

OSIOWO-SYMETRYCZNE ZAGADNIENIE BOUSSINESQA DLA OGRZANEGO STEMPLA NA MIKROPOLARNEJ PÓŁPRZESTRZENI

STANISŁAW MATYSIAK i ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

W pracy podajemy sposób obliczania naprężeń kontaktowych w przypadku podgrzanego lub oziębionego stempla osiowo-symetrycznego, pozbawionego możliwości przemieszczania się — przy dowolnym rozkładzie temperatury. Pokazaliśmy również, że rozwiązanie zagadnienia stempla swobodnego i nieważkiego z ogrzaną powierzchnią kontaktu można sprowadzić do superpozycji stempla utwierdzonego i przypadku izotermicznego.

1. WSTĘP

W klasycznej termosprężystości znany jest związek między temperaturą na powierzchni kontaktu z nagrzanym stemplem, a naprężeniami kontaktowymi [6, 7 i 9]. Okazuje się np. w przypadku półprzestrzeni sprężystej, że jeżeli jedynym źródłem ciepła jest stempel, a pozostała część powierzchni ograniczającej półprzestrzeń jest wolna od naprężeń i jest utrzymywana w temperaturze stanu naturalnego, to rozkład naprężeń normalnych pod stemplem kopiuje rozkład temperatury i to niezależnie od kształtu obszaru kontaktu. Wynik ten można traktować jako rozwiązanie zagadnienia pomocniczego, które następnie wykorzystujemy do uzyskania rozwiązania przypadku wciskania nagrzanego stempla.

Uogólnienia na przypadek sprężystego ośrodka mikropolarnego na ogół nie są trywialne. Wystarczy porównać rozkład naprężeń w półprzestrzeni wywołany działaniem temperatury na swobodnej od naprężeń płaszczyźnie ograniczającej. W klasycznej przestrzeni sprężystej naprężenia normalne do płaszczyzny ograniczającej znikają tożsamościowo [4], w przypadku ośrodka mikropolarnego natomiast naprężenia takie istnieją [2].

Celem niniejszej pracy jest zbadanie analogicznego efektu w przypadku sprężystego ośrodka mikropolarnego oraz podanie związków między naprężeniami kontaktowymi i rozkładem temperatury na powierzchni kontaktu. Rozpatrzymy przypadek osiowosymetryczny, gdy obszarem jest koło lub pierścień. Nic nie stoi na przeszkodzie uogólnieniu zagadnienia na przypadek, gdy obszar kontaktu składa się z koła lub pierścienia i pewnej, skończonej liczby n pierścieni współśrodkowych. Uogólnienie polega jedynie na zmianie granic w odpowiednich całkach. Jak wynika z wyprowadzenia w tym konkretnym przypadku, trudności rozwiązania zagadnienia nie wzrastają wraz z liczbą przedziałów. Oczywiście dotyczy to obliczenia jedynie naprężeń kontaktowych pochodzących od temperatury na powierzchni,

a nie od nacisku stempla. Znajomość naprężeń kontaktowych pozwala zredukować mieszane zagadnienie brzegowe termosprężystości do «pierwszego» zagadnienia brzegowego, tzn. do przypadku, gdy dane są naprężenia normalne i styczne na całym brzegu. W podanym przykładzie wykorzystujemy wyprowadzone wzory do obliczenia naprężeń kontaktowych dla ogrzanego stempla kołowego przytwierdzonego do brzegu bez dodatkowej siły osiowej.

2. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Równania równowagi sprężystego ośrodka mikropolarnego oraz równania przewodnictwa ciepłego przyjmują postać następującą:

$$(2.1) \quad (\mu + \alpha) \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \text{grad div } \mathbf{u} + 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\varphi} = \nu \text{grad } T,$$

$$(2.2) \quad (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \text{grad div } \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} = 0,$$

$$(2.3) \quad \nabla^2 T = 0,$$

gdzie $\mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ są stałymi sprężystości, α_t jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności cieplnej, $\nu = (2\mu + 3\lambda) \alpha_t$.

