

ZASADY I METODA PROJEKTOWANIA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH BELEK CIĄGLYCH PODDANYCH OBCIĄŻENIOM RUCHOMYM (*)

WANDA P A P R O C K A - G A R L I C K A (WARSZAWA)

Praca przedstawia analizę wpływu obciążeń cyklicznych na nośność stalowych belek wieloprzęsłowych. Podano zasady wyznaczania obciążeń granicznych opierając się na teorii nośności granicznej, teorii przystosowania oraz metodzie naprężeń dopuszczalnych, wyznaczono odpowiednie obciążenia oraz wykazano istotne różnice występujące między nimi. Wskazano na konieczność dokładnej analizy obciążeń i sposobu ich przyłożenia do konstrukcji przed wyborem właściwej metody obliczeń oraz przedstawiono metodę projektowania tych konstrukcji na podstawie trzech wyżej wymienionych teorii.

1. OZNACZENIA

- L rozpiętość przęseł belki,
- a rozstaw sił P ,
- $\alpha = a/L$,
- W wskaźnik wytrzymałości przekroju,
- W_{pl} wskaźnik oporu plastycznego,
- $c = W/W_{pl}$ równe $2/3$ dla przekroju prostokątnego, $0,85$ — dla dwuteowych przekrojów walcowanych, 1 — dla idealnego przekroju dwuteowego,
- M_{0i} moment graniczny w przekroju i równy $Q_i W_{pli}$,
- Q_s granica plastyczności stali,
- R_s granica sprężystości stali równa w przybliżeniu Q_s ,
- $\max M_i, \min M_i$ ekstremalne sprężyste momenty zginające w przekroju i ,
- $\max M_{x_0}^1$ maksymalny sprężysty moment zginający wywołany przez siły $P=1$ (moment pod «lewą» siłą w przekroju x_0),
- $\min M_1^1$ minimalny sprężysty moment zginający wywołany przez siły $P=1$ (moment na podporze 1),
- x_0 odległość od podpory 0 przekroju x_0 , w którym występuje M_{max} ,
- $\kappa_0 = x_0/L$
- x_1 odległość lewej siły od podpory 0, przy której moment M_i osiąga minimum,
- $\kappa_1 = x_1/L$
- $\max M_\beta^1, \min M_\beta^1$ ekstremalne sprężyste momenty zginające od sił jednostkowych w przekrojach β , w których różnica $\max M_\beta^1 - \min M_\beta^1$ osiąga maksimum,
- x_β odległość przekroju β od podpory 0,
- M_{ei} największy sprężysty moment zginający, jaki przekrój i może przenieść,

(*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. «Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych».

- $\max |M|$ maksymalny bezwzględny moment zginający od sił $P=1$,
 x_γ odległość od podpory 0 przekroju γ , w którym występuje $\max |M|$,
 P_0 obciążenie graniczne,
 P_{n0} obciążenie graniczne wg teorii nośności granicznej,
 P_{pp} graniczne obciążenie przystosowania odpowiadające zniszczeniu przyrostowemu,
 P_{pz} graniczne obciążenie przystosowania odpowiadające zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego,
 P_s graniczne obciążenie wyznaczone z warunku naprężeń dopuszczalnych,
 P obciążenie obliczeniowe,
 s współczynnik bezpieczeństwa.

2. WSTĘP

Belki ciągłe z materiału o własnościach sprężysto-plastycznych poddane obciążeniom zmiennym w czasie (np. obciążeniom ruchomym) mogą przenieść większe obciążenie niż to wynika z warunku naprężeń dopuszczalnych. Jednakże mogą też ulec zniszczeniu przed osiągnięciem obciążenia granicznego, wyznaczonego metodami nośności granicznej. Ta ostatnia bowiem metoda odnosi się jedynie do przypadku, gdy obciążenie narasta monotonicznie od zera do wartości największej, proporcjonalnie do jednego parametru.

