ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 29, 4, 503—525, 1981
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

# JEDNOWYMIAROWE ZAGADNIENIE IDENTYFIKACJI ROZKŁADU TEMPERATURY W PŁYCIE NIESKOŃCZONEJ

KRZYSZTOF GRYSA (POZNAŃ)

W odróżnieniu do badań opisanych w literaturze, które dotyczą zagadnień odwrotnych przewodnictwa cieplnego, niniejsza praca przedstawia przybliżone analityczne rozwiązanie odwrotnego zagadnienia pola temperatury w teorii naprężeń cieplnych, mianowicie problem identyfikacji rozkładu temperatury. Rozważania teoretyczne są prowadzone na następującej drodze: 1) na podstawie rozwiązania zagadnienia prostego (brzegowo-początkowego) wyznacza się formalne rozwiązanie zagadnienia odwrotnego, 2) ustala się warunki dla funkcji dopuszczalnych do opisu wewnętrznych «odpowiedzi» temperaturowej i przemieszczeniowej, 3) konstruuje się funkcje opisujące wewnętrzne odpowiedzi oraz 4) wyznacza się i dyskutuje przybliżone rozwiązanie zagadnienia. Do wyznaczenia rozwiązania przybliżonego (jak również ścisłego) wykorzystuje się technikę transformacji Laplace'a. Postać rozwiązania jest bardzo wygodna do obliczeń numerycznych. Przedstawione są przykłady numeryczne ilustrujące dokładność otrzymanych wyników.

## Wstęp

Zagadnienia identyfikacji temperatury brzegu ciała, wywołującej pożądane bądź możliwe do zmierzenia wewnątrz ciała rozkłady temperatury, rozważane są w literaturze naukowej od około dwudziestu lat. Zagadnienia te są często określane jako «problemy odwrotne przewodnictwa cieplnego» [1, 2, 3, 4, 5 i in.], aczkolwiek określenie to jest dosyć nieprecyzyjne i obejmuje stosunkowo dużą klasę zagadnień [6].

Problem identyfikacji temperatury brzegu ciała różni się wyraźnie od zagadnienia wyznaczania pola temperatury w ciele. To drugie zagadnienie jest problemem początkowo-brzegowym, dla którego wyznaczenie rozwiązania jest w zasadzie sprawą nieskomplikowaną. To pierwsze jest problemem wyznaczenia pola temperatury na zewnątrz obszaru, w którym mamy poprawnie określone zagadnienie początkowo-brzegowe, przy czym dla tego «zewnętrza» musimy znać warunki początkowe. Jest to więc niejako ekstrapolacja temperatury poza obszar, w którym da się ona wyznaczyć konwencjonalnymi metodami. Z tej też przyczyny zagadnienia tego typu nazwano «odwrotnymi» w przeciwieństwie do zwykłych zagadnień początkowo-brzegowych, nazywanych prostymi lub bezpośrednimi.

Umiejętność identyfikacji temperatury brzegu ciała jako funkcji czasu, $T_b(t)$, na podstawie danych z jego wnętrza jest czasami jedyną metodą określenia jej. Na wielu bowiem powierzchniach bezpośredni pomiar temperatury jest niemożliwy ze względu na to, iż nie ma możliwości umieszczenia na nich czujników. Dotyczy to wszelkich powierzchni współpracujących z innymi powierzchniami, np. ściany komory spalania tłokowego silnika spalinowego [7], jak również powierzchni obmywanych przez silnie rozgrzany i szybko przemieszający się płyn czy gaz, np. wewnętrzne ściany silników odrzutowych i rakietowych czy powierzchnie łopatek turbin cieplnych. Dotychczas stosowane w literaturze metody identyfikacji temperatury brzegu opierały się głównie na znajomości tzw. wewnętrznej odpowiedzi temperaturowej (w skrócie WOT), czyli zmiany temperatury w czasie w punkcie wewnętrznym ciała. Szeroki przegląd stosowanych przy tym metod podano w pracy [6]. Określenie «punkt wewnętrzny ciała» jest właściwie nieprecyzyjne, gdyż rozpatrywano — poza nielicznymi wyjątkami, np. w pracy [8] — zagadnienia jednowymiarowe, a ów «punkt wewnętrzny» był właściwie powierzchnią o równaniu $x$=const. Ponadto znana musiała być także temperatura na jakiejś drugiej powierzchni (przy rozpatrywaniu płyty czy rury grubościennej był to najczęściej drugi brzeg ciała). W niektórych pracach badano możliwości identyfikacji temperatury obu brzegów płyty czy rury grubościennej przy znanych WOT na powierzchniach $x=x_1$ i $x=x_2$ [9 i 10]. Prowadziło to do ciekawych konkluzji dotyczących samej techniki ekstrapolacji temperatury poza obszar wyznaczony przez $x=x_1$ i $x=x_2$; niektóre z tych konkluzji są w tej pracy uściślone.

Pod koniec lat siedemdziesiątych podjęto próbę wyznaczenia temperatury brzegu opierając się na znajomości wewnętrznej odpowiedzi naprężeniowej przy założeniu, iż w ciele brak źródeł ciepła [11]. Praca niniejsza stanowi znaczne uściślenie idei zawartych w [11]. Przyjęcie do rozważań ciała o nieskomplikowanych kształtach (płyta nieskończona o grubości jednostkowej) pozwoliło ustalić nie tylko związki opisujące temperaturę brzegu $T_b(t)$ w zależności od WOT czy wewnętrznej odpowiedzi przemieszczeniowej (w skrócie WOP), ale również przeanalizować ograniczenia, jakim muszą podlegać funkcje opisujące te wewnętrzne odpowiedzi. Ten drugi problem umknął uwadze autorów, którzy zajmowali się dotychczas zagadnieniami odwrotnymi pól temperatur, co było często przyczyną niepowodzeń przy próbach efektywnego zastosowania otrzymanych wyników [np. 1, 3 i 4]. W pracy [11] problem ten podjęto, lecz podane tam ograniczenie dotyczy tylko WOT i ma stosunkowo skomplikowaną postać, sama zaś analiza prowadząca do tego jest niepełna. W niniejszej pracy dokonano pełnej analizy tego problemu, w wyniku czego wyznaczono ograniczenia dla funkcji opisujących tak WOT jak i WOP. Pokazano także, jak na podstawie dyskretnego zbioru danych z pomiarów zbudować funkcję dopuszczalną — odpowiedź wewnętrzną, która z kolei pozwoli zidentyfikować temperaturę brzegu płyty, będącą bezpośrednią przyczyną takiej właśnie wewnętrznej odpowiedzi. Przedyskutowano wpływ odległości punktu wewnętrznego od powierzchni, na której identyfikuje się temperaturę $T_b(t)$, na dokładność identyfikacji. Podano także sposób wyznaczania temperatury w punktach pomiędzy brzegiem a powierzchnią, dla której znana jest odpowiedź wewnętrzna. Wprowadzoną w pracy metodę identyfikacji temperatury brzegu jak i wyznaczania temperatury w punktach wewnętrznych zilustrowano przykładami numerycznymi.

Warto zaznaczyć, że przedstawiona w niniejszej pracy technika identyfikacji temperatury jest bardzo efektywna. Spośród kryteriów efektywności, podanych w pracy [5], spełnione są następujące:

1. Identyfikowana temperatura jest tym dokładniej opisana, im większa jest dokładność danych pomiarowych.
2. Metoda jest stabilna przy zmniejszaniu przedziałów czasowych.
3. Metoda jest stosunkowo mało czuła na błędy pomiarowe.
4. Nie jest wymagana precyzyjna znajomość chwili, w której ciało zaczyna być nagrzewane.
5. Dopuszcza się nagrzewanie kontaktowe.
6. Otrzymane wzory są łatwe do zaprogramowania na maszynie cyfrowej.
7. Koszty obliczeń są niewielkie.
8. Ewentualny użytkownik metody nie musi znać zaawansowanego aparatu matematycznego.

Spośród wyróżnionych cech charakteryzujących opisaną w pracy technikę identyfikacji temperatury nieco szerszego omówienia wymaga cecha 4. Odnosi się ona do numerycznego odtwarzania temperatury brzegu płyty i ma określony sens praktyczny. Może się bowiem zdarzyć, że moment rozpoczęcia pomiarów wewnętrznej odpowiedzi w punkcie $x=x_1$ nie będzie się pokrywał z chwilą początkową procesu nagrzewania płyty. Mimo tego przyjęcie momentu rozpoczęcia pomiarów jako chwili początkowej procesu i założenie, iż w tym momencie i dla tak liczonego czasu mają zastosowanie wzory (1.3) nie powoduje istotnych zakłóceń procesu identyfikacji. Ilustrują to wyniki obliczeń podane w tablicach 3, 4 i 5.

## 1. Formalna konstrukcja transformaty Laplace'a rozwiązania

W celu identyfikacji temperatury na zewnątrz obszaru o znanym polu temperatury rozważymy najpierw zagadnienie proste. Podobnie jak w wielu innych pracach tego typu [1, 3, 4, 9, 11, 12 i inne] do wyznaczenia rozwiązania formalnego wykorzystamy transformację Laplace'a.