Po wprowadzeniu operatorów różniczkowych

$$B_n(f) \equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) f$$

otrzymamy w przypadku osiowej symetrii następujący układ równań różniczkowych cząstkowych w układzie współrzędnych walcowych r, θ, z , gdzie wektor przemieszczenia oraz wektor obrotu są dane przez składowe $\mathbf{u} = (u_r, 0, u_z)$, $\boldsymbol{\varphi} = (0, \varphi_\theta, 0)$:

$$(2.4) \quad (\mu + \alpha) (B_1 + D^2) u_r + (\lambda + \mu - \alpha) B_1 u_r + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{\partial}{\partial r} D u_z - 2\alpha D \varphi_\theta = \nu \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$(2.5) \quad (\mu + \alpha) (B_0 + D^2) u_z + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{1}{r} D \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + (\lambda + \mu - \alpha) D^2 u_z + \frac{2\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varphi_\theta) = \nu D T,$$

$$(2.6) \quad (\gamma + \varepsilon) (B_1 + D^2) \varphi_\theta - 4\alpha \varphi_\theta + 2\alpha \left(D u_r - \frac{\partial}{\partial r} u_z \right) = 0,$$

$$(2.7) \quad (B_0 + D^2) T = 0, \quad \text{gdzie} \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial z}.$$

Założmy, że spełnione są warunki wypromieniowania Sommerfelda, które w naszym przypadku przyjmują postać

$$(2.8) \quad \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, T \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad \sqrt{z^2 + r^2} \rightarrow \infty$$

oraz uwzględnijmy następujące warunki brzegowe dla $z=0, r \in \langle 0, \infty \rangle$:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{zr}(r, 0) &= 0, & \sigma_{zz}(r, 0) &= -p(r), \\ \mu_{z0}(r, 0) &= -m(r), & T(r, 0) &= \Phi(r). \end{aligned}$$

Zakładamy ponadto, że

$$(2.10) \quad \int_0^{\infty} \sqrt{r} [p(r), m(r), \Phi(r)] dr < \infty.$$

Przy tak postawionych warunkach brzegowych rozwiązanie układu równań różniczkowych cząstkowych (2.4)–(2.7) ma postać [2], co zresztą można sprawdzić przez podstawienie do równań wyjściowych, następująca:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} u_r(r, z) &= \frac{1}{2\mu} \mathcal{H}_1 \left\{ \frac{\bar{p}(\xi)}{\Delta_0} \left[\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{\xi} + z \right) e^{-\xi z} + \right. \right. \\ &+ 2a_0 \frac{\xi^2}{\rho} \left(\frac{\rho}{\xi} e^{-\rho z} - e^{-\xi z} \right) \left. \right] - \frac{1}{2a_0} \frac{\hat{m}(\xi)}{\xi \Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{\xi} + z \right) e^{-\xi z} + \right. \\ &+ 2a_0 \frac{\xi^2}{\rho} \left(\frac{\rho}{\xi} e^{-\rho z} - e^{-\xi z} \right) \left. \right]; \quad \xi \rightarrow r \Big\} + \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+2\mu)} \alpha_t \times \\ &\times \mathcal{H}_1 \left\{ \frac{\bar{\Phi}(\xi)}{\Delta_0} \left[\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{\xi} + (\Delta_0-1)z \right) e^{-\xi z} + 2a_0 \xi (e^{-\xi z} - e^{\rho z}) \right]; \quad \xi \rightarrow r \right\}, \end{aligned}$$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} u_z(r, z) &= \frac{1}{2\mu} \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{\bar{p}(\xi)}{\Delta_0} \left[\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu} \frac{1}{\xi} + z \right) e^{-\xi z} + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} (e^{-\rho z} - e^{-\xi z}) \right] - \right. \\ &- \frac{1}{2a_0} \frac{\hat{m}(\xi)}{\xi \Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu} \frac{1}{\xi} + z \right) e^{-\xi z} + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} (e^{-\rho z} - e^{-\xi z}) \right]; \quad \xi \rightarrow r \right\} - \frac{(3\lambda+2\mu) \alpha_t}{2(\lambda+2\mu)} \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{\bar{\Phi}(\xi)}{\Delta_0} \times \right. \\ &\times \left[\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{\xi} + (1-\Delta_0)z \right) e^{-\xi z} + 2a_0 \frac{\xi^2}{\rho} (e^{-\rho z} - e^{-\xi z}) \right]; \quad \xi \rightarrow r \right\}, \end{aligned}$$