Jeśli obciążenia mają charakter cykliczny, to w każdym cyklu obciążeń może nastąpić nowe odkształcenie plastyczne. Po dostatecznie wielu cyklach albo odkształcenia te narastają i powstają w rezultacie tak duże ugięcia, że czynią konstrukcję bezużyteczną, albo też przy występowaniu przyrostów odkształceń plastycznych przeciwnych znaków może nastąpić zniszczenie kruche wskutek zmęczenia materiału. Pierwszy rodzaj zniszczenia nazywamy zniszczeniem przyrostowym, drugi — zniszczeniem na skutek zmęczenia niskocyklowego. Okazuje się, że konstrukcja może reagować tylko sprężysto, czyli przystosować się do obciążenia mniejszego od obciążeń wywołujących wyżej wymienione stany zniszczenia, ściślej do obciążenia mniejszego od obu odpowiadających tym stanom zniszczenia obciążeń.

Nowa polska norma PN-76/B-03200 poleca uwzględnienie wpływu obciążeń zmiennych na plastyczną dystrybucję momentów zginających, nie podaje jednak, w jaki sposób wpływ ten należy uwzględnić. Rozwiązanie tego zagadnienia należy do teorii przystosowania [2, 3, 4, 5 i 6]. Korzystając z jej twierdzeń, wykażemy istotny wpływ własności plastycznych materiału na nośność omawianej konstrukcji przy obciążeniu jej w sposób cykliczny. Wykażemy również konieczność uwzględnienia tych własności przy jej projektowaniu.

3. ZAŁOŻENIA, CEL I ZAKRES

Przedmiotem opracowania jest analiza stanów granicznych belek dwu, trzy, cztero i wieloprzęsłowych, obciążonych dwiema siłami P o rozstawie a , przesuwanymi się swobodnie po belkach (rys. 1). Nie wprowadzając ograniczeń na ugięcia, przeprowadzono zgodnie z nomenklaturą normy PN-76/B-03200 jedynie

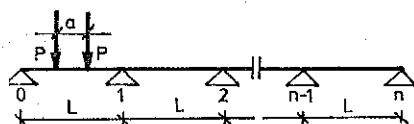
analizę stanów granicznych nośności. Rozpatrzenie stanów granicznych użytkowania zostało pominięte.

Przyjęto stałe przekroje belek na całej długości belek; przęsła mają jednakowe rozpiętości.

Obciążenie graniczne wyznaczmy kolejno na podstawie teorii nośności granicznej, teorii przystosowania oraz metody naprężeń dopuszczalnych, stosując kryterium nieprzekroczenia odkształceń sprężystych. Ze względu na powszechność stosowania metody stanów granicznych szczegółowo omówimy jedynie teorię przystosowania, jej założenia i twierdzenia.

Otrzymane wyniki dotyczyć będą konstrukcji wykonanych ze stali o wyraźnie zaznaczonej granicy plastyczności, zastosowane bowiem twierdzenia zostały wyprowadzone na podstawie wykresów momentu w zależności od krzywizn nie uwzględniających wzmocnienia materiału [9 i 10].

Wyniki te pozwolą na przeprowadzenie analizy porównawczej oraz na określenie, dla jakich obszarów zmienności rozstawu a sił P stosowanie tej, a nie innej teorii będzie właściwe.

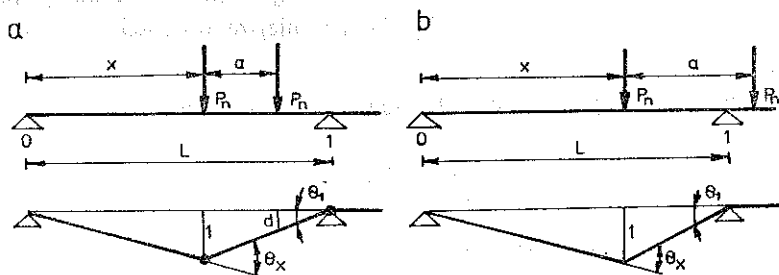


Rys. 1.

4. STAN GRANICZNY NOŚNOŚCI

Konstrukcja osiąga stan graniczny nośności, gdy wskutek utworzenia się przