

NIEUSTALONE PEŁZANIE PRĘTA ŚCISKANEGO MIMOŚRODOWO SIŁĄ DOWOLNIE ZMIENNĄ W CZASIE (*)

MAREK RYSZ I MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

Celem niniejszej pracy jest analiza pełzania pręta ściskanego mimośrodowo znaną zmienną w czasie siłą; pełzanie opisano prawem Rabotnowa. Wyprowadzone równania podstawowe opisujące proces scałkowano numerycznie, uprzednio doliczając wszystkie niezbędne wielkości w otoczeniu punktu początkowego $t=0$; posłużono się tu rozwinięciami prawa pełzania w uogólnione szeregi potęgowe. Wyniki obliczeń pozwalają śledzić zmiany ugięcia, naprężeń i odkształceń zarówno w czasie jak i na długości pręta. Zdefiniowany w pracy czas krytyczny, zbliżony do czasu Kempnera-Hoffa, w przypadku małych mimośrodków porównano z czasem krytycznym Rabotnowa-Szestierikowa dla pręta prostego, stwierdzając na ogół znaczne różnice.

1. WSTĘP

Pełzanie nieustalone charakteryzuje się z reguły malejącą w czasie prędkością pełzania. Jednakże przy nałożeniu się efektów geometrycznych na efekty fizyczne zjawisko może mieć przebieg całkowicie odmienny, a prędkość pełzania może nawet (według niektórych teorii) rosnać nieograniczenie. Sytuacja taka może zachodzić np. przy ściskaniu mimośrodkowym lub ściskaniu prętów o krzywiznie pierwotnej; dla tego typu przypadków FRAEIJIS de VEUBEKE [2] zaproponował definicję czasu krytycznego związaną z nieograniczonym wzrostem prędkości pełzania. Zdefiniowany w ten sposób czas krytyczny z reguły pokrywa się z czasem Kempnera-Hoffa, związanym z nieograniczonym wzrostem ugięć (jednakże przy jednoczesnym wykorzystaniu teorii ugięć nieskończenie małych).

Pierwsza praca na temat pełzania pręta mimośrodkowo ściskanego została opublikowana w roku 1947 przez J. MARINA [7]; zaproponował on pewną procedurę numeryczną dla fizycznie nieliniowego pełzania ustalonego, ograniczając się do siły stałej w czasie. A. R. RZANICYN [8] podał rozwiązania analityczne dla siły zmiennej w czasie, ale przy ograniczeniu się do liniowego prawa pełzania. Dalsze pokrewne prace należą do A. ISAKSSONA [3] i N. G. TORSZENOWA [9]. Problem kruchości pęknięcia przy mimośrodkowym ściskaniu w warunkach pełzania analizuje praca M. ŻYCZKOWSKIEGO i A. ZABORSKIEGO [11].

W niniejszej pracy zajmiemy się badaniem nieustalonego pełzania pręta ściskanego siłą zmienną w czasie, działającą na ustalonym mimośrodku. Praca stanowi pewien odpowiednik i uogólnienie rozważań H. BARGMANNA [1] i W. E. JAHSMANA [6].

* Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12.

Bargmann analizował obciążenie zmienne w czasie, lecz przy pełzaniu ustalonym typu Nortona. Z drugiej strony Jahsman badał pełzanie fizycznie nieustalone, ograniczając się przy tym do siły stałej w czasie, a dla uproszczenia rozważań zastąpił rzeczywisty pręt przez model Rydera-Shanleya. Obie wspomniane prace [1 i 6] odnoszą się jednak do ściskania osiowego prętów o niewielkiej krzywiźnie pierwotnej, podczas gdy nasza praca analizuje ściskanie mimośrodowe; będziemy przy tym badać pręt rzeczywisty, nie zastępując go modelem o skończonej liczbie stopni swobody.

Celem pracy — oprócz wspomnianego uogólnienia rozważań Bargmanna i Jahsmana przez wyprowadzenie równań podstawowych dla pręta i podanie odpowiedniej metody całkowania numerycznego — jest uzyskanie porównań czasu krytycznego Rabortnowa-Szestierikowa z czasem pracy pręta o definicji zbliżonej do definicji Kempnera-Hoffa. Jakkolwiek już prace W. E. JAHSMANA i F. A. FIELDA z r. 1958 [4 i 5] stwierdziły, że czas krytyczny Rabortnowa-Szestierikowa (uznany przez tych autorów za najbardziej uzasadniony teoretycznie) jest znacznie mniejszy od określonego doświadczalnie czasu pracy pręta do zniszczenia, to jednak porównania teoretyczne zostały utrudnione o tyle, że czas Kempnera-Hoffa obliczono z reguły dla pełzania ustalonego typu Nortona, podczas gdy czas krytyczny Rabortnowa-Szestierikowa dla pełzania nieustalonego (wzmocnienia odkształceniowego). Dla wzmocnienia odkształceniowego obliczenie czasu Kempnera-Hoffa natrafia na zasadnicze trudności, odnośne prawa fizyczne bowiem opisują z reguły zachowanie się materiału jedynie przy odkształceniach jednego znaku (ściskających), a zmierzanie ugięć do nieskończoności, postulowane przez Kempnera i Hoffa, musi być poprzedzone zmianą znaku odkształcenia; dlatego też przyjmiemy nieco zmodyfikowaną definicję czasu pracy pręta (który można by nazwać czasem krytycznym drugiego rodzaju). W pracy tej porównamy oba czasy krytyczne dla tego samego prawa fizycznego, mianowicie wzmocnienia odkształceniowego typu Rabortnowa. Okaże się, że przy bardzo małych mimośrodkach różnice między tymi czasami mogą być bardzo istotne, mianowicie czasy mogą się różnić o kilka lub nawet o kilkanaście rzędów.

Przyjmujemy następujące ważniejsze założenia:

1) Analizujemy pręt pierwotnie prosty, jednostronnie utwierdzony, obciążony znaną siłą $P(t)$ wywołującą w chwili $t=0$ natychmiastowe ugięcie (rys. 1).