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \varphi_0(r, z) &= \frac{1}{2\mu} \frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu} \mathcal{H}_1 \left\{ \frac{\bar{p}(\xi)}{\Delta_0} \left(e^{-\xi z} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho z} \right) - \right. \\ &- \frac{1}{2a_0} \frac{\hat{m}(\xi)}{\xi \Delta_0} \left[(1-\Delta_0) e^{-\xi z} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho z} \right]; \quad \xi \rightarrow r \Big\} - \\ &- \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)} \alpha_t \mathcal{H}_1 \left\{ \frac{\bar{\Phi}(\xi)}{\Delta_0} \left(e^{-\xi z} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho z} \right); \quad \xi \rightarrow r \right\}, \end{aligned}$$

$$(2.14) \quad T(r, z) = \mathcal{H}_0 \left\{ \bar{\Phi}(\xi) e^{-\xi z}; \quad \xi \rightarrow r \right\},$$

gdzie

$$(2.15) \quad \begin{aligned} (\bar{p}(\xi); \bar{\Phi}(\xi)) &= \mathcal{H}_0 \{ (p(r); \Phi(r)); r \rightarrow \xi \}, \\ \hat{m}(\xi) &= \mathcal{H}_1 \{ m(r); r \rightarrow \xi \}. \end{aligned}$$

We wzorach tych symbole $\mathcal{H}_0 \{ \}$ i $\mathcal{H}_1 \{ \}$ oznaczają odpowiednio transformatę Hankela zerowego i pierwszego rzędu. Pozostałe oznaczenia są następujące:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{l^2}}, \quad l^2 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}{4\alpha\mu}, \\ \Delta_0 \equiv \Delta_0(\xi) &= 1 + 2a_0 \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\rho} \right), \quad a_0 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}. \end{aligned}$$

3. NAPRĘŻENIA KONTAKTOWE NA SKUTEK OGRZANIA STEMPŁA

Rozpatrzmy zagadnienie następujące: na płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń mikropolarną spoczywa bez dodatkowego nacisku stempel o płaskim dnie i kołowym lub pierścieniowym przekroju poprzecznym. Oznaczmy obszar kontaktu przez Ω :

$$(3.1) \quad \Omega = \{ (r, \theta, z); r \in \langle 0, a \rangle \text{ lub } r \in (b, a), b < a, \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle, z = 0 \},$$

pnadto

$$\Omega^* = \{ r \in \langle 0, a \rangle \text{ lub } r \in (b, a), b < a \}.$$

Weźmy pod uwagę następujące warunki brzegowe dla $z=0$:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{zr}(r, 0) = \mu_{z\theta}(r, 0) &= 0, \quad r \in R_+, \\ u_z(r, 0) &= 0, \quad r \in \Omega^*, \\ \sigma_{zz}(r, 0) &= 0, \quad r \in R_+ - \Omega^*, \\ T(r, 0) &= \begin{cases} g(r), & \text{jeżeli } r \in \Omega^*, \\ 0, & \text{jeżeli } r \in R_+ - \Omega^*, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $g(r)$ jest daną, bezwzględnie całkowalną funkcją dla $r \in \Omega^*$.

