

Работа содержит основные формулы линейной теории тонких оболочек со случайными геометрическими параметрами. Применяя модифицированный пертурбационный метод, получены соответствующие геометрические, статические и физические, соотношения для нулевого и первого приближений. Полученные формулы проверены численным путем в случае сферической пологой оболочки.

SUMMARY

THE PERTURBATION METHOD IN APPLICATION TO SHELLS WITH RANDOM IMPERFECTIONS

The paper presents the fundamental equations of the linear theory of thin shells with random geometry. Using the modified perturbation method, the corresponding geometrical, statical and physical relations are obtained for the zero and first approximations. The solution for a shallow spherical shell is verified numerically.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 kwietnia 1980 r.