Rozważmy jednoosiowy jednowymiarowy stan odkształcenia w płycie o grubości $h$, której dolna powierzchnia jest płaszczyzną $Oyz$ układu współrzędnych o osi $Ox$ skierowanej do góry. Zakłada się, że jedyną różną od zera składową przemieszczenia jest składowa w kierunku osi $Ox$. Zagadnienie zagrzewania górnej powierzchni tej płyty temperaturą $T_b(t)$ przy zaizolowanym cieplnie i unieruchomionym dolnym brzegu, jednorodnych warunkach początkowych dla przemieszczeń i temperatury oraz wolnej od obciążeń górnej powierzchni można — na gruncie teorii naprężeń cieplnych — opisać następującym układem równań [14] i warunków:

równanie przewodnictwa cieplnego

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}\right)T(x,t)=0; \tag{1.1}$$

równanie ruchu w przemieszczeniach

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(x,t)=k\frac{\partial T}{\partial x},\quad x\in(0,h),\quad t>0; \tag{1.2}$$

warunki początkowe i brzegowe

$$\begin{gathered}T(x,0)=0,\quad u(x,0)=0,\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\\ T(h,t)=T_b(t),\quad \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad u(0,t)=0,\quad \sigma(h,t)=0,\end{gathered} \tag{1.3}$$

gdzie $T(x,t)$ oznacza temperaturę, $u(x,t)$ przemieszczenie w kierunku osi $Ox$, $\sigma(x,t)=\sigma_{xx}(x,t)$ składową tensora naprężenia, powiązaną z przemieszczeniem $u(x,t)$ i temperaturą $T(x,t)$ związkiem konstytutywnym [13 i 14]

$$\sigma(x,t)=\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial x}-(1+\nu)\alpha_t T\right], \tag{1.4}$$

$\kappa$ oznacza dyfuzyjność temperaturową, $c^2=\frac{2G}{\rho}\cdot\frac{1-\nu}{1-2\nu}$, $k=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t$, $G$ moduł ścinania, $\nu$ współczynnik Poissona, $\rho$ gęstość oraz $\alpha_t$ współczynnik rozszerzalności cieplnej.

Wykorzystując związek (1.4), można warunek dotyczący naprężenia $\sigma(h,t)$ napisać w postaci następującej:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=h}=kT_b(t). \tag{1.5}$$

Przechodząc do współrzędnych bezwymiarowych $\xi=x/h$, $\mathrm{Fo}=\kappa t/h^2$ możemy problem początkowo-brzegowy (1.1)-(1.3) sformułować następująco:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial}{\partial \mathrm{Fo}}\right)T(\xi,\mathrm{Fo})=0,\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{Fo}^2}\right)u(\xi,\mathrm{Fo})=k_1\frac{\partial T}{\partial\xi},\\ T(\xi,0)=0,\quad u(\xi,0)=0,\quad \left.\frac{\partial u(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\right|_{\mathrm{F}=0}=0,\\ T(1,\mathrm{Fo})=T_b(\mathrm{Fo}),\quad \left.\frac{\partial T(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=0,\quad u(0,\mathrm{Fo})=0,\times\\ \times\left.\frac{\partial u(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}=k_1T_b(\mathrm{Fo}),\end{gathered} \tag{1.6}$$

gdzie

$$c_1=\frac{ch}{\kappa},\quad k_1=kh.$$

Zakładając, że wszystkie wyżej wspomniane funkcje są odpowiedniej klasy różniczkowalności i stosując transformację Laplace'a [15] łatwo otrzymuje się dla podanego wyżej problemu początkowo-brzegowego rozwiązanie w transformatach:

$$\bar{T}(\xi, s)=\bar{T}_b(s)\frac{\cosh(\xi\sqrt{s})}{\cosh\sqrt{s}},$$

$$\tag{1.7} \bar{u}(\xi, s)=\frac{\bar{T}_b(s)\,k_1\,c_1}{c_1^2-s}\left[\frac{c_1\sinh(\xi\sqrt{s})}{\sqrt{s}\cosh\sqrt{s}}-\frac{\sinh\left(\xi\frac{s}{c_1}\right)}{\cosh\frac{s}{c_1}}\right],$$

przy czym nadkreśleniami oznaczono transformaty Laplace'a poszczególnych funkcji, $s$ zaś jest parametrem transformacji.

Jeśli teraz założymy, że w punkcie $\xi=\xi^*$, gdzie $0<\xi^*<1$, dany jest przebieg funkcji opisującej temperaturę lub przemieszczenie (WOT lub WOP), to możemy — wykorzystując wzór $(1.7)_1$ lub $(1.7)_2$ — w sposób zupełnie formalny wyznaczyć transformatę Laplace'a temperatury $T_b(\mathrm{Fo})$ (tzn. funkcję $\bar{T}_b(s)$), która odpowiada zmianom temperatury w punkcie $\xi^*$. Jeśli np. w punkcie $\xi=\xi^*$ znana jest WOT $T_1(\mathrm{Fo})=T(\xi^*, \mathrm{Fo})$, to znajdujemy

$$\tag{1.8} \bar{T}_b^T(s)=\bar{T}_1(s)\frac{\cosh\sqrt{s}}{\cosh(\xi^*\sqrt{s})}.$$

Jeśli w punkcie $\xi=\xi^*$ znana jest WOP i $u_1(\mathrm{Fo})=u(\xi^*, \mathrm{Fo})$, to

$$\tag{1.9} \bar{T}_b^u(s)=\bar{u}_1(s)\frac{c_1^2-s}{k_1\,c_1}\,\frac{\sqrt{s}\cosh\sqrt{s}\cosh\frac{s}{c_1}}{c_1\sinh(\xi^*\sqrt{s})\cosh\frac{s}{c_1}-\sqrt{s}\sinh\left(\xi^*\frac{s}{c_1}\right)\cosh\sqrt{s}}.$$

Górny indeks w symbolu $T_b(s)$ we wzorach (1.8) i (1.9) oznacza, na podstawie jakiej wielkości została zidentyfikowana temperatura brzegu.

Wyrazimy jeszcze transformatę temperatury $\bar{T}(\xi, s)$ za pomocą danych $T_1(s)$ lub $u_1(s)$. Wykorzystując wzory (1.7), (1.8) i (1.9) znajdujemy, iż gdy znana jest WOT, to

$$\tag{1.10} \bar{T}^T(\xi, s)=\bar{T}_1(s)\frac{\cosh(\xi\sqrt{s})}{\cosh(\xi^*\sqrt{s})},$$

gdy zaś znana jest WOP, to

$$\tag{1.11} \bar{T}^u(\xi, s)=\bar{u}_1(s)\frac{c_1^2-s}{k_1\,c_1}\,\frac{\sqrt{s}\cosh(\xi\sqrt{s})\cosh\frac{s}{c_1}}{c_1\sinh(\xi^*\sqrt{s})\cosh\frac{s}{c_1}-\sqrt{s}\sinh\left(\xi^*\frac{s}{c_1}\right)\cosh\sqrt{s}}.$$

Podobnie jak we wzorach (1.8) i (1.9) górne indeksy w symbolu $T(\xi, s)$ informują, na podstawie jakiej wielkości, została zidentyfikowana temperatura w punktach o współrzędnej $\xi$ z przedziału (0, 1).

## 2. Warunki ograniczające dla WOT i WOP

Nie każda funkcja $T_1$ (Fo) lub $u_1$ (Fo) może opisywać w rozważanym problemie WOT czy, odpowiednio, WOP. Mogą to być tylko takie funkcje, dla których spełnione są następujące warunki:

1) Funkcje opisujące WOT lub WOP muszą mieć skończone granice dla $\mathrm{Fo} \to 0_+$ i dla $\mathrm{Fo} \to \infty$, a także muszą być ograniczone dla $\mathrm{Fo} \in (0, \infty)$ (warunek ten wynika z fizyki zagadnienia) oraz

2) transformaty $\bar{T}_b(s)$ i $\bar{T}(\xi, s)$, określone wzorami (1.8)-(1.11), muszą być odwracalne.

Pierwszy warunek oznacza, że dla każdej funkcji $T_1$ (Fo) i $u_1$ (Fo) muszą być spełnione równości i ograniczenia [15 i 16]:

$$
\begin{aligned}
&|\lim_{\mathrm{Fo}\to 0} g(\mathrm{Fo})| = |\lim_{s\to\infty} s\bar{g}(s)| < \infty, \\
(2.1) \qquad &|\lim_{\mathrm{Fo}\to \infty} g(\mathrm{Fo})| = |\lim_{s\to 0} s\bar{g}(s)| < \infty,
\end{aligned}
$$

przy czym istnienie granic zapewnia fizyka zagadnienia. Ponadto konsekwencją ograniczoności odpowiedzi wewnętrznych jest zerowy współczynnik wzrastania [16] dla WOT i WOP, tzn. funkcje $T_1$ (Fo) i $u_1$ (Fo) muszą spełniać nierówności

$$
(2.2) \qquad |T_1(\mathrm{Fo})| < M_T \quad \text{oraz} \quad |u_1(\mathrm{Fo})| < M_u \quad \text{dla każdego} \quad \mathrm{Fo} \in (0, \infty).
$$

Konsekwencją istnienia zerowego wykładnika wzrostu jest analityczność transformat Laplace'a tych funkcji dla $\mathrm{Re}\, s > 0$.

Warunek 2, dotyczący odwracalności transformat $\bar{T}_b(s)$ i $\bar{T}(\xi, s)$, można — wobec związku $(1.7)_1$ — zastąpić jednym warunkiem, odwracalności transformaty $\bar{T}_b(s)$. Wynika z tego, iż [15]

$$
(2.3) \qquad \lim_{s\to\infty} \bar{T}_b(s) = 0 \quad \text{dla} \quad \mathrm{Re}\, s > x_z,
$$

przy czym w rozważanym przypadku wobec wykładnika wzrostu równego zeru mamy $x_z = 0$.

Ponadto jeśli transformaty mają być odwracalne metodą residuów, to dochodzi konieczność spełnienia założeń lematu Jordana [15]. Jest to sytuacja korzystna dla dalszych rozważań, mimo iż wynika stąd, że transformata $\bar{T}_b(s)$ musi spełniać warunek silniejszy niż (2.3), mianowicie musi istnieć taki ciąg $k_n$ dodatnich, $n = 1, 2, \ldots$, że

$$
(2.4) \qquad |\bar{T}_b(s)|_{|s|=R_n} \leqslant k_n \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} k_n = 0,
$$

gdzie $R_n \to \infty$ dla $n \to \infty$ [15]. Ponadto $\bar{T}_b(s)$ musi być ciągła dla $|s| = R_n$.