Rozwiążemy więc następujące mieszane zagadnienie brzegowe, dla półprzestrzeni $z \geq 0$, opisane przez równania termosprężystości (2.4)–(2.6), równanie przewodnictwa ciepłego (2.7) z warunkami regularności w nieskończoności (2.8) oraz dla $z=0$ przez warunki brzegowe (3.2). Warunki brzegowe będą spełnione dla $\hat{m}(\xi) \equiv 0$. Z (3.2)₄ oraz (2.14) dostaniemy

$$(3.3) \quad \bar{\Phi}(\xi) = \int_{\Omega} r g(r) J_0(\xi r) d\xi.$$

Z warunków brzegowych (3.2)₂ i (3.2)₃ oraz ze wzoru (2.12) i wzoru na naprężenia

$$(3.4) \quad \sigma_{zz}(r, z) = -\mathcal{H}_0 \left\{ \frac{\bar{p}(\xi)}{\Delta_0} \left[(1 + \xi z) e^{-\xi z} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho z} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi z} \right) \right]; \xi \rightarrow r \right\} - \\ - \frac{(3\lambda + 2\mu) \mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_t \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{\bar{\Phi}(\xi)}{\Delta_0} \left[(\Delta_0 - 1)(1 + \xi z) e^{-\xi z} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho z} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi z} \right) \right] \right\}; \xi \rightarrow r \}$$

otrzymamy równania całkowe na niewiadomą funkcję $\bar{p}(\xi)$ w postaci

$$(3.5) \quad \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{\bar{p}(\xi)}{\xi \Delta_0}; \xi \rightarrow r \right\} = \frac{(3\lambda + 2\mu) \mu \alpha_t}{\lambda + 2\mu} \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{\bar{\Phi}(\xi)}{\xi \Delta_0}; \xi \rightarrow r \right\}, \quad r \in \Omega^*, \\ \mathcal{H}_0 \{ \bar{p}(\xi); \xi \rightarrow r \} = 0, \quad r \in R_+ - \Omega^*.$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$(3.6) \quad A(\xi) = \frac{1}{\Delta_0} \left[\bar{p}(\xi) - \frac{(3\lambda + 2\mu) \mu \alpha_t}{\lambda + 2\mu} \bar{\Phi}(\xi) \right],$$

możemy równania całkowe (3.5) napisać w postaci następującej:

$$(3.7) \quad \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{1}{\xi} A(\xi); \xi \rightarrow r \right\} = 0, \quad r \in \Omega^*, \\ \mathcal{H}_0 \{ \Delta_0 A(\xi); \xi \rightarrow r \} = \frac{(3\lambda + 2\mu) \mu \alpha_t}{\lambda + 2\mu} \mathcal{H}_0 \{ \bar{\Phi}(\xi); \xi \rightarrow r \}, \quad r \in R_+ - \Omega^*.$$

Wykorzystując następnie (3.2) oraz (2.14) otrzymamy

$$(3.8) \quad T(r, 0) = \mathcal{H}_0 \{ \bar{\Phi}(\xi); \xi \rightarrow r \} = 0, \quad r \in R_+ - \Omega^*.$$

W ten sposób równania całkowe (3.7) można zredukować do postaci

$$(3.9) \quad \mathcal{H}_0 \{ \Delta_0 A(\xi); \xi \rightarrow r \} = 0, \quad r \in R_+ - \Omega^*, \\ \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{1}{\xi} A(\xi); \xi \rightarrow r \right\} = 0, \quad r \in \Omega^*.$$

Oczywistym rozwiązaniem powyższych równań jest funkcja

$$(3.10) \quad A(\xi) \equiv 0,$$

skąd, po podstawieniu do (3.6) otrzymamy wzór

$$(3.11) \quad \bar{p}(\xi) = \frac{(3\lambda + 2\mu) \mu \alpha_t}{\lambda + 2\mu} \bar{\Phi}(\xi)$$

czyli

$$(3.12) \quad \sigma_{zz}(r, 0) = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_t T(r, 0).$$