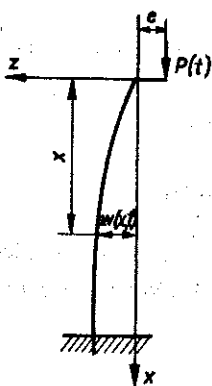
2) Przekrój poprzeczny pręta jest idealnym dwuteownikiem o powierzchni skupionej w półkach, które oznaczono indeksami « w » i « z »; podobnie oznaczono poszczególne wielkości odnoszące się do półek (rys. 2).

3) Przyjmujemy hipotezę płaskich przekrojów Bernoulli'ego.

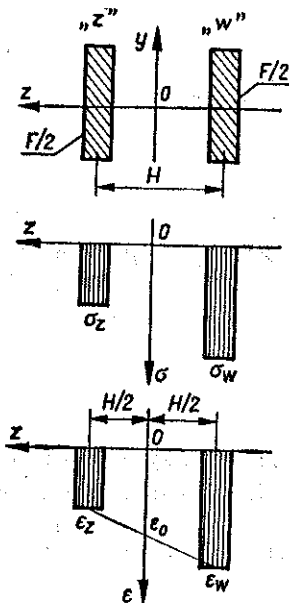
4) Ugięcia pręta są nieskończenie małe.

5) Naprężenia i odkształcenia w półkach przyjmujemy jako dodatnie, gdy odpowiadają ściskaniu.

6) Materiał podlega pełzaniu nieustalonemu opisanemu prawem Rabortnowa (wzmocnienie odkształceniowe). Prawo to dość dobrze opisuje pełzanie metali



Rys. 1.



Rys. 2.

w podwyższonej temperaturze, a bywa również stosowane do opisu pełzania tworzyw sztucznych [10].

7) Pomijamy wpływ sił bezwładności.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA I WYPROWADZENIE RÓWNAŃ PODSTAWOWYCH

Weźmiemy pod uwagę pręt przedstawiony na rys. 1; znana, zmienna siła $P(t)$ działa na mimośrodku e wywołując ugięcie $w(x, t)$. Całkowite pole przekroju poprzecznego pręta jest F , rozstaw pótek H .

Moment zginający $M(x, t)$ i siła podłużna $N(t) = P(t)$ (dodatnia przy ściskaniu) w dowolnym przekroju pręta i dowolnej chwili czasu t są określone wzorami (uwzględniając założenie 2 i 5):

$$(2.1) \quad P(t) = \int \int_F \sigma(x, t) dF = \frac{F}{2} [\sigma_w(x, t) + \sigma_z(x, t)]$$

oraz

$$(2.2) \quad M(x, t) = \int \int_F \sigma(x, t) z dF = \frac{FH}{4} [\sigma_w(x, t) - \sigma_z(x, t)],$$

a poza tym

$$(2.3) \quad M(x, t) = P(t) [w(x, t) + e].$$

Po wprowadzeniu następujących oznaczeń: naprężenie średnie $\frac{P(t)}{F} = \sigma_m(t)$, bezwy-

miarowe ugięcie $\frac{2w(x, t)}{H} = \delta(x, t)$, bezwymiarowy mimośród $\frac{2e}{H} = \beta$, na podstawie (2.1), (2.2) i (2.3) naprężenia wyniosą

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_w(x, t) &= \sigma_m(t) [1 + \beta + \delta(x, t)], \\ \sigma_z(x, t) &= \sigma_m(t) [1 - \beta - \delta(x, t)]. \end{aligned}$$

Zgodnie z przyjętymi uprzednio założeniami 6 i 7, odkształcenia pólek są równe

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_w(x, t) &= \kappa(x, t) \frac{H}{2} + \varepsilon_0(x, t), \\ \varepsilon_z(x, t) &= -\kappa(x, t) \frac{H}{2} + \varepsilon_0(x, t), \end{aligned}$$

gdzie $\kappa(x, t)$ oznacza krzywiznę osi środkowej pręta, a $\varepsilon_0(x, t)$ odkształcenie (skrócenie) tej osi. Ponieważ ograniczyliśmy się do małych ugięć, przeto przyjmiemy w przy-

bliżeniu $\kappa(x, t) \approx -w''(x, t) = -\frac{H}{2} \delta''(x, t)$, a więc

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon_w(x, t) &= -\frac{H^2}{4} \delta''(x, t) + \varepsilon_0(x, t), \\ \varepsilon_z(x, t) &= \frac{H^2}{4} \delta''(x, t) + \varepsilon_0(x, t). \end{aligned}$$

Pełzanie materiału pręta opisane jest prawem Rabotnowa,

$$(2.7) \quad \dot{\Phi} = \dot{p} p^\alpha - K \sigma^n = 0,$$

gdzie K, n, α oznaczają stałe materiałowe, $p \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sigma}{E}$ odkształcenie pełzania oraz E — moduł Younga. Kropka oznacza pochodną względem czasu.

Wykorzystując związki (2.4) i (2.6), określamy odkształcenia pełzania pólki oraz ich pochodne względem czasu. Następnie podstawiając tak uzyskane prawe strony wzorów do prawa (2.7) i porządkując je, otrzymujemy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} (-A\delta'' - C\delta) + \dot{\varepsilon}_0 - \dot{C}_1 \right] (-A\delta'' - C\delta + \varepsilon_0 - C_1)^\alpha &= K\sigma_m^n (B_1 + \delta)^\alpha, \\ \left[\frac{d}{dt} (A\delta'' + C\delta) + \dot{\varepsilon}_0 - \dot{C}_2 \right] (A\delta'' + C\delta + \varepsilon_0 - C_2)^\alpha &= K\sigma_m^n (B_2 - \delta)^\alpha. \end{aligned}$$