W celu wyznaczenia warunków ograniczających dla WOT i WOP wykorzystamy w pierwszym rzędzie warunek (2.4). Dla transformat $\bar{T}_1(s)$ i $\bar{u}_1(s)$ wynikają stąd dla dużych $|s|$ następujące nierówności:

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} |\bar{T}_1(s)| &\leqslant \frac{K_T}{|s^\alpha|} \exp[-(1-\xi^*)\operatorname{Re}\sqrt{s}],\\ |\bar{u}_1(s)| &\leqslant \frac{K_u}{|s^{1,5+\alpha}|} \exp[-(1-\xi^*)\operatorname{Re}\sqrt{s}], \end{aligned}$$

gdzie $K_T$, $K_u$ i $\alpha$ oznaczają stałe dodatnie, których istnienie jest konsekwencją założenia, iż $k_n \to 0$ dla $n \to \infty$. Przyjęliśmy mianowicie iż $k_n$ maleje jak $K/R_n^\alpha$.

Nierówności (2.5) gwarantują możliwość odwrócenia transformaty $\bar{T}_b(s)$, ale należy jeszcze uwzględnić ograniczenia (2.1), wynikające z fizyki zagadnienia. Zachodzą następujące szacowania:

$$(2.6)\qquad |\lim_{\mathrm{Fo}\to 0} T_1(\mathrm{Fo})| = |\lim_{s\to\infty} s\bar{T}_1(s)| \leqslant \lim_{s\to\infty} |s\bar{T}_1(s)| \leqslant \lim_{s\to\infty} \left| \frac{K_T}{s^{\alpha-1}} \exp[-(1-\xi^*)\sqrt{s}] \right| = 0$$

i podobnie

$$(2.7)\qquad |\lim_{\mathrm{Fo}\to 0} u_1(\mathrm{Fo})| \leqslant \lim_{s\to\infty} \left| \frac{K_u}{s^{0,5+\alpha}} \exp[-(1-\xi^*)\sqrt{s}] \right| = 0.$$

Warunek $(2.1)_2$ jest spełniony dla wszystkich transformat $\bar{T}(\xi, s)$ i $\bar{u}(\xi, s)$ danych związkami (1.7), o ile tylko $|\lim_{s\to 0} s\bar{T}_b(s)| < \infty$ (co w procesach rzeczywistych ma miejsce zawsze).

Porównując nierówność $(2.5)_1$ z nierównością (1.18) z pracy [11] widać, że nierówność $(2.5)_1$ jest znacznie łatwiejsza do wykorzystania w praktyce. Jest to co prawda również związane z kształtem rozważanego ciała.

Zatem ważnymi dla celów praktycznych ograniczeniami są nierówności (2.5), gdyż gwarantują one zarówno odwracalność transformaty $\bar{T}_b(s)$ jak i spełnienie warunku $(2.1)_1$.

Przy odtwarzaniu temperatury brzegu na podstawie danych pomiarowych dysponuje się zwykle zbiorem danych dyskretnych. Podane nierówności pozwalają na ich podstawie zbudować taką funkcję opisującą WOT lub WOP, żeby przy jej użyciu dało się efektywnie wyznaczyć temperaturę brzegu.

## 3. Konstrukcja funkcji opisujących wewnętrzne odpowiedzi

Załóżmy, że jako wynik odczytów z czujnika (tensometra, termopary lub innego) otrzymaliśmy zbiór danych dyskretnych $\{h_0, h_1, ..., h_n\}$. Zbiór tych danych odpowiada wartościom funkcji $h(\mathrm{Fo})$ opisującej przebieg badanej wielkości w chwilach czasu $\{\mathrm{Fo}_0, \mathrm{Fo}_1, ..., \mathrm{Fo}_n\}$. Zachodzi zatem zależność

$$(3.1)\qquad h(\mathrm{Fo}_l) = h_l \quad \text{dla} \quad l = 0, 1, 2, ..., n,$$

przy czym postać funkcji $h(\mathrm{Fo})$ nie jest znana.

Załóżmy, że $\mathrm{Fo}_l = l\Delta$ dla $l=0, 1, 2, ..., n$, tzn. że odległości czasowe pomiędzy poszczególnymi pomiarami są stałe. Można by oczywiście założyć, że $l$-ty krok czasowy ma długość $\Delta_l$ oraz że $\mathrm{Fo}_n = \sum_{l=0}^{n} \Delta_l$, ale to założenie nie zwiększyłoby ogólności rozważań, natomiast skomplikowałoby wzory.

Zatem dla stałego kroku czasowego mamy

$$h(l\Delta) = h_l. \tag{3.2}$$

Wzór (3.2) pozwala w prosty sposób określić funkcję, przyjmującą wartości $h_l$ dla $\mathrm{Fo}_l = l\Delta$. Będzie to mianowicie funkcja schodkowa, określona następująco:

$$Sh(\mathrm{Fo}) = \sum_{l=0}^{n} h_l \left[ \eta\left(\frac{\mathrm{Fo}}{\Delta} - l\right) - \eta\left(\frac{\mathrm{Fo}}{\Delta} - l - 1\right)\right], \tag{3.3}$$

gdzie $\eta(x)$ oznacza funkcję Heaviside'a. Funkcja $Sh(\mathrm{Fo})$ jest transformowalna [15], jej zaś transformata Laplace'a ma postać

$$\overline{Sh}(s) = \frac{h_0}{s} + \frac{1}{s} \sum_{l=1}^{n+1} (h_l - h_{l-1}) e^{-sl\Delta}, \qquad h_{n+1} = 0. \tag{3.4}$$

Jeśli funkcja $h(\mathrm{Fo})$ spełnia jednorodny warunek początkowy, to $h_0 = h(0) = 0$. Wówczas pierwszy składnik po prawej stronie wzoru (3.4) znika i transformata $\overline{Sh}(s)$ przyjmuje szczególnie prostą postać

$$\overline{Sh}(s) = \frac{1}{s} \sum_{l=1}^{n+1} (h_l - h_{l-1}) e^{-sl\Delta}. \tag{3.5}$$

Jak zatem widać, mając zbiór danych dyskretnych $\{h_l\}_{l=0,1,...,n}$ możemy łatwo określić transformatę Laplace'a funkcji schodkowej, aproksymującej przebieg funkcji $h(\mathrm{Fo})$. Należy teraz sprawdzić, czy tak skonstruowane transformaty funkcji aproksymujących WOT i WOP spełniają nierówności (2.5) oraz warunek $(2.1)_2$. Co do tego ostatniego to widać, że

$$\lim_{s\to 0} s\,\overline{Sh}(s) = \lim_{s\to 0} \left[ \sum_{l=1}^{n+1} (h_l - h_{l-1}) e^{-sl\Delta} \right] = 0,$$

gdyż $h_0 = h_{n+1} = 0$. Natomiast spełnienie nierówności (2.5) dla odpowiednio dużych $|s|$ wynika z faktu, iż dla $|s| > (1-\xi^*)^2/\Delta^2$ i $\mathrm{Re}\, s > 0$ zachodzi nierówność

$$|e^{-s\Delta}| < |e^{-(1-\xi^*)\sqrt{s}}|.$$

Tak więc transformaty funkcji schodkowych, aproksymujących WOT i WOP, określone wzorem (3.5) (przy $h_0 = h_{n+1} = 0$) spełniają warunki określone w rozdziale 2. Wynika stąd, że funkcje schodkowe określone dla $\mathrm{Fo} \in (0, n\Delta)$ i przyjmujące wartości $h_l$ dla $\mathrm{Fo} \in (l\Delta, (l+1)\Delta)$, gdzie $h_0 = h_{n+1} = 0$, są funkcjami dopuszczalnymi do opisu wewnętrznych odpowiedzi.

W sposób podobny do wyżej opisanego można dowieść, że każda funkcja schodkowa zbudowana na zbiorze wartości $\{h_l\}_{l=0,1,\dots,n}$, przyjmująca wartość 0 dla $\mathrm{Fo} \in (0, \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$, jest funkcją dopuszczalną. Wynika stąd cecha 4 metody, wspomniana we wstępie. Cechę tę uwypuklimy jeszcze w przykładzie numerycznym.

Zaletą tak zbudowanych funkcji jest ich prostota, jak również to, że podstawienie ich do wzorów (1.8) i (1.9) pozwala w prosty sposób wyznaczyć funkcję aproksymującą rozwiązanie ścisłe $T_b$ (Fo). W dalszej części pracy będziemy tę funkcję oznaczać $AT_b$ (Fo). Podobnie wykorzystanie WOT lub WOP we wzorach (1.10) i (1.11) pozwala w nieskomplikowany sposób wyznaczyć $AT(\xi, \mathrm{Fo})$, czyli aproksymatę temperatury punktów wewnętrznych płyty.

## 4. Konstrukcja funkcji $AT_b$ (Fo) dla poszczególnych przypadków

Funkcje schodkowe $ST_1$ (Fo) i $Su_1$ (Fo) aproksymujące WOT i WOP na powierzchni $\xi = \xi^*$, gdzie $\xi^* \in (0, 1)$, buduje się opierając się na zbiorze danych dyskretnych, pochodzących z eksperymentu. Dokładność przybliżenia temperatury brzegu $T_b$ (Fo) przez funkcję $AT_b$ (Fo) zależy zatem od dokładności odczytów wielkości mierzonych, jak również odległości czasowych pomiędzy odczytami.

Jeśli odczyt danych dotyczy temperatury $T_1$ (Fo), to

$$\overline{ST}_1(s) = \frac{1}{s} \sum_{l=1}^{n+1} (T_l - T_{l-1})\, e^{-sl\Delta}, \qquad T_0 = T_{n+1} = 0. \tag{4.1}$$

Na podstawie związku (1.8) otrzymujemy

$$\overline{AT}_b^T(s) = \frac{\cosh\sqrt{s}}{s\cosh(\xi^*\sqrt{s})} \sum_{l=1}^{n+1} (T_l - T_{l-1})\, e^{-sl\Delta}, \tag{4.2}$$

skąd łatwo znajduje się funkcję aproksymującą temperaturę brzegu:

$$AT_b^T(\mathrm{Fo}) = \sum_{l=1}^{n+1} \left[ (T_l - T_{l-1})\, \eta(\mathrm{Fo} - l\Delta) \left\{ 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos(\lambda_j/\xi^*)}{\lambda_j} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \exp\left[-(\lambda_j/\xi^*)^2 (\mathrm{Fo} - l\Delta)\right] \right\} \right], \tag{4.3}$$

gdzie $\lambda_j = \frac{\pi}{2}(2j-1)$. Transformatę $\overline{AT}_b^T(s)$ odwraca się metodą residuów przy wykorzystaniu twierdzenia Heaviside'a o przesunięciu [15].