4. WNIOSKI

Po podstawieniu do wzorów na składowe wektora przemieszczenia i obrotu oraz temperaturę otrzymamy

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_z(r, z) &= \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_t}{2(\lambda+2\mu)} \mathcal{H}_0 \left\{ \bar{\Phi}(\xi) z e^{-\xi z}; \quad \xi \rightarrow r \right\}, \\ u_r(r, z) &= \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_t}{2(\lambda+2\mu)} \mathcal{H}_1 \left\{ \bar{\Phi}(\xi) \left(\frac{1}{\xi} + z \right) e^{-\xi z}; \quad \xi \rightarrow r \right\}, \\ \varphi_\theta(r, z) &\equiv 0, \quad T(r, z) = \mathcal{H}_0 \left\{ \bar{\Phi}(\xi) r^{-\xi z}; \quad \xi \rightarrow r \right\}. \end{aligned}$$

Składowe tensora naprężeń momentowych znikają tożsamościowo; składowe tensora naprężeń siłowych natomiast są określone następującymi wzorami:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{zz}(r, z) &= -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \mu \alpha_t \mathcal{H}_0 \left\{ \bar{\Phi}(\xi) (1+\xi z) e^{-\xi z}; \quad \xi \rightarrow r \right\}, \\ \sigma_{zr}(r, z) &= -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \mu \alpha_t \mathcal{H}_1 \left\{ \xi z \bar{\Phi}(\xi) e^{-\xi z}; \quad \xi \rightarrow r \right\}, \\ \sigma_{rz}(r, z) &= \sigma_{zr}(r, z), \\ \sigma_{rr}(r, z) &= -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \mu \alpha_t \mathcal{H}_0 \left\{ \bar{\Phi}(\xi) (1-\xi z) e^{-\xi z}; \quad \xi \rightarrow r \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta}(r, z) &= -\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)\alpha_t}{\lambda+2\mu} \mathcal{H}_0 \left\{ \bar{\Phi}(\xi) e^{-\xi z}; \quad \xi \rightarrow r \right\}. \end{aligned}$$

Z powyższego rozwiązania możemy wyciągnąć następujące wnioski:

1. Stan naprężeń i odkształceń w całej półprzestrzeni nie zależy od stałych materiałowych α , γ i ε .

2. W całym obszarze spełniony jest warunek

$$\varphi = 1/2 \operatorname{rot} u.$$

3. Postać wzorów na wektor przemieszczenia i tensor naprężeń siłowych nie różni się od postaci analogicznych wzorów w przypadku kontaktowego zagadnienia ograniczonego stempla dla ośrodka Hooke'a.

4. Normalna składowa przemieszczenia znika na całej płaszczyźnie ograniczającej, naprężenia normalne do płaszczyzny są proporcjonalne do temperatury. Naprężenia średnie oraz składowa obwodowa naprężeń siłowych są proporcjonalne do rozkładu temperatury w całym obszarze półprzestrzeni:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u_z(r, 0) &= 0, \quad \text{dla } r \in R_+, \\ \sigma_{\theta\theta}(r, 0) &= -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \alpha_t T(r, 0) \quad \text{dla } r \in R_+, \\ \sigma_{zz}(r, 0) &= -\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \alpha_t T(r, 0) \quad \text{dla } z \geq 0, r \geq 0. \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad \frac{1}{3} [\sigma_{zz}(r, z) + \sigma_{rr}(r, z) + \sigma_{\theta\theta}(r, z)] = \\ = -\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \alpha_t T(r, z) \quad \text{dla } r \geq 0, z \geq 0,$$