Dla skrócenia zapisu wprowadzono następujące nowe symbole:
stałe

$$A = H^2/4, \quad B_1 = 1 + \beta, \quad B_2 = 1 - \beta,$$

znane funkcje czasu zależne od zadanego obciążenia

$$C = C(t) = \sigma_m(t)/E = P(t)/EF,$$

$$C_1 = C_1(t) = B_1 C(t),$$

$$C_2 = C_2(t) = B_2 C(t),$$

poszukiwane wielkości, wyznaczenie których pozwoli na określenie rozkładu naprężeń i odkształceń pólki w trakcie procesu

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x, t), \quad \delta = \delta(x, t).$$

Otrzymany tą drogą układ równań (2.8) jest układem równań różniczkowych, cząstkowych, nieliniowych. Można zauważyć, że we wszystkich nawiasach po lewej stronie występuje pewien wspólny wyraz $A\delta'' + C\delta$. Można go traktować jako lewą stronę równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu względem zmiennej x . Oznaczmy go następująco:

$$(2.9) \quad r = r(x, t) = A\delta''(x, t) + C(t)\delta(x, t).$$

Zatem równania (2.8) po prostych przekształceniach przyjmują postać

$$(2.10) \quad \begin{aligned} -\dot{r} + \dot{\varepsilon}_0 - \dot{C}_1 &= \frac{C_3(B_1 + \delta)^n}{(-r + \varepsilon_0 - C_1)^\alpha}, \\ \dot{r} + \dot{\varepsilon}_0 - \dot{C}_2 &= \frac{C_3(B_2 - \delta)^n}{(r + \varepsilon_0 - C_2)^\alpha}, \end{aligned}$$

gdzie

$$C_3 = C_3(t) = K[\sigma_m(t)]^n$$

traktujemy jako funkcję znaną. Ze względu na \dot{r} i $\dot{\varepsilon}_0$ jest to układ dwu równań algebraicznych liniowych, z których łatwo wyliczymy

$$(2.11) \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{C_3(B_2 - \delta)^n}{(r + \varepsilon_0 - C_2)^\alpha} + \frac{C_3(B_1 + \delta)^n}{(-r + \varepsilon_0 - C_1)^\alpha} + \dot{C}_1 + \dot{C}_2 \right]$$

oraz

$$(2.12) \quad \dot{r} = \frac{1}{2} \left[\frac{C_3(B_2 - \delta)^n}{(r + \varepsilon_0 - C_2)^\alpha} - \frac{C_3(B_1 + \delta)^n}{(-r + \varepsilon_0 - C_1)^\alpha} - \dot{C}_1 + \dot{C}_2 \right].$$

Wzory te nadają się do całkowania numerycznego względem czasu, w wyniku czego dla poszczególnych chwil $t_j, (j=1, 2, \dots, m)$, otrzymamy wartości ε_0 oraz r . Równocześnie wykorzystujemy związek (2.9), który przez całkowanie względem x z zachowaniem warunków brzegowych $\delta(0, t) = 0, \delta'(L, t) = 0$ pozwala na wyznaczenie ugięcia $\delta(x, t_j)$ w kolejnych chwilach.

Rozpoczęcie obliczeń numerycznych wymaga jednak uprzedniego określenia odpowiednich wielkości w chwili startu, a więc w tym przypadku w chwili $t=0$.

3. STAN POCZĄTKOWY

Jak już wzmiankowano, rozpatrujemy pręt pierwotnie prosty, który w pewnej chwili obciążono siłą P . Ponieważ siła działa na mimośrodku, przeto w przypadku $P(0) \neq 0$ pojawia się natychmiastowe ugięcie wzrastające w miarę awansowania się procesu pełzania.

W rozpatrywanej chwili, tj. dla $t=0$, pełzanie jeszcze nie zachodzi — pręt jest sprężysty, a więc z prawa Hooke'a w odniesieniu do pólek znajdziemy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_m(0) [B_1 + \delta(x, 0)] &= E [-A\delta''(x, 0) + \varepsilon_0(x, 0)], \\ \sigma_m(0) [B_2 - \delta(x, 0)] &= E [A\delta''(x, 0) + \varepsilon_0(x, 0)]. \end{aligned}$$

Po prostych przekształceniach mamy

$$(3.2) \quad \varepsilon_0(x, 0) = \frac{1}{2} [C_1(0) + C_2(0)] = C(0) = \text{const}$$

oraz

$$(3.3) \quad A\delta''(x, 0) + C(0)\delta(x, 0) = -C(0)\beta.$$

Do powyższego równania różniczkowego dołączone są następujące warunki brzegowe:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x=0, \quad \delta(x, 0) &= 0; \\ x=L, \quad \delta'(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (3.3) z warunkami (3.4) jest poszukiwanym natychmiastowym ugięciem

$$(3.5) \quad \delta(x, 0) = \frac{\beta}{\cos vL} \cos v(x-L) - \beta,$$

gdzie $v = \sqrt{\frac{C(0)}{A}}$.

Następnie, opierając się na związkach (2.4) i (2.5) i uwzględniając (3.2) i (3.5), określimy naprężenia i odkształcenia dla $t=0$:

$$(3.6) \quad \sigma_w(x, 0) = \sigma_m(0) \left[1 + \frac{\beta}{\cos vL} \cos v(x-L) \right],$$

$$\sigma_z(x, 0) = \sigma_m(0) \left[1 - \frac{\beta}{\cos vL} \cos v(x-L) \right].$$

oraz

$$(3.7) \quad \varepsilon_w(x, 0) = C(0) \left[1 + \frac{\beta}{\cos vL} \cos v(x-L) \right],$$

$$\varepsilon_z(x, 0) = C(0) \left[1 - \frac{\beta}{\cos vL} \cos v(x-L) \right].$$

Znane są więc już wszystkie wielkości określające stan początkowy.

Ponieważ jednak w mianownikach wzorów (2.11) i (2.12) stanowiących podstawę dalszych obliczeń zawarte są odkształcenia pełzania $p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$ (te zaś w chwili $t=0$ są równe zero), przeto powoduje to, że równania (2.11) i (2.12) dla $t=0$ są osobliwe. Bezpośredni «start» do obliczeń numerycznych z tego punktu jest więc niemożliwy.