Ze wzoru (4.3) określającego $AT_b^T$ (Fo) można przejść do rozwiązania ścisłego $T_b^T$ (Fo). Przechodząc mianowicie z $\Delta$ do zera przy zwiększaniu $n$ do nieskończoności (przy jednoczesnej stałości iloczynu $n\Delta$) otrzymujemy

$$T_b^T(\mathrm{Fo}) = \frac{dT_1(\mathrm{Fo})}{d\,\mathrm{Fo}} \ast \left\{ 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos(\lambda_j/\xi^*)}{\lambda_j} \exp\left( -\frac{\lambda_j^2}{\xi^{*2}} \mathrm{Fo} \right) \right\}, \tag{4.4}$$

gdzie $\ast$ oznacza mnożenie splotowe.

Jeśli odczyt danych dotyczy przemieszczenia $u_1$ (Fo), to

$$\overline{Su}_1(s) = \frac{1}{s}\sum_{l=1}^{n+1}(u_l - u_{l-1})\,e^{-sl\Delta}, \qquad u_0 = u_{n+1} = 0. \tag{4.5}$$

Na podstawie związku (1.9) znajdujemy

$$\overline{AT}_b^u(s) = \frac{c_1^2 - s}{k_1 c_1 \sqrt{s}}\,\frac{\cosh\sqrt{s}\cosh\dfrac{s}{c_1}\displaystyle\sum_{l=1}^{n+1}[(u_l-u_{l-1})\exp(-sl\Delta)]}{c_1\sinh(\xi^*\sqrt{s})\cosh\dfrac{s}{c_1} - \sqrt{s}\sinh\left(\xi^*\dfrac{s}{c_1}\right)\cosh\sqrt{s}}. \tag{4.6}$$

Podobnie jak poprzednio transformatę $\overline{AT}_b(s)$ odwracamy metodą residuów. Aby wyznaczyć funkcję $AT_b^u$ (Fo), trzeba jednak najpierw znaleźć pierwiastki równania przestępnego

$$\frac{c_1\sinh(\xi^*\sqrt{s})}{\sqrt{s}\cosh\sqrt{s}} = \frac{\sinh\left(\xi^*\dfrac{s}{c_1}\right)}{\cosh\dfrac{s}{c_1}}. \tag{4.7}$$

Można pokazać, że równanie (4.7) ma tylko pierwiastki rzeczywiste, ujemne. Podstawiając we wzorze tym $-r$ na miejsce $s$ otrzymujemy równanie

$$\frac{c_1\sin(\xi^*\sqrt{r})}{\sqrt{r}\cos\sqrt{r}} = -\frac{\sinh\left(\xi^*\dfrac{r}{c_1}\right)}{\cosh\dfrac{r}{c_1}}, \tag{4.8}$$

które można w prosty sposób (np. metodą siecznych) rozwiązać na maszynie cyfrowej. Oznaczając kolejne pierwiastki tego równania jako $r_1, r_2, \ldots$, znajdujemy następnie funkcję $AT_b^u$ (Fo):

$$AT_b^u(\text{Fo}) = \sum_{l=1}^{n+1}\Bigg\{(u_l-u_{l-1})\,\eta(\text{Fo}-l\Delta)\Bigg[\frac{1}{k_1\xi^*} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{r_j}\cosh\dfrac{r_j}{c_1}}{e(r_j)}(c_1^2+r_j)\exp[-r_j(\text{Fo}-l\Delta)]\Bigg]\Bigg\}, \tag{4.9}$$

gdzie

$$\begin{aligned} e(r_j) = k_1 c_1 \Bigg\{&\sqrt{r_j}\left[\sin(\xi^*\sqrt{r_j})\sinh\frac{r_j}{c_1} - \frac{1}{2}\sin\sqrt{r_j}\sinh\left(\xi^*\frac{r_j}{c_1}\right)\right] - \\ &-\frac{c_1}{2\sqrt{r_j}}\sin(\xi^*\sqrt{r_j})\cosh\frac{r_j}{c_1} + \frac{\xi^*}{2}\left[c_1\cos(\xi^*\sqrt{r_j})\cosh\frac{r_j}{c_1} + \right.\\ &\left.+2\frac{r_j}{c_1}\cos\sqrt{r_j}\cosh\left(\xi^*\frac{r_j}{c_1}\right)\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Na podstawie wzoru (4.9) można wyznaczyć, przechodząc z $\Delta$ do zera i z $n$ do nieskończoności przy zachowaniu stałości iloczynu $n\Delta$, rozwiązanie ścisłe. Ma ono postać

$$T_b^u(\mathrm{Fo}) = \frac{du(\mathrm{Fo})}{d\,\mathrm{Fo}} * \left\{\frac{1}{k_1 \xi^*} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{r_j}\cosh\frac{r_j}{c_1}}{e(r_j)} (c_1^2 + r_j)\, e^{-r_j \mathrm{Fo}}\right\}. \tag{4.11}$$

W pracy [9] podano, iż odległości od punktu $\xi^*$, w którym odczytuje się WOT, do brzegu, na którym odtwarza się temperaturę, nie może przekraczać odległości punktu $\xi^*$ od drugiego brzegu płyty. W rozważanym przypadku oznacza to, iż $\xi^*$ powinno być większe od 0,5. Tymczasem, analizując wzór (4.3) lub (4.4) można dojść do wniosku, iż musi być spełniona nierówność słabsza, mianowicie

$$\xi^* > \frac{1}{3}. \tag{4.12}$$

Nierówność (4.12) wynika z faktu, iż dla $\xi^* = 1/3$ wartość każdego składnika szeregu występującego we wzorze (4.3) lub (4.4) wynosi zero, wobec czego odtwarzanie temperatury brzegu przy korzystaniu z danych dla $\xi^* = 1/3$ (lub ogólnie dla $\xi^* = 1/(2m+1)$, gdzie $m = 1, 2, \ldots$) prowadzi do błędnego wniosku, iż $T_b^T(\mathrm{Fo}) = T_1(\mathrm{Fo})$.

## 5. Konstrukcja funkcji $AT(\xi, F_0)$ dla obu przypadków

Funkcję $AT(\xi, \mathrm{Fo})$ dla $\xi \in (0, 1)$ można wyznaczyć dwoma sposobami: bądź wykorzystując wzór $(1.7)_1$ oraz wzory (4.3) lub (4.9), bądź bezpośrednio ze wzorów (1.10) i (1.11). Pierwszy ze wspomnianych sposobów prowadzi do wzoru następującego:

$$AT(\xi, \mathrm{Fo}) = \frac{d\,AT_b(\mathrm{Fo})}{d\,\mathrm{Fo}} * \left\{1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos\xi\lambda_j}{\lambda_j} e^{-\lambda_j^2 \mathrm{Fo}}\right\}; \tag{5.1}$$

wzór ten dla $\xi = 1$ staje się tożsamością. Zastąpienie $AT_b(\mathrm{Fo})$ przez prawą stronę wzoru (4.3) lub (4.9) prowadzi w tym wypadku do podwójnych szeregów nieskończonych. Jest to zatem sposób prowadzący do niewygodnych dla numerycznych obliczeń wyników. Natomiast drugi sposób, polegający na wykorzystaniu związków (1.10) i (1.11) daje wyniki zbliżone do otrzymanych w rozdziale poprzednim dla $AT_b(\mathrm{Fo})$. Jeśli np. odczyt danych dotyczy temperatury $T_1(\mathrm{Fo})$, to funkcja $\overline{ST}_1(s)$ określona jest za pomocą wzoru (4.1), a na $AT^T(\xi, s)$ otrzymujemy wzór

$$\overline{AT}^T(\xi, s) = \frac{\cosh(\xi\sqrt{s})}{s\cosh(\xi^*\sqrt{s})} \sum_{l=1}^{n+1} (T_l - T_{l-1})\, e^{-sl\Delta}. \tag{5.2}$$

Stąd łatwo znajdujemy

$$AT^T(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{l=1}^{n+1} \left[(T_l - T_{l-1})\, \eta(\mathrm{Fo} - l\Delta)\left\{1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos(\xi\lambda_j/\xi^*)}{\lambda_j} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \exp\left[-\frac{\lambda_j^2}{\xi^{*2}}(\mathrm{Fo} - l\Delta)\right]\right\}\right]. \tag{5.3}$$

Jak widać ze wzoru (5.3), $AT^T(\xi^*, \mathrm{Fo}) = ST(\xi^*, \mathrm{Fo}) = ST_1(\mathrm{Fo})$ oraz $AT^T(1, \mathrm{Fo}) = AT_b^T(\mathrm{Fo})$.

Jeśli odczyt danych dotyczy przemieszczenia $u_1(\mathrm{Fo})$, to funkcja $\overline{Su}_1(s)$ dana jest za pomocą wzoru (4.5), transformata zaś aproksymaty temperatury $AT^u(\xi, s)$ ma postać

$$(5.4)\qquad \overline{AT^u}(\xi, s) = \frac{c_1^2 - s}{k_1 c_1 \sqrt{s}} \cdot \frac{\cosh(\xi\sqrt{s})\cosh\frac{s}{c_1} \sum_{l=1}^{n+1} [(u_l - u_{l-1})\, e^{-sl\Delta}]}{c_1 \sinh(\xi^*\sqrt{s})\cosh\frac{s}{c_1} - \sqrt{s}\sinh\left(\xi^*\frac{s}{c_1}\right)\cosh\frac{s}{c_1}}.$$

Również i w tym przypadku do wyznaczenia funkcji $AT^u(\xi, \mathrm{Fo})$ konieczna jest znajomość pierwiastków równania (4.8). Dla funkcji $AT^u(\xi, \mathrm{Fo})$ znajdujemy przedstawienia następujące:

$$(5.5)\qquad AT^u(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{l=1}^{n+1}\left\{(u_l - u_{l-1})\,\eta(\mathrm{Fo} - l\Delta)\left[\frac{1}{k_1\xi^*} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(\xi\sqrt{r_j})\cosh\frac{r_j}{c_1}}{e(r_j)}(c_1^2 + r_j)\exp[-r_j(\mathrm{Fo} - l\Delta)]\right]\right\},$$

gdzie $e(r_j)$ określone przez wzór (4.10). Dla $\xi = 1$ otrzymujemy $AT^u(1, \mathrm{Fo}) = AT_b^u(\mathrm{Fo})$.