Jeżeli obszar kontaktu składa się z pierścieni koncentrycznych lub pierścieni i koła wewnętrznego, to zamiast (3.1) przyjmujemy $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ oraz $\Omega^* = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i^*$, gdzie

$$(4.4) \quad \Omega_i = \{(r, \theta, z), \quad r \in \langle 0, a_i \rangle, \quad \text{lub } r \in (b_i, a_i), \quad \text{lub } r \in (b_i, a_i), i > \\ > 1, \quad \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad z = 0, \quad b_k, a_k \in R_+, \quad b_k < \\ < a_k < b_{k+1} < a_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1\}$$

oraz

$$(4.5) \quad \Omega_i^* = \{r \in \langle 0, a_i \rangle, \quad i = 1 \quad \text{lub } r \in (b_i, a_i), \quad i \geq 1\}.$$

Wyprowadzenie i wyniki nie ulegają zmianie z wyjątkiem nowych granic całkowania w odpowiednich całkach i nowego znaczenia obszarów Ω i Ω^* . Dotyczy to jednak naprężeń kontaktowych pochodzących od temperatury, a nie od nacisku stempła.

Osiową siłę wypadkową działającą na stempel obliczymy ze wzoru

$$(4.6) \quad P = -\frac{(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \mu \alpha_t \int_{\Omega^*} T(r, 0) r dr.$$

5. PRZYKŁAD

Weźmy pod uwagę stempel o przekroju kołowym, średnicy $2a$ i płaskim dnem. Zakładamy, że powierzchnia kontaktu jest ogrzana do pewnej temperatury T_1 , pozostała część brzegu $\{z=0, r>a\}$ utrzymywana jest w temperaturze stanu naturalnego. Jeżeli stempel został pozbawiony możliwości przemieszczenia się, to zgodnie z wyprowadzonymi wzorami otrzymamy (por. (4.3)₂) następujące naprężenia kontaktowe:

$$(5.1) \quad \sigma_{zz}^1(r, 0) = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \mu \alpha_t T_1$$

oraz ich wypadkową

$$(5.2) \quad P_1 = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \mu \alpha_t \pi a^2 T_1.$$

Jeżeli stempel jest swobodny i nieważki, to należy przyłożyć siłę przeciwnie skierowaną i równą $-P_1$. Oznacza to, że należy dodać rozwiązanie zagadnienia stempła w stanie izotermicznym, wciskanego w półprzestrzeń mikropolarną na pewną głębokość taką, aby działała na niego siła osiowa P_1 . Zagadnienie dla przy-

padku izotermicznego zostało rozważone przez R. S. DHALIWAŁA [1]. Naprężenia kontaktowe można obliczyć z następującej całki:

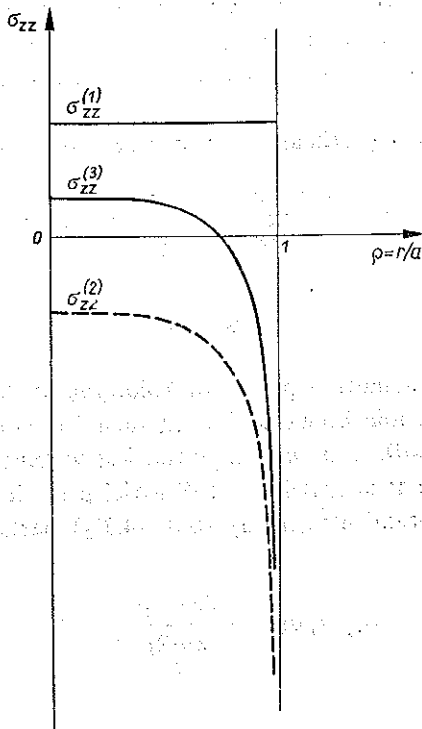
$$(5.3) \quad \sigma_{zz}^{(2)}(r, 0) = -\frac{4\mu}{\pi} \frac{H(1-r)}{r} \frac{d}{dr} \int_0^1 (t^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} t \psi(t) dt,$$

gdzie $\psi(t)$ jest rozwiązaniem pewnego równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju, otrzymanym na drodze numerycznej. Łatwo można również wyprowadzić wzór

$$(5.4) \quad P = -8\mu \int_0^1 \psi(t) dt.$$

Porównując ten wzór z (5,2), otrzymamy

$$(5.5) \quad 8 \int_0^1 \psi(t) dt = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \pi a^2 \alpha_1 T_1.$$



Rys. 1.