Należy zatem wyznaczyć dalsze wielkości niezbędne do przejścia na cykl obliczeń numerycznych. Będą to naprężenia, odkształcenia i ugięcia w «następnej» chwili czasu, tzn. dla $t = t_1 > 0$ (t_1 — dowolnie małe).

Zasadniczą metodą rozwiązywania tego zagadnienia będzie metoda rozwinięć prawa pełzania w szeregi potęgowe.

4. OKREŚLENIE STANU W CHWILI t_1 METODĄ ROZWIŃC W SZEREGI POTĘGOWE

Własności reologiczne materiału opisuje prawo pełzania (2.7). Wykorzystując je znajdziemy ugięcie, naprężenia i odkształcenia pręta w pewnej chwili t_1 , odpowiadającej niewielkiemu upływowi czasu od momentu przyłożenia obciążenia. Posłużymy się tu postacią bezwymiarową prawa (2.7) [10]:

$$(4.1) \quad (\dot{\epsilon} - \dot{s})(e - s)^\alpha = s^n,$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\lambda^2 = \left(\frac{4L}{H}\right)^2 \quad \text{smukłość,}$$

$$e = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \epsilon \quad \text{bezwymiarowe odkształcenie,}$$

$$s = \frac{\sigma}{\sigma_E} = \frac{\lambda^2}{\pi^2 E} \sigma \quad \text{bezwymiarowe naprężenie,}$$

$$\tau = KE^n \left(\frac{\pi^2}{\lambda^2}\right)^{n-1-\alpha} t \quad \text{bezwymiarowy czas.}$$

Niechaj bezwymiarowe odkształcenie $e(x, \tau)$ ma postać uogólnionego szeregu potęgowego zmiennej czasowej; współczynniki zaś niech będą funkcjami x :

$$(4.2) \quad e(x, \tau) = A_1(x)\tau^{m_1} + A_2(x)\tau^{m_2} + \dots,$$

oraz

$$(4.3) \quad e(x, \tau) - s(x, \tau) = Q_1(x)\tau^{q_1} + \dots$$

Dla tak przyjętych rozwinięć z prawa (4.1) wynikają następujące związki [10]

$$(4.4) \quad q_1 = \frac{nm_1 + 1}{1 + \alpha}$$

oraz

$$(4.5) \quad Q_1(x) = \left[\frac{A_1^n(x)}{q_1} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

Konsekwentnie, bezwymiarowe naprężenie przedstawione w postaci szeregu

$$(4.6) \quad s(x, \tau) = e(x, \tau) - Q_1(x, \tau)\tau^{q_1} + \dots = A_1(x)\tau^{m_1} + A_2(x)\tau^{m_2} - Q_1(x)\tau^{q_1} + \dots$$

Ograniczając się do przypadku, gdy $P(0) \neq 0$, tzn. gdy $m_1 = 0$, przedstawimy kolejno szeregami następujące wielkości:

bezwymiarowe odkształcenia póltek

$$(4.7) \quad \begin{aligned} e_w(x, \tau) &= A_{1w}(x) + A_{2w}(x) \tau^{m_2} + \dots, \\ e_z(x, \tau) &= A_{1z}(x) + A_{2z}(x) \tau^{m_2} + \dots; \end{aligned}$$

bezwymiarowe naprężenia w półkach

$$(4.8) \quad \begin{aligned} s_w(x, \tau) &= A_{1w}(x) + A_{2w}(x) \tau^{m_2} - Q_{1w}(x) \tau^{q_1} + \dots, \\ s_z(x, \tau) &= A_{1z}(x) + A_{2z}(x) \tau^{m_2} - Q_{1z}(x) \tau^{q_1} + \dots. \end{aligned}$$

Założmy ponadto, że bezwymiarowe ugięcie $\delta(x, \tau)$ określone jest szeregiem

$$(4.9) \quad \delta(x, \tau) = \delta_0(x) + \delta_1(x) \tau^{k_1} + \dots,$$

a także siła zewnętrzna, a więc i związane z nią bezwymiarowe naprężenie średnie dają się przedstawić szeregiem o znanych współczynnikach s_i i wykładnikach h_i :

$$(4.10) \quad s_m(\tau) = s_0 + s_1 \tau^{h_1} + \dots$$

Wprowadziliśmy przy tym następujące oznaczenia:

$$s_0 = \frac{\lambda^2}{\pi^2 E} \frac{P_0}{F}, \quad s_1 = \frac{\lambda^2}{\pi^2 E} \frac{P_1}{F}.$$

Ogólnie poprawne wzory (2.4) i (2.6) określające naprężenie i odkształcenie po zmodyfikowaniu i uwzględnieniu (4.9) i (4.10) przybierają postać

$$(4.11) \quad \begin{aligned} s_w(x, \tau) &= (s_0 + s_1 \tau^{h_1} + \dots) [B_1 + \delta_0(x) + \delta_1(x) \tau^{k_1} + \dots], \\ s_z(x, \tau) &= (s_0 + s_1 \tau^{h_1} + \dots) [B_2 - \delta_0(x) - \delta_1(x) \tau^{k_1} + \dots] \end{aligned}$$

oraz

$$(4.12) \quad e_w(x, \tau) = -\frac{H^2}{4} \frac{\lambda^2}{\pi^2} [\delta_0''(x) + \delta_1''(x) \tau^{k_1} + \dots] + e_0(x, \tau),$$

$$e_z(x, \tau) = \frac{H^2}{4} \frac{\lambda^2}{\pi^2} [\delta_0''(x) + \delta_1''(x) \tau^{k_1} + \dots] + e_0(x, \tau),$$

gdzie

$$e_0(x, \tau) = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \varepsilon_0(x, \tau).$$