Również w wypadku identyfikacji temperatury punktów wewnętrznych istnieje naturalne ograniczenie odległości, na jaką można temperaturę ekstrapolować. Jak wynika ze wzoru (5.3), aby identyfikowana temperatura miała wartości «wiarygodne», współrzędna $\xi$ musi spełniać nierówność

$$(5.6)\qquad \xi < 3\xi^*.$$

Dokonując we wzorach (5.3) i (5.5) odpowiednich przejść granicznych można wyznaczyć ścisłe postaci rozwiązań, tzn. funkcje $T^T(\xi, \mathrm{Fo})$ i $T^u(\xi, \mathrm{Fo})$. Ze względu na podobieństwo tych rozwiązań do prawych stron wzorów (4.4) i (4.11) nie będziemy ich osobno przytaczać. Ponadto pojęcie «rozwiązanie ścisłe» przy zagadnieniu identyfikacji temperatury na podstawie danych doświadczalnych jest w zasadzie pojęciem abstrakcyjnym. Dysponując bowiem zbiorem danych dyskretnych można co najwyżej otrzymać bardzo dobrą aproksymację takiego rozwiązania.

## 6. Przykład numeryczny

Jako przykład pozwalający lepiej przeanalizować wzory (4.3), (4.9) lub (5.3) rozważymy zagadnienie następujące. Najpierw przyjmiemy $T_b(\mathrm{Fo}) = 1$ dla $\mathrm{Fo} \in (0, \infty)$ i na tej podstawie wyznaczymy postacie funkcji $T(\xi, \mathrm{Fo})$ oraz $u(\xi, \mathrm{Fo})$. Następnie, przyjmując jako dane «z pomiarów» zbiór wartości jednej z tych funkcji w różnych chwilach czasu dla $\xi = \xi^*$, będziemy identyfikować $T_b(\mathrm{Fo})$, tzn. będziemy szukać funkcji $AT_b(\mathrm{Fo})$.

Przyjmijmy $T_b(\mathrm{Fo})=1\cdot\eta(\mathrm{Fo})$ [$^0C$]. Wówczas transformaty, określone wzorami (1.7), dadzą się w prosty sposób odwrócić, Otrzymujemy

$$(6.1)\qquad T(\xi,\mathrm{Fo})=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(\xi\lambda_n)}{\lambda_n}\exp(-\lambda_n^2\,\mathrm{Fo}),$$

$$u(\xi,\mathrm{Fo})=k_1\,\xi+2k_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(\xi\lambda_n)}{c_1^2+\lambda_n^2}\left\{\cos(c_1\,\mathrm{Fo}\,\lambda_n)+\right.$$

$$\left.+\frac{c_1}{\lambda_n}\sin(c_1\,\mathrm{Fo}\,\lambda_n)+\frac{c_1^2}{\lambda_n^2}\exp(-\lambda_n^2\,\mathrm{Fo})\right\},$$

gdzie

$$\lambda_n=\frac{\pi}{2}(2n-1).$$

Obliczeń dokonano opierając się na następujących danych liczbowych:

$\kappa=1{,}19\cdot10^{-5}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, $G=7{,}9461\cdot10^{10}\,\mathrm{Nm^{-2}}$, $\nu=0{,}3$, $\rho=7{,}8\cdot10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$,

$\alpha_t=12\cdot10^{-6}\,\mathrm{deg^{-1}}$, $h=0{,}01$ m, $k_1=kh=\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\,h=2{,}2286\cdot10^{-7}\,\mathrm{m\,deg^{-1}}$,

$$c_1=\frac{ch}{\kappa}=\frac{h}{\kappa}\sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}\;5{,}0178\cdot10^6\ \text{(liczba bezwymiarowa).}$$

Powyższe dane materiałowe dotyczą stali St 20 [17]. Wyniki obliczeń podano w następujących jednostkach: temperaturę w stopniach Celsjusza, a przemieszczenie w centymetrach. Czas podano nie w jednostkach bezwymiarowych, lecz w sekundach, tzn. w czasie obliczeń zamiast czasu bezwymiarowego Fo (liczby Fouriera) podstawiono $\kappa t/h^2$.

Na podstawie powyższych danych łatwo jest obliczyć wartości funkcji określonych wzorami (6.1). Obliczeń dokonano dla następujących wartości $\xi^*$ i $t$:

dla $T(\xi,t)$

$\xi^*=0{,}4,\ 0{,}5,\ 0{,}7,\ 0{,}9$ oraz $t=1\,(1)\,30$;

$\xi^*=0{,}4,\ 0{,}9$ oraz $t=1\,(0.05)\,2$;

$\xi^*=0{,}4,\ 0{,}9$ oraz $t=10\,(0.05)\,11$;

dla $u(\xi,t)$

$\xi^*=0{,}5,\ 0{,}7,\ 0{,}9$ oraz $t=1\,(1)\,30$.

Zapis $x=a\,(b)\,c$ oznacza iż $x=a+nb$, gdzie $n=0,1,\ldots,(c-a)/b$.

Wyniki obliczeń zaokrąglano do czterech lub dwóch cyfr znaczących, a następnie na ich podstawie budowano funkcje $ST(\xi^*,t)$ i $Su(\xi^*,t)$. Funkcje te w dalszych rachunkach traktowano jako WOT i WOP. Wykorzystanie wzorów (4.3) i (4.9) pozwoliło określić dla każdego przypadku funkcję $AT_b(t)$. W jednym przypadku odtworzono funkcję $AT^T(\xi,t)$ na podstawie wzoru (5.3). Wykorzystano w tym celu WOT dla $\xi^*=0{,}4$, obliczeń zaś dokonano dla $\xi=0{,}5$. Aby móc dokonać analizy wzoru (4.9), niezbędnym było określenie kilku pierwszych pierwiastków równania (2.8). Wyliczono tylko te pierwiastki, których wartości były mniejsze od $10^3$ lub co najwyżej rzędu $10^3$. Dokładność obliczenia pierwiastków wynosiła $10^{-3}$. Pierwiastki te podano w tablicy 1. Wyniki pozostałych obliczeń przedstawiono w tablicach 2–9.

Jak widać z tablicy 2, funkcja $AT_b^T(t)$ bardzo dobrze przybliża funkcję $T_b(t)$ nawet przy dużym kroku czasowym, $\Delta t=1$s. Błąd aproksymacji mniejszy niż 5% otrzymuje się w przypadku $\xi^*=0{,}5$ po 8 sekundach, a np. w przypadku $\xi^*=0{,}9$ już po pierwszej sekundzie. Zmniejszenie dokładności danych pomiarowych (WOT) do dwóch cyfr znaczących (tablica 8) tylko nieznacznie pogarsza jakość aproksymacji, co potwierdza opisane we wstępie cechy 1 i 2 metody. Podobne uwagi można poczynić odnośnie do identyfikacji temperatury w punkcie wewnętrznym płyty (tablica 5). Analizując wyniki podane w tablicach 3, 4 i 5 można dojść do wniosku, że identyfikacja temperatury na podstawie danych dyskretnych «zbieranych» co 0,05 sekundy jest obarczona stosunkowo małym błędem nawet wtedy, gdy nie jest znana chwila początkowa, w której proces ogrzewania się rozpoczął. Potwierdza to cechę 4 metody. Na podstawie wyników zawartych w tablicach 2–5 oraz 7 i 8 można stwierdzić, że temperatura brzegu jest tym szybciej identyfikowana, im bliżej tego brzegu jest położony punkt pomiarowy. Jest to bardziej widoczne w przypadku, gdy dane są WOT (tablice 2–5 i 8).

Analiza wyników dotyczących identyfikacji temperatury brzegu na podstawie danych dotyczących przemieszczeń prowadzi do zaskakującego uproszczenia wzoru (4.9) dla przypadku, gdy $T_b(t)$ jest stała lub prawie stała w czasie. Mianowicie otrzymujemy wówczas

$$(6.2)\qquad T_b(\mathrm{Fo}_l)=\frac{u_l}{k_1\xi^*}=\frac{u_l}{kx^*},\qquad l=1,2,\ldots,n,$$

gdyż nieskończony szereg po prawej stronie wzoru (4.9) ma — dla odpowiednio dużych $\Delta$ (kroków czasowych) — wartość pomijalnie małą w porównaniu z ułamkiem $1/k_1\xi^*$. «Odpowiednio duże» kroki czasowe $\Delta$ to takie kroki, dla których pierwszy wyraz szeregu ma wartość o kilka — powiedzmy pięć — rzędów wielkości mniejszą od wspomnianego ułamka. Wyznaczenie kroku czasowego, dla którego

**Tablica 1. Osiem pierwszych pierwiastków równania (4.8) dla różnych wartości. $\xi^*$**

| | $\xi^*=0{,}9$ | $\xi^*=0{,}7$ | $\xi^*=0{,}5$ |
|---|---|---|---|
| $r_1$ | 12,185 | 20,136 | 39,479 |
| $r_2$ | 48,740 | 181,278 | 157,908 |
| $r_3$ | 109,656 | 503,548 | 355,304 |
| $r_4$ | 194,950 | 986,963 | 631,650 |
| $r_5$ | 779,819 | 1289,090 | 986,963 |
| $r_6$ | 986,963 | 1631,512 | 1421,225 |
| $r_7$ | 1218,476 | 2014,211 | 1934,454 |
| $r_8$ | 1474,351 | 2900,459 | 2526,625 |