Na rysunku 1 linią ciągłą przedstawiliśmy naprężenia kontaktowe dla stępła swobodnego, nieważkiego, podgrzanego do temperatury T_1 . Prosta pozioma oznacza naprężenia kontaktowe wyłącznie od przyrostu temperatury dla stępła pozbawionego możliwości przemieszczenia. $\sigma_{zz}^{(2)}$ natomiast jest rozwiązaniem odpowied-

niego zagadnienia izotermicznego, które dla małych α (por. [1], str. 651–2) redukuje się, z dokładnością do stałych, do klasycznego. Zakładamy, że rozwiązanie to jest znane. Rozwiązanie dla stempla swobodnego jest oczywiście superpozycją obu rozwiązań i przyjmuje postać następującą:

$$(5.6) \quad \sigma_{zz}^{(3)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_t T_1 \left[\frac{\pi a^2}{2r} H(1-r) \left\{ \int_0^1 \psi dt \right\}^{-1} \times \right. \\ \left. \times \frac{d}{dr} \int_r^1 (t^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} t \psi(t) dt - 1 \right].$$

Z kolei można podać warunek, jaki musi być spełniony, aby nie mogły powstać rozciągające naprężenia kontaktowe. Wynika on z (4.6):

$$(5.7) \quad \frac{P}{T_1} > \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_t \pi a^2.$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. S. DHALIWAL, *The axisymmetric Boussinesq problem in the micropolar theory of elasticity* Arch. Mech., 24, 4, 645–653, 1972.
2. W. FRYDRYCHOWICZ, S. MATYSIAK, Z. OLESIAK, *Mieszane zagadnienia termosprężystości dla ośrodka mikropolarnego*, Prace IPPT PAN, 76/1977.
3. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Addison-Wesley, Pergamon Press, PWN 1962.
4. W. NOWACKI, *Two steady-state thermoelastic problems*, Arch. Mech., 9, 579–592, 1957.
5. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, 1971.
6. Z. OLESIAK, J. ŚLIŻEWICZ, *Stresses and strains in a semi-space heated on a constrained part of the bounding plane*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. techn. 433–437, 1965.
7. Z. OLESIAK, *Some remarks on the contact problem of thermo-elasticity for a semi-space*, Bull. Polon. Acad. Sci., Série Sci. techn., 13, 439–444, 1965.
8. Z. OLESIAK, *O pewnych własnościach naprężeń cieplnych*, Mech. Teoret. Stos., 5, 181–191, 1967.
9. Z. OLESIAK, *Contribution to heated punch problem*, Trends in elasticity and thermoelasticity, Wolters-Noordhoff Publ., 175–187, 1971.
10. I. N. SNEDDON, *The use of integral transforms*, McGraw-Hill, 1972.

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА БУССИНЕСКА ДЛЯ НАГРЕТОГО ШТAMПА НА МИКРОПОЛЯРНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В работе приводим способ расчета контактных напряжений в случае нагретого или охлажденного осесимметричного штампа, без возможности перемещения, при произвольном распределении температуры. Показываем тоже, что решение задачи свободного невесомого штампа, с нагретой поверхностью контакта, можно свести к суперпозиции закрепленного штампа и к изотермическому случаю,

SUMMARY

AXI-SYMMETRIC BOUSSINESQ PROBLEM FOR A HEATED PUNCH ON A MICROPOLAR HALFSPACE

The paper presents the method of calculation of contact stresses in the case of a heated (or cooled) axi-symmetric punch at arbitrary temperature distribution, the punch being prevented from displacements. It is shown that the solution of a free and weightless punch with a heated contact surface may be represented as a superposition of the solutions concerning a clamped punch and an isothermal case.

UNIwersytet Warszawski
Instytut Mechaniki

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 sierpnia 1977 r.