Porównując szeregi określające bezwymiarowe naprężenia (4.8) i (4.11) oraz bezwymiarowe odkształcenia (4.7) i (4.12), otrzymamy

$$(4.13) \quad \begin{aligned} A_{1w}(x) + A_{2w}(x) \tau^{m_2} - Q_{1w}(x) \tau^{q_1} + \dots &= s_0 [B_1 + \delta_0(x)] + s_1 [B_1 + \delta_0(x)] \tau^{h_1} + \\ &+ s_0 \delta_1(x) \tau^{k_1} + \dots, \\ A_{1z}(x) + A_{2z}(x) \tau^{m_2} - Q_{1z}(x) \tau^{q_1} + \dots &= s_0 [B_2 - \delta_0(x)] + s_1 [B_2 - \delta_0(x)] \tau^{h_1} + \\ &- s_0 \delta_1(x) \tau^{k_1} + \dots \end{aligned}$$

oraz

$$(4.14) \quad \begin{aligned} A_{1w}(x) + A_{2w}(x)\tau^{m_2} + \dots &= -\frac{H^2}{4} \frac{\lambda^2}{\pi^2} [\delta_0''(x) + \delta_1''(x)\tau^{k_1} + \dots] + e_0(x, \tau), \\ A_{1z}(x) + A_{2z}(x)\tau^{m_2} + \dots &= \frac{H^2}{4} \frac{\lambda^2}{\pi^2} [\delta_0''(x) + \delta_1''(x)\tau^{k_1} + \dots] + e_0(x, \tau). \end{aligned}$$

Po odjęciu stronami w celu wyeliminowania $e_0(x, \tau)$ znajdziemy

$$(4.15) \quad \begin{aligned} A_{1z}(x) - A_{1w}(x) + [A_{2z}(x) - A_{2w}(x)]\tau^{m_2} + \dots = \\ = \frac{H^2}{2} \frac{\lambda^2}{\pi^2} [\delta_0''(x) + \delta_1''(x)\tau^{k_1} + \dots]. \end{aligned}$$

Porównanie pierwszych wyrazów szeregów (4.13) daje

$$(4.16) \quad \begin{aligned} A_{1w}(x) &= s_0 [B_1 + \delta_0(x)], \\ A_{1z}(x) &= s_0 [B_2 - \delta_0(x)]. \end{aligned}$$

Wynikające z (4.15) równanie

$$A_{1z}(x) - A_{1w}(x) = \frac{H^2}{2} \frac{\lambda^2}{\pi^2} \delta_0''(x)$$

w zestawieniu z (4.16) prowadzi do równania różniczkowego na $\delta_0(x)$ identycznego z równaniem (3.3), które wyprowadziliśmy na podstawie prawa Hooke'a dla $t=0$. Z (4.15) wynika nadto

$$(4.17) \quad m_2 = k_1$$

oraz

$$(4.18) \quad A_{2z}(x) - A_{2w}(x) = \frac{H^2}{2} \frac{\lambda^2}{\pi^2} \delta_1''(x).$$

Dodatkowe równania wiążące współczynniki $A_{2w}(x)$, $A_{2z}(x)$ i $\delta_1(x)$ otrzymamy z porównania dalszych wyrazów szeregów (4.13); wymaga ono jednak ustalenia założeń co do uszeregowania wykładników m_2 i q_1 oraz k_1 i h_1 .

Możliwe są następujące kombinacje

- I. $h_1 < k_1$ a. $m_2 < q_1$,
- II. $h_1 = k_1$ b. $m_2 = q_1$,
- III. $h_1 > k_1$ c. $m_2 > q_1$.

Po przeanalizowaniu wszystkich możliwych układów wykładników q_1 , h_1 , k_1 i m_2 stwierdzono, że do efektywnych rozwiązań prowadzą przypadki I.b., II.b., III.b., które w zestawieniu z (4.17) dają kolejno:

$$m_2 = k_1 = q_1 = \frac{1}{1 + \alpha} > h_1, \quad m_2 = k_1 = q_1 = \frac{1}{1 + \alpha} = h_1, \quad m_2 = k_1 = q_1 = \frac{1}{1 + \alpha} < h_1,$$

przy czym h_1 traktujemy jako znane (4.10). Ze względu na małe znaczenie praktycznie przypadków I.b. i II.b. (mała wartość h_1) ograniczymy się tu do dokładniejszego przedstawienia przypadku III.b.:

$$(4.19) \quad m_2 = k_1 = q_1 = \frac{1}{1+\alpha} < h_1.$$

Odpowiednie równanie wynikające z porównań wyrazów w (4.13), przy założeniach III.b., oraz z (4.18) po przekształceniach ma postać

$$(4.20) \quad \delta_1''(x) + \frac{C_0}{A} \delta_1(x) = \frac{1}{2A} (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha+1}} C_0^{\frac{n}{\alpha+1}} \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2} \right)^{\frac{n}{\alpha+1}-1} \left\{ [B_2 - \delta_0(x)]^{\frac{n}{\alpha+1}} - [B_1 + \delta_0(x)]^{\frac{n}{\alpha+1}} \right\},$$

gdzie $C_0 = \frac{P_0}{EF} = C(0)$.

Równanie powyższe ze względu na $\delta_1(x)$ jest równaniem różniczkowym niejednorodnym (prawa strona jest znaną funkcją zmiennej x), tego samego typu co całkowane po każdym kroku czasowym równanie (2.9). Wygodnie więc będzie włączyć je do stosowanej procedury numerycznej całkowania; warunki brzegowe do równania (4.20) są następujące:

$$\delta_1(0) = 0, \quad \delta_1'(L) = 0.$$

Znając całkę równania (4.20) czyli $\delta_1(x)$, łatwo określimy całkowite ugięcie w chwili t_1 :

$$(4.21) \quad \delta(x, t_1) = \delta_0(x) + \delta_1(x) \left(\frac{\pi^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{n}{\alpha+1}-1} (E^n K)_{1^{\alpha+1}}^{\frac{1}{\alpha+1}} t_1^{\frac{1}{\alpha+1}} + \dots$$