Tablica 2. Identyfikacja temperatury brzegu na podstawie WOT dla $\xi^*=0,5$, 0,7 i 0,9 oraz kroku czasowego $\Delta t=1$ s przy dokładności odczytu do czterech cyfr znaczących

| | $\xi^*=0,5$ | | | $\xi^*=0,7$ | | | $\xi^*=0,9$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ [s] | $ST$[°C] | $AT_b$[°C] | błąd % | $ST$[°C] | $AT_b$[°C] | błąd % | $ST$[°C] | $AT_b$[°C] | błąd % |
| 1 | 0,3075 | 0,5902 | 40,08 | 0,5391 | 0,8702 | 13,08 | 0,8377 | 1,0288 | 2,88 |
| 2 | 0,4980 | 0,7633 | 23,67 | 0,6766 | 0,9353 | 6,47 | 0,8883 | 1,0087 | 0,87 |
| 3 | 0,6268 | 0,8289 | 17,11 | 0,7603 | 0,9518 | 4,82 | 0,9174 | 1,0055 | 0,55 |
| 4 | 0,7218 | 0,8728 | 12,72 | 0,8214 | 0,9629 | 3,71 | 0,9384 | 1,0037 | 0,37 |
| 5 | 0,7926 | 0,9052 | 9,48 | 0,8668 | 0,9715 | 2,85 | 0,9541 | 1,0024 | 0,24 |
| 6 | 0,8454 | 0,9294 | 7,06 | 0,9007 | 0,9784 | 2,16 | 0,9658 | 1,0016 | 0,16 |
| 7 | 0,8847 | 0,9473 | 5,27 | 0,9260 | 0,9837 | 1,63 | 0,9745 | 1,0010 | 0,10 |
| 8 | 0,9140 | 0,9606 | 3,94 | 0,9448 | 0,9877 | 1,23 | 0,9810 | 1,0007 | 0,07 |
| 9 | 0,9359 | 0,9707 | 2,93 | 0,9589 | 0,9909 | 0,81 | 0,9858 | 1,0004 | 0,04 |
| 10 | 0,9522 | 0,9782 | 2,18 | 0,9693 | 0,9930 | 0,70 | 0,9894 | 1,0002 | 0,02 |

Tablica 3. Identyfikacja temperatury brzegu na podstawie WOT dla $\xi^*=0,4$ i $\xi^*=0,9$ oraz dla $t=1\ (0,05)_2$ przy dokładności odczytu do czterech cyfr znaczących. Obliczenia prowadzone przy przyjęciu, iż pierwszy pomiar odległy jest od chwili rozpoczęcia procesu o 0,05 s

| czas | $\xi^*=0,4$ | | | $\xi^*=0,9$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ [s] | $ST$[°C] | $AT_b$[°C] | błąd % | $ST$[°C] | $AT_b$[°C] | błąd % |
| 1,00 | 0,2229 | 0,4437 | 55,63 | 0,8377 | 1,512 | 51,2 |
| 1,05 | 0,2351 | 0,4401 | 55,99 | 0,8416 | 1,302 | 30,2 |
| 1,10 | 0,2472 | 0,4376 | 56,25 | 0,8452 | 1,217 | 21,7 |
| 1,15 | 0,2589 | 0,4394 | 56,06 | 0,8486 | 1,170 | 17,0 |
| 1,20 | 0,2704 | 0,4436 | 55,64 | 0,8519 | 1,140 | 14,0 |
| 1,25 | 0,2816 | 0,4488 | 55,12 | 0,8549 | 1,118 | 11,8 |
| 1,30 | 0,2926 | 0,4545 | 54,55 | 0,8578 | 1,102 | 10,2 |
| 1,35 | 0,3033 | 0,4603 | 53,97 | 0,8606 | 1,090 | 9,0 |
| 1,40 | 0,3139 | 0,4664 | 53,36 | 0,8632 | 1,080 | 8,0 |
| 1,45 | 0,3242 | 0,4723 | 52,77 | 0,8657 | 1,072 | 7,2 |
| 1,50 | 0,3344 | 0,4785 | 52,15 | 0,8681 | 1,066 | 6,6 |
| 1,55 | 0,3444 | 0,4847 | 51,53 | 0,8704 | 1,060 | 6,0 |
| 1,60 | 0,3542 | 0,4908 | 50,92 | 0,8727 | 1,056 | 5,6 |
| 1,65 | 0,3638 | 0,4969 | 50,31 | 0,8748 | 1,052 | 5,2 |
| 1,70 | 0,3732 | 0,5029 | 49,71 | 0,8769 | 1,048 | 4,8 |
| 1,75 | 0,3825 | 0,5090 | 49,10 | 0,8790 | 1,046 | 4,6 |
| 1,80 | 0,3917 | 0,5152 | 48,48 | 0,8809 | 1,043 | 4,3 |
| 1,85 | 0,4007 | 0,5213 | 47,87 | 0,8828 | 1,041 | 4,1 |
| 1,90 | 0,4095 | 0,5273 | 47,27 | 0,8847 | 1,039 | 3,9 |
| 1,95 | 0,4182 | 0,5333 | 46,67 | 0,8865 | 1,037 | 3,7 |
| 2,00 | 0,4268 | 0,5394 | 46,06 | 0,8883 | 1,035 | 3,5 |

Tablica 4. Identyfikacja temperatury brzegu na podstawie WOT dla $\xi^*=0,4$ i $\xi^*=0,9$ dla $t=10\,(0,05)\,10,4$ przy dokładności odczytu do czterech cyfr znaczących. Obliczenia prowadzone przy przyjęciu, że pierwszy pomiar odległy jest od chwili rozpoczęcia procesu o 0,05 s

| czas $t$ [s] | $\xi^*=0,4$ $ST$[°C] | $AT_b$[°C] | błąd % | $\xi^*=0,9$ $ST$[°C] | $AT_b$[°C] | błąd % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10,00 | 0,9453 | 1,8816 | 88,16 | 0,9894 | 1,7869 | 78,60 |
| 10,05 | 0,9461 | 1,7651 | 76,51 | 0,9896 | 1,5298 | 52,98 |
| 10,10 | 0,9469 | 1,6604 | 66,04 | 0,9897 | 1,4232 | 42,32 |
| 10,15 | 0,9477 | 1,5828 | 58,28 | 0,9899 | 1,3621 | 36,21 |
| 10,20 | 0,9485 | 1,5212 | 52,12 | 0,9900 | 1,3211 | 32,11 |
| 10,25 | 0,9492 | 1,4690 | 46,90 | 0,9902 | 1,2915 | 29,15 |
| 10,30 | 0,9499 | 1,4233 | 42,33 | 0,9903 | 1,2685 | 26,85 |
| 10,35 | 0,9507 | 1,3827 | 38,27 | 0,9905 | 1,2505 | 25,05 |
| 10,40 | 0,9514 | 1,3459 | 34,59 | 0,9906 | 1,2353 | 23,53 |

Tablica 5. Identyfikacja temperatury brzegu na podstawie WOT dla $\xi^*=0,4$ i $\xi^*=0,9$ dla $t=10,45\,(0,05)11$ przy dokładności odczytu do czterech cyfr znaczących. Obliczenia prowadzone przy przyjęciu, że pierwszy pomiar odległy jest od chwili rozpoczęcia procesu o 0,05 s. $AT_b$ obliczane wg wzoru $AT_b=AT_b'+T_1\,(10,45)$, gdzie $AT_b'$ obliczane wg wzoru (4.3) na podstawie $ST_1'=ST_1-T_1(10,45)$

| czas $t$ [s] | $\xi^*=0,4$ $ST$[°C] | $AT_b$[°C] | błąd % | $\xi^*=0,9$ $ST$[°C] | $AT_b$[°C] | błąd % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10,45 | 0,9521 | 0,9528 | 4,72 | 0,9907 | 0,9909 | 0,91 |
| 10,50 | 0,9528 | 0,9541 | 4,59 | 0,9909 | 0,9912 | 0,88 |
| 10,55 | 0,9535 | 0,9553 | 4,47 | 0,9910 | 0,9913 | 0,87 |
| 10,60 | 0,9542 | 0,9565 | 4,35 | 0,9911 | 0,9915 | 0,85 |
| 10,65 | 0,9548 | 0,9574 | 4,26 | 0,9913 | 0,9918 | 0,82 |
| 10,70 | 0,9555 | 0,9585 | 4,15 | 0,9914 | 0,9919 | 0,81 |
| 10,75 | 0,9561 | 0,9594 | 4,06 | 0,9915 | 0,9920 | 0,80 |
| 10,80 | 0,9568 | 0,9604 | 3,96 | 0,9916 | 0,9921 | 0,79 |
| 10,85 | 0,9574 | 0,9612 | 3,88 | 0,9918 | 0,9924 | 0,76 |
| 10,90 | 0,9580 | 0,9620 | 3,80 | 0,9919 | 0,9925 | 0,75 |
| 10,95 | 0,9586 | 0,9627 | 3,73 | 0,9920 | 0,9926 | 0,74 |
| 11,00 | 0,9592 | 0,9633 | 3,67 | 0,9921 | 0,9927 | 0,73 |

Tablica 6. Identyfikacja temperatury w punkcie o współrzędnej $\xi=0,5$ na podstawie WOT w punkcie $\xi^*=0,4$ dla $t=1(1)10$, przy dokładności odczytu do czterech cyfr znaczących i porównanie jej z wartościami ścisłymi

| $t$ [s] | $ST$ [°C] | $AT$ [°C] | $T$ [°C] | błąd % |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,2229 | 0,2663 | 0,3075 | 13,40 |
| 2 | 0,4268 | 0,4734 | 0,4980 | 4,94 |
| 3 | 0,5731 | 0,6090 | 0,6268 | 2,84 |
| 4 | 0,6817 | 0,7086 | 0,7218 | 1,83 |
| 5 | 0,7627 | 0,7828 | 0,7926 | 1,24 |
| 6 | 0,8231 | 0,8381 | 0,8454 | 0,86 |
| 7 | 0,8681 | 0,8793 | 0,8847 | 0,61 |
| 8 | 0,9017 | 0,9100 | 0,9140 | 0,44 |
| 9 | 0,9267 | 0,9329 | 0,9359 | 0,32 |
| 10 | 0,9453 | 0,9499 | 0,9522 | 0,24 |

**Tablica 7.** Identyfikacja temperatury brzegu na podstawie WOP dla $\xi^*=0,5$, 0.7, 0,9 oraz dla kroku czasowego $\Delta t=1$ s przy dokładnośc odczytu do czterech cyfr znaczących

| | $\xi^*=0,5$ | | | $\xi^*=0,7$ | | | $\xi^*=0,9$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ [s] | $Su$ [cm]$\cdot 10^6$ | $\Delta T_b$[°C] | błąd % | $Su$ [cm]$\cdot 10^6$ | $\Delta T_b$[°C] | błąd % | $Su$ [cm]$\cdot 10^6$ | $\Delta T_b$[°C] | błąd % |
| 1 | 1,721 | 0,1544 | 84,56 | 3,578 | 0,2294 | 77,06 | 6,628 | 0,3304 | 66,94 |
| 2 | 4,050 | 0,3635 | 63,65 | 6,652 | 0,4264 | 57,36 | 10,13 | 0,5051 | 49,59 |
| 3 | 5,850 | 0,5250 | 47,50 | 8,930 | 0,5724 | 42,76 | 12,66 | 0,6313 | 36,87 |
| 4 | 7,196 | 0,6458 | 35,42 | 10,63 | 0,6812 | 31,88 | 14,54 | 0,7251 | 27,49 |
| 5 | 8,200 | 0,7359 | 26,41 | 11,89 | 0,7623 | 23,77 | 15,95 | 0,7951 | 20,49 |
| 6 | 8,949 | 0,8031 | 19,69 | 12,84 | 0,8228 | 17,72 | 16,99 | 0,8472 | 15,28 |
| 7 | 9,507 | 0,8532 | 14,68 | 13,54 | 0,8679 | 13,21 | 17,77 | 0,8861 | 11,39 |
| 8 | 9,923 | 0,8906 | 10,94 | 14,06 | 0,9015 | 9,85 | 18,35 | 0,9151 | 8,49 |
| 9 | 10,23 | 0,9184 | 8,16 | 14,45 | 0,9266 | 7,34 | 18,78 | 0,9367 | 6,33 |
| 10 | 10,46 | 0,9392 | 6,08 | 14,75 | 0,9452 | 5,48 | 19,11 | 0,9528 | 4,72 |
| 11 | 10,64 | 0,9546 | 4,54 | 14,96 | 0,9592 | 4,08 | 19,35 | 0,9648 | 3,52 |
| 12 | 10,77 | 0,9662 | 3,38 | 15,13 | 0,9696 | 3,04 | 19,53 | 0,9738 | 2,62 |
| 13 | 10,86 | 0,9748 | 2,52 | 15,25 | 0,9773 | 2,27 | 19,66 | 0,9804 | 1,96 |
| 14 | 10,93 | 0,9812 | 1,88 | 15,34 | 0,9831 | 1,69 | 19,76 | 0,9854 | 1,46 |
| 15 | 10,99 | 0,9860 | 1,40 | 15,40 | 0,9874 | 1,26 | 19,84 | 0,9891 | 1,09 |

**Tablica 8.** Identyfikacja temperatury brzegu na podstawie WOP dla $\xi^*=0,5$, 0,7, 0,9 i kroku czasowego $\Delta t=1$ s przy dokładności odczytu do dwóch cyfr znaczących

| $t$ [s] | $\xi^*=0,5$ $ST$ [°C] | $\xi^*=0,5$ $AT_b$ [°C] | $\xi^*=0,5$ błąd % | $\xi^*=0,7$ $ST$ [°C] | $\xi^*=0,7$ $AT_b$ [°C] | $\xi^*=0,7$ błąd % | $\xi^*=0,9$ $ST$ [°C] | $\xi^*=0,9$ $AT_b$ [°C] | $\xi^*=0,9$ błąd % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,31 | 0,53 | 47 | 0,54 | 0,87 | 13 | 0,84 | 1,03 | 3 |
| 2 | 0,50 | 0,70 | 30 | 0,68 | 0,94 | 6 | 0,89 | 1,01 | 1 |
| 3 | 0,63 | 0,78 | 22 | 0,76 | 0,95 | 5 | 0,92 | 1,01 | 1 |
| 4 | 0,72 | 0,83 | 17 | 0,82 | 0,96 | 4 | 0,94 | 1,01 | 1 |
| 5 | 0,79 | 0,87 | 13 | 0,87 | 0,98 | 2 | 0,95 | 1,00 | 0 |
| 6 | 0,85 | 0,92 | 8 | 0,90 | 0,98 | 2 | 0,97 | 1,00 | 0 |
| 7 | 0,88 | 0,92 | 8 | 0,93 | 0,99 | 1 | 0,97 | 1,00 | 0 |
| 8 | 0,91 | 0,94 | 6 | 0,94 | 0,98 | 2 | 0,98 | 1,00 | 0 |
| 9 | 0,94 | 0,97 | 3 | 0,96 | 0,99 | 1 | 0,99 | 1,00 | 0 |
| 10 | 0,95 | 0,97 | 3 | 0,97 | 0,99 | 1 | 0,99 | 1,00 | 0 |

**Tablica 9. Identyfikacja temperatury brzegu na podstawie WOP dla $\xi^*=0,5$ i $\xi^*=0,9$ oraz $\Delta t=1$ s przy dokładności odczytu do dwóch cyfr znaczących.**

| | | $\xi^*=0,5$ | | | $\xi^*=0,9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ [s] | $Su$ [cm]$\cdot 10^6$ | $\Delta T_b$[°C] | błąd % | $Su$ [cm]$\cdot 10^6$ | $\Delta t_b$[°C] | błąd % |
| 1 | 1,7 | 0,153 | 84,7 | 6,6 | 0,329 | 67,1 |
| 2 | 4,0 | 0,359 | 64,1 | 10 | 0,499 | 50,1 |
| 3 | 5,9 | 0,529 | 47,1 | 13 | 0,648 | 35,2 |
| 4 | 7,2 | 0,646 | 35,4 | 15 | 0,748 | 25,2 |
| 5 | 8,2 | 0,736 | 26,4 | 16 | 0,798 | 20,2 |
| 6 | 8,9 | 0,799 | 20,1 | 17 | 0,848 | 15,2 |
| 7 | 9,5 | 0,853 | 14,7 | 18 | 0,897 | 10,3 |
| 8 | 9,9 | 0,888 | 11,2 | 18 | 0,897 | 10,3 |
| 9 | 10 | 0,897 | 10,3 | 19 | 0,947 | 5,3 |
| 10 | 10 | 0,897 | 10,3 | 19 | 0,947 | 5,3 |
| 11 | 11 | 0,987 | 1,3 | 19 | 0,947 | 5,3 |
| 12 | 11 | 0,987 | 1,3 | 20 | 0,972 | 2,8 |
| 13 | 11 | 0,987 | 1,3 | 20 | 0,972 | 2,8 |
| 14 | 11 | 0,987 | 1,3 | 20 | 0,972 | 2,8 |
| 15 | 11 | 0,987 | 1,3 | 20 | 0,972 | 2,8 |

wzór (4.9) można zastąpić uproszczonym wzorem (6.2), odbywać się musi osobno dla każdego $\xi^*$. Wynika to z obecności w wykładnikach potęgi $e$ pierwiastków równania (4.8).

Wyniki obliczeń, zawarte w tablicach 7 i 9, oraz powyższe ustalenia wskazują, iż kryteria 1–4 efektywności metody są w przypadku identyfikacji temperatury na podstawie WOP spełnione. Oczywistość spełnienia kryteriów 6–8 nie podlega dyskusji a kryterium 5 jest spełnione przez sam dobór metody.

Wszystkie obliczenia, zarówno dotyczące pełnych postaci wzorów (4.3), (4.9) i (6.1) jak i postaci uproszczonej (6.2), przeprowadzone zostały na kalkulatorze TI-59.

## 7. Wnioski

Przedstawiona w pracy metoda identyfikacji temperatury w płycie nieskończonej daje się bezpośrednio przenieść zarówno na przypadki ciał o innych kształtach (walca, rury grubościennej, kuli, półprzestrzeni itp.), jak i na innego typu jednowymiarowe zagadnienia identyfikacji (zagadnienia odwrotne). Niezależnie od tego czy, wyznaczaną na brzegu (brzegach) wielkością będzie pole temperatury, strumień ciepła, przemieszczenie czy cokolwiek innego, sposób postępowania jest taki sam jak w pracy niniejszej. Sposób ten wyznaczają tytuły czterech pierwszych części pracy, tzn.

1) formalna konstrukcja transformaty Laplace'a rozwiązania zagadnienia odwrotnego;

2) warunki ograniczające dla wewnętrznych odpowiedzi;

3) konstrukcja funkcji opisujących wewnętrzne odpowiedzi oraz

4) konstrukcja przybliżonego rozwiązania zagadnienia identyfikacji (zagadnienia odwrotnego).

Ten schemat można jeszcze uzupełnić dwoma dodatkowymi punktami, mianowicie następującymi:

5) przejście graniczne do rozwiązania ścisłego (mające najczęściej tylko charakter poznawczy) oraz

6) dyskusja „wrażliwości" otrzymanych wyników na odległość punktu od interesującego nas brzegu, wielkość kroku czasowego i dokładność odczytu danych pomiarowych.

Przedstawione w niniejszej pracy przybliżenie WOT i WOP funkcjami schodkowymi charakteryzuje się wprawdzie prostotą, lecz nie jest jedynym przedstawieniem dopuszczalnym. Każda funkcja zbudowana na zbiorze danych dyskretnych i spełniająca ograniczenia podane w części 2 pracy może być przybliżeniem wewnętrznej odpowiedzi. Na przykład należy się spodziewać, że funkcjami dopuszczalnymi mogą być tzw. splajny [18]. Tym niemniej ogromną zaletą funkcji schodkowych jest to, że uzyskane za ich pomocą wzory są łatwe do zaprogramowania na maszynie cyfrowej i dają wyniki obarczone małym błędem.