Nieznane odkształcenie osi środkowej pręta znajdziemy dodając stronami (4.14):

$$(4.22) \quad e_0(x, \tau) = A_{1z}(x) + A_{1w}(x) + [A_{2z}(x) + A_{2w}(x)] \tau^{m_2} + \dots,$$

a po podstawieniach i uporządkowaniu otrzymamy

$$(4.23) \quad e_0(x, t_1) = C_0 + \frac{1}{2} (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha+1}} (E^n K)^{\frac{1}{\alpha+1}} C_0^{\frac{n}{\alpha+1}} \left\{ [B_2 - \delta_0(x)]^{\frac{n}{\alpha+1}} - [B_1 + \delta_0(x)]^{\frac{n}{\alpha+1}} \right\} \frac{1}{t_1^{\frac{1}{\alpha+1}}}.$$

Bez trudu znajdziemy też odpowiedni wzór niezbędny do numerycznego całkowania wzoru (2.12):

$$(4.24) \quad r(x, t_1) = A \delta''(x, t_1) + C(t_1) \delta(x, t_1).$$

Dysponujemy zatem pełnym układem wielkości koniecznych do rozpoczęcia obliczeń numerycznych.

5. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

Wykorzystując uprzednio wyprowadzone wzory określające stan w chwilach $t=0$ oraz $t=t_j$, bez większych trudności całkujemy numerycznie względem czasu metodą różnic skończonych równania (2.11) i (2.12). Równocześnie po każdym kroku czasowym całkujemy względem zmiennej x równanie (2.9), z którego wyliczymy ugięcie $\delta(x)$ dla $t=t_j$ ($j=1, 2, \dots, n$). Warunki brzegowe dla równania (2.9) uwzględnia się metodą «wstrzeliwania».

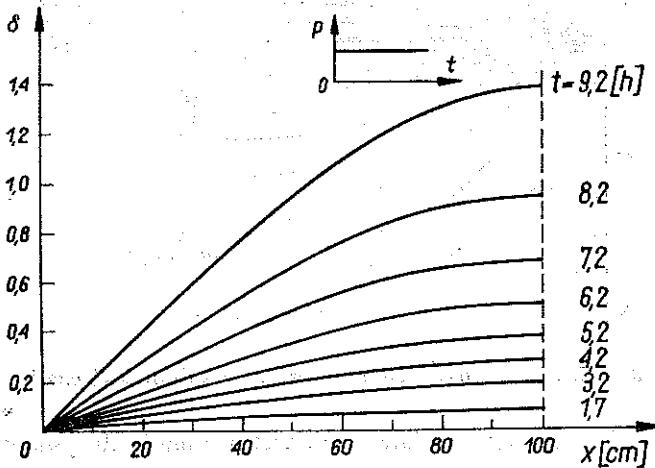
Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej ODRA 1204. W wyniku otrzymano tablice $\delta(x)$, $\sigma_w(x)$, $\sigma_z(x)$ i $\epsilon_0(x)$ dla poszczególnych chwil t_j .

Przykładowe obliczenia wykonano dla siły stałej, rosnącej i malejącej w czasie. Przyjęto następujące wartości stałych materiałowych dla polistyrenu⁽¹⁾: $E=12000$ [kG/cm²], $K=9,14 \cdot 10^{-34}$ [cm²ⁿ/kGh], $n=10,93$, $\alpha=5,99$.

Dla pręta przyjęto następujące dane liczbowe: smukłość $\lambda=16$ ($L=100$ [cm], $H=25$ [cm], $F=14$ [cm²]), obciążonego siłą

- a) stałą $P=1500$ [kG],
- b) malejącą $P=1500-150 t$ [kG],
- c) rosnącą $P=1000+100 t^{1/2}$ [kG],

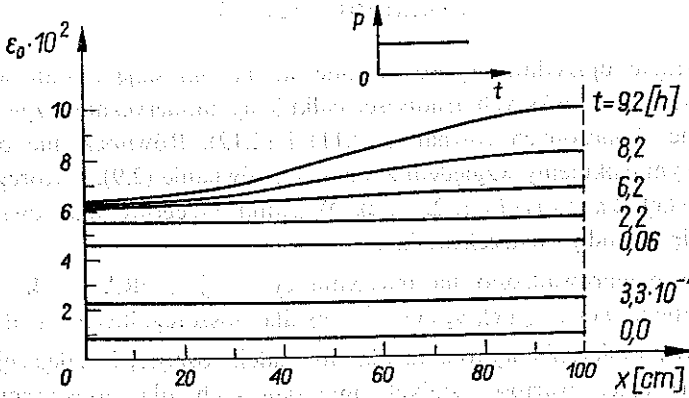
(gdzie czas t liczono w godzinach), działającą na mimośrodku $e=0,2$ [cm]. Wyniki obliczeń zilustrowano wykresami 3, 4, 5, 6, 7.



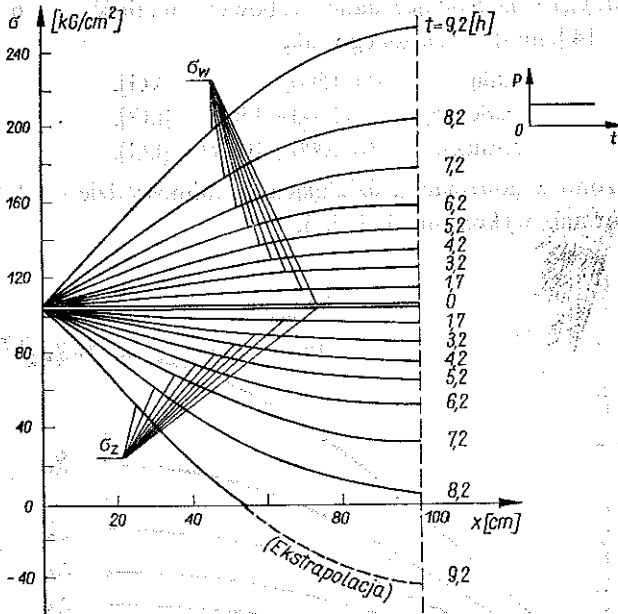
Rys. 3. Linia ugięcia pręta $\delta(x)$ w kolejnych chwilach

Przyjmujemy, że prawo Rabotnowa (2.7) opisuje poprawnie zachowanie się materiału jedynie w przedziale $\sigma > 0$ (ściskanie). Czas, po upływie którego $\sigma=0$, nazwiemy czasem krytycznym; jest on oczywiście mniejszy od czasu krytycznego Kempnera-Hoffa (zmierzanie ugięć do nieskończoności), jednak praktycznie różnice

⁽¹⁾ Wartości te określono na drodze aproksymacyjnej w laboratorium Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej.