Nieco zaskakującym wnioskiem, wynikającym z rozważań zawartych w rozdziale 6, jest to, że łatwiej i szybciej można zidentyfikować temperaturę na podstawie WOP niż na podstawie WOT. Ponadto istotne są własności metody identyfikacji temperatury na podstawie WOP, które podane są w końcowej części wstępu, a które dotyczą także (choć w nieco mniejszym stopniu) metody opartej na WOT. Opierając się na wyżej podanych rozważaniach teoretycznych, można by skonstruować przyrząd, który mógłby służyć bądź do identyfikacji wymuszenia termicznego (temperatury brzegu) przy znanych własnościach płyty, bądź do identyfikacji modelu (własności płyty) przy znanym wymuszeniu termicznym, bądź do diagnostyki. Przyrząd taki mógłby działać na zasadzie zbierania informacji z trzech czujników: dwóch mierzących temperaturę i umieszczonych na brzegach płyty i trzeciego mierzącego przemieszczenia i znajdującego się wewnątrz płyty. Ekstrapolacja wyników z dwóch takich czujników i ewentualne porównanie z bezpośrednim odczytem z trzeciego mogłaby właśnie prowadzić do identyfikacji modelu bądź do diagnozowania o stanie badanego obiektu; przy identyfikacji wymuszenia na niedostępnym brzegu oczywiście trzeba zadowolić się tylko wynikiem ekstrapolacji. Naturalnie musiałyby być spełnione wszystkie warunki, na podstawie których otrzymano powyższe wyniki, tzn. cieplna izolacja drugiego brzegu płyty, jego utwierdzenie, brak obciążeń siłowych na brzegu badanym, małe zmiany w czasie lub stałość temperatury tegoż brzegu. Ten ostatni warunek nie jest — wbrew pozorom — zbyt poważnym ograniczeniem, gdyż w wielu przypadkach w technice mamy do czynienia właśnie z takimi warunkami termicznymi. Tak jest np. w zbiornikach, w których przechowuje się paliwa bądź chemikalia, czy nawet w dyszy silnika odrzutowego. Z drugiej strony, na mocy uwag poczynionych na początku tego rozdziału, nic nie stoi na przeszkodzie, aby rozważyć zagadnienie identyfikacji wymuszeń termicznych lub innych przy całkiem odmiennym zestawie warunków brzegowych. Jedyny sztywny wymóg metody, to zerowe (bądź stałe dla całego ciała) warunki początkowe.

W niniejszej pracy skoncentrowano uwagę na tzw. wewnętrznym zagadnieniu odwrotnym. Brzegowe zagadnienie odwrotne, czyli problem wyznaczania np. funkcji $T_b(t)$ na podstawie znajomości zmian w czasie strumienia ciepła lub przemieszczenia dla $\xi=1$ był częściowo przedmiotem rozważań pracy [11]. Jak widać na przykładzie wzoru (4.9), są to zagadnienia różne jakościowo od zagadnień wewnętrznych, aczkolwiek również o poważnym aspekcie praktycznym.

Główną zaletą metody identyfikacji temperatury brzegu, przedstawionej w tej pracy, wydaje się być to, iż dopuszcza ona badania i pomiary nieniszczące. Wynika to z możliwości odtworzenia temperatury brzegu na podstawie znajomości danych dotyczących przemieszczeń. O ile bowiem odczyt WOT wymagał wprowadzenia do ciała termopary, o tyle do odczytu WOP można wykorzystać detektor, wykrywający np. ruch tzw. atomów znaczonych, wprowadzonych w śladowych ilościach do badanego obiektu już w trakcie wytwarzania go. Wymaga to jednak zastosowania bardzo czułych mierników.

Z punktu widzenia metod matematycznych jednowymiarowe zagadnienia odwrotne dla ciał o regularnych kształtach są najprostsze do rozwiązania. Jednakże już na tym etapie widać, jak ważną rolę pełni znajomość ograniczeń, jakim muszą podlegać wewnętrzne odpowiedzi. Przy zagadnieniach dwu- i trójwymiarowych problem skonstruowania funkcji dopuszczalnych staje się jeszcze bardziej skomplikowany. W analizie tego typu problemów w teorii przewodnictwa ciepła ma swój poważny udział M. IMBER [8]. Jednakże systematyczna analiza wielowymiarowych zagadnień odwrotnych w teorii naprężeń cieplnych lub termosprężystości jeszcze nie była publikowana, zagadnienia zaś jednowymiarowe rozważane były, jak się wydaje, tylko w pracach [11 i 12].

## 8. Zakończenie

Rozwiązane w pracy zagadnienie identyfikacji temperatury opiera się na znajomości WOT lub WOP w jednym punkcie wewnętrznym (a właściwie na jednej powierzchni wewnętrznej $\xi^*$) oraz na jednym z brzegów płyty. Tego typu zagadnienia identyfikacji nazywa się czasami jednopunktowymi zagadnieniami odwrotnymi. Możliwe jest również rozwiązanie zagadnienia dwupunktowego, tzn. gdy znamy WOT lub(1) WOP w dwóch punktach wewnętrznych. Tego typu zagadnienia rozważali m.in. M. IMBER i J. KHAN [9], lecz ich rozważania dotyczyły tylko przewodnictwa cieplnego. W teorii naprężeń cieplnych badania tego typu nie były jeszcze, według rozeznania autora, prowadzone. Wydaje się, że dalsza analiza tego typu zagadnień, tak jedno- jak i dwupunktowych, może doprowadzić do rozwoju nowych metod badań nieniszczących.

W zakończeniu autor składa serdeczne podziękowania Prof. dr hab. Czesławowi CEMPLOWI z Instytutu Mechaniki Technicznej Politechniki Poznańskiej za życzliwe i konstruktywne uwagi dotyczące pierwotnej wersji pracy, co się przyczyniło do jej udoskonalenia.

---

(1) Wyraz „lub" dopuszcza również „oraz"

1. E. M. SPARROW, A. HAJI-SHEIKH, T. S. LUNDGREN, *The inverse problem in transient heat conduction*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **86**, 369–375, 1964.
2. G. STOLZ, Jr., *Numerical solution to an inverse problem of heat conduction for simple shapes*, Trans. ASME, s. C: J. Heat Transfer, **82**, 20–26, 1960.
3. L. I. DEVERALL. R. S. CHANNAPRAGADA, *A new integral equation for heat flux in inverse heat, conduction*, Trans. ASME, s. C: J. Heat Transfer, **88**, 327–328, 1966.
4. K. C. SABHERWAL, *An inverse problem of transient heat conduction*, Indian J. Pure and Appl. Phys., **3**, 397–398, 1965.
5. J. V. BECK, *Criteria for comparison of methods of solution of the inverse heat conduction problem*, Nucl. Engng. Design. **53**, 11–22, 1979.
6. K. GRYSA, M. J. CIAŁKOWSKI, *Zagadnienia odwrotne pól temperatur — przegląd literatury*, Mech. Teoret. Stos., **18**, 4, 535–554, 1980.
7. A. JANKOWSKI, J. SĘCZYK, A. WOŹNIAK, *Badania rozkładu temperatur w tłokach silnika spalinowego posiadających wady nieciągłości na połączeniu wkładki podpierścieniowej z materiałem tłoka*, Mat. Konf. KONES 79, nt. „Elementy specjalistyczne tłokowych silników spalinowych o podwyższonych parametrach techniczno-eksploatacyjnych", s. 183–190, Zielona Góra 1979.
8. M. IMBER, *Temperature extrapolation mechanism for two-dimensional heat flow*, AIAA Journal, 8, **12**, 1089–1093, 1974.
9. M. IMBER, J. KHAN, *Prediction of transient temperature distributions with embedded thermocouples*, AIAA Journal, 6, **10**, 784–789, 1972.
10. M. IMBER, *A temperature extrapolation method for hollow cylinders*, AIAA Journal, 1, **11**, 117–118, 1973.
11. M. J. CIAŁKOWSKI, K. GRYSA, *On a certain inverse problem of temperature and thermal stress fields*, Acta Mechanica, **36**, 169–185, 1980.
12. M. J. CIAŁKOWSKI, *Metoda wyznaczania pól temperatury w elementach maszyn cieplnych w dowolnych warunkach nagrzewania*, Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań, 1978.
13. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
14. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
15. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1972.
16. P. I. ROMANOWSKI, *Szeregi Fouriera, teoria pola, funkcje analityczne i specjalne, przekształcenie Laplace'a*, PWN, Warszawa 1963.
17. I. K. KIKOIN, *Tablicy fizičeskich veličin — spravočnik*, Atomizdat, Moskwa 1976.
18. R. S. VARGA, *Fundational analysis and approximation theory in numerical analysis*, Soc. for. Ind. and Appl. Math., Philadelphia 1971, tłum. ros., Izd. Mir, Moskwa 1974.

Резюме

## ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В БЕЗКОНЕЧНОЙ ПЛИТЕ

В отличие от исследований описанных в литературе, которые касаются обратных задач теплопроводности, настоящая работа представляет приближенное аналитическое решение обратной задачи поля температуры в теории термических напряжений, именно задача идентификации распределения температуры. Теоретические рассуждения проводятся следующим путем: 1) на основе решения прямой задачи (начально-граничной) определяется формальное решение обратной задачи, 2) устанавливаются условия для допустимых функций для описания внутренних температурных и в перемещениях откликов, 3) строятся функции, описывающие внутренние отклики, 4) определяется и обсуждается приближенное задачи. Для определения приближенного решения (как тоже точного) используется техника преобразования Лапласа. Вид решения очень пригоден для численных расчетов. Представлены численные примеры иллюстрирующие точность полученных результатов.

SUMMARY

## ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF TEMPERATURE IDENTIFICATION IN AN INFINITE PLATE

Contrary to the investigation reported in the literature which are restricted to the inverse problems of heat conduction, the present paper contains an approximate solution to an inverse problem of temperature field in the thermal stresses theory, namely to the problems of temperature identification, especially at the boundary. The theoretical considerations are carried out in the following way: 1) solution of a direct initial-boundary problem of thermal stresses theory is used to obtain a formal solution of the inverse problem, 2) the conditions for the admissible internal temperature and displacement responses are settled, 3) the functions describing the internal responses are constructed, and 4) an approximate solution of the problem considered is found and disscussed. It is shown that a step function is admissible for describing an internal response. In order to get the approximate solution (and also the exact one), the Laplace transform techniques is used. The form of solution is convenient for numerical evaluation. Several numerical examples ilustrate the accuracy of the theoretical results.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1980 r.*