Rys. 4. Odkształcenie osi środkowej pręta $\epsilon_0(x)$ w kolejnych chwilach



Rys. 5. Przebieg naprężeń $\sigma_w(x)$, $\sigma_z(x)$ w kolejnych chwilach

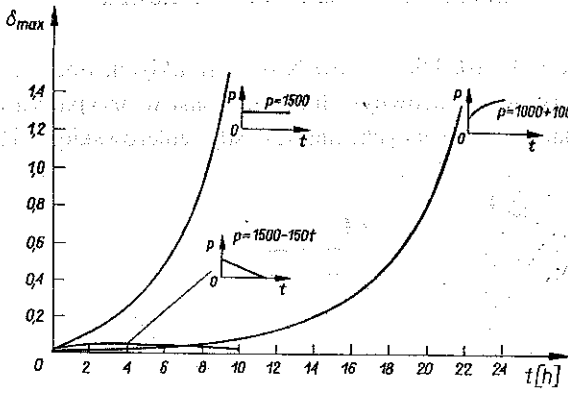
nie są zbyt wielkie. Czas ten w miarę zmniejszenia mimośrodowość gwałtownie wzrasta (rys. 8).

Dla mimośrodowość bliskiego zeru ($\beta = 10^{-10}$) w zależności od smukłości pręta λ oraz stosunku $m = P/P_E$, stosunek wyznaczonego czasu krytycznego do czasu Rabotnowa-Szestierikowa

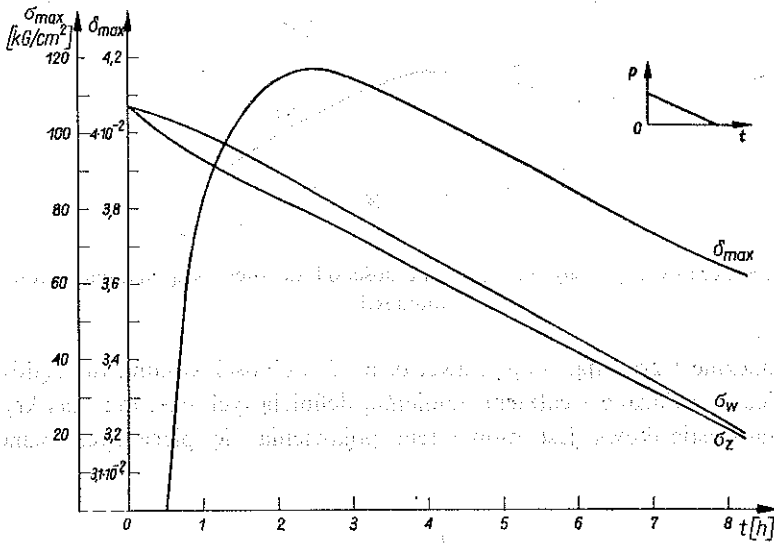
$$t_{RS} = \chi \left(\frac{1-m}{m} \right)^{\alpha+1} \left(\frac{P}{F} \right)^{\alpha+1-n}$$

gdzie

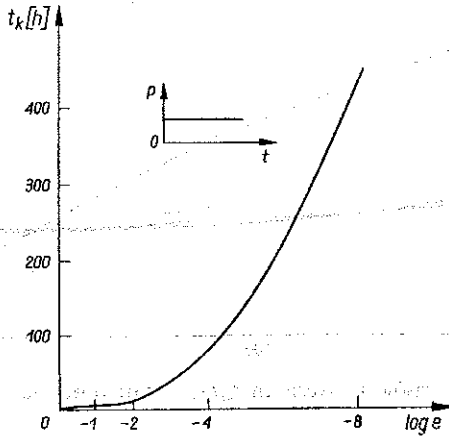
$$\chi = \frac{\alpha^{\alpha+1}}{E^{\alpha+1} n^{\alpha+1} (\alpha+1) K}$$



Rys. 6. Zmiany maksymalnego ugięcia δ_{max} w czasie dla różnych programów obciążenia

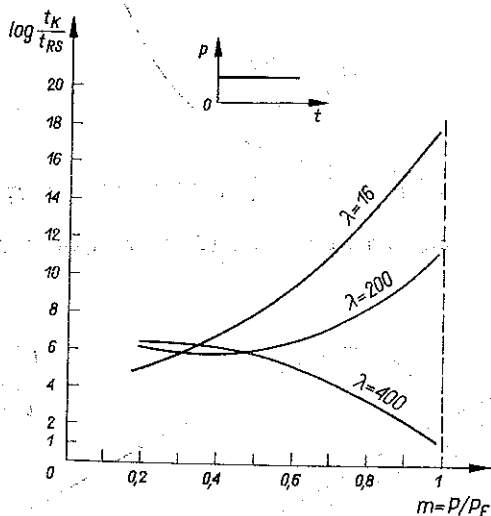


Rys. 7. Przebieg zmian maksymalnych wartości ugięcia i naprężeń dla siły liniowo malejącej



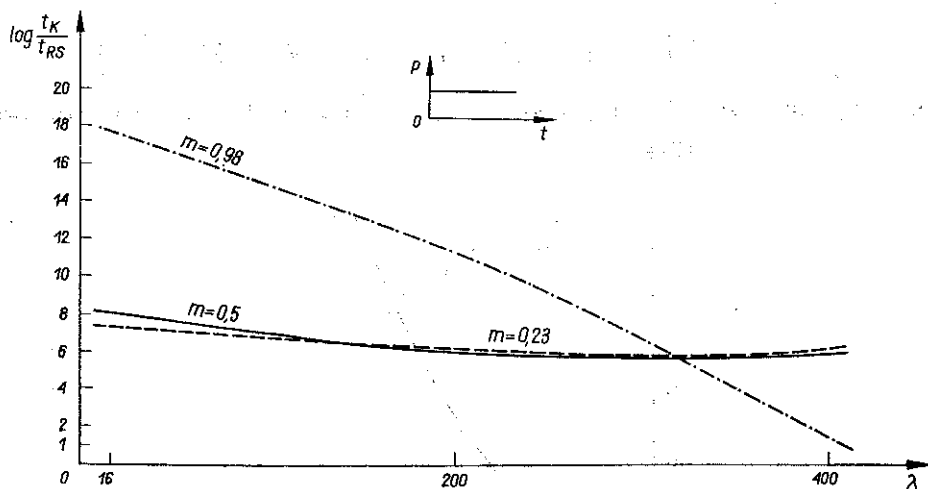
Rys. 8. Zależność czasu krytycznego od wartości mimośrodru e

przedstawiają wykresy 9 i 10. Dla prętów bardzo smukłych, obciążonych siłą bliską sile eulerowskiej, czasy te są porównywalne, natomiast w przypadku prętów krępych lub przy obciążeniach stanowiących ułamek siły eulerowskiej różnice pomiędzy



Rys. 9. Stosunek czasów krytycznych t_k/t_{RS} w zależności od wartości obciążenia dla prętów różnych smukłości

czasami znacznie wzrastają, mogą nawet osiągać wielkości kilkunastu rzędów. Tak duże różnice są związane z całkiem odmienną definicją tych czasów; czas krytyczny Rabortnowa-Szestierikowa jest momentem pojawienia się pierwszych oznak nie-



Rys. 10. Stosunek czasów krytycznych t_k/t_{RS} w zależności od smukłości pręta

bezpieczeństwa dla pręta ściskanego osiowo ($\beta=0$), podczas gdy czas zdefiniowany kryterium $\sigma_z=0$ określa praktycznie koniec pracy konstrukcji.

ЛИТЕРАТУРА ЦЫТОВАНА В ТЕКЌІЕ

1. H. BARGMANN, *Kriechknicken bei veränderlicher Axiallast*, Ing.-Archiv., **41**, 1, 1–11, 1971.
2. B. FRAEIJIS de VEUBEKE, *Creep buckling*, High temperature effects in aircraft structures, 267–287, Pergamon Press 1958.
3. A. ISAKSSON, *Creep rates of eccentrically loaded test pieces*, Trans. Roy. Instn., **110**, Stockholm 1957.
4. W. E. JAHSMAN, F. A. FIELD, *Creep instability and collapse of initially straight columns*, Lockheed Aircraft Corporation, LMSD-2457, 1958.
5. W. E. JAHSMAN, F. A. FIELD, *A theory of creep instability of initially straight columns*, Lockheed Aircraft Corporation, LMSD-48329, 1958.
6. W. E. JAHSMAN, *Creep stability of a column with coupled geometric imperfection and material behaviour effects*, IUTAM Symposium Creep in Structures II, 1970, 360–370 Springer-Verlag 1972.
7. J. MARIN, *Creep deflections in columns*, J. Appl. Phys., **18**, 103–109, 1947.
8. А. Р. Ржаницын, *Некоторые вопросы механических систем деформирующихся во времени*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1949.
9. Н. Г. Торшенев, *Выпучивание эксцентрично нагруженных систем при ползучести*, 3-тий Всес. Съезд по Теорет. и Прикл. Мех., **295**, 1968.
10. A. TROJNACKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Investigation of the Rabotnov-Sherstikov creep stability under general loading programs*, Rozpr. Inż., **24**, 2, 253–265, 1976.
11. M. ŻYCZKOWSKI, A. ZABORSKI, *Creep rupture phenomena in creep buckling problems*, IUTAM Symposium Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies, 1974, 283–290, Springer-Verlag 1975.

Резюме

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ СТЕРЖНЯ СЖИМАЕМОГО
ЭКЦЕНТРИЧЕСКИ СИЛОЙ ПРОИЗВОЛЬНО ПЕРЕМЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ

Целью настоящей работы является анализ ползучести стержня эксцентрически сжимаемого известной переменной силой: ползучесть описана законом Работнова.

Выведенные основные уравнения, описывающие процесс, проинтегрированы численно, раньше подсчитывая необходимые величины в окрестности начальной точки $t=0$; здесь послужили разложения закона ползучести в обобщенные степенные ряды. Результаты расчетов позволяют следить изменения прогиба, напряжений и деформаций так во времени, как и вдоль длины стержня.

Определенное в работе критическое время, сближенное к времени Кемпнера-Гоффа, в случае малых эксцентритетов сравнено с критическим временем Работнова-Шестерикова для прямого стержня, обнаруживая в общем значительные различия.

SUMMARY

NON-STATIONARY CREEP OF A ROD ECCENTRICALLY COMPRESSED
BY AN ARBITRARILY TIME-DEPENDENT FORCE

The aim of this paper consists in the analysis of creep of a rod subject to an eccentrically applied compressive force being a known function of time; the Rabotnov creep law is assumed.

The basic equations describing the process are numerically integrated, all necessary data in the neighbourhood of the initial point $t=0$ being previously determined; generalized power series

expansions of the creep law are used. The results obtained enable us to follow the variations of the deflections, stresses and strains in time and along the rod.

The critical time defined in the paper, similar to the notion of the Kempner-Hoff time, is compared in the case of small eccentricity with the critical time introduced by Rabotnov-Sesterikov; considerable differences are observed.

**POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN**

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lipca 1977 r.

[Faint, mostly illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page]

[Faint, mostly illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page]

[Faint, mostly illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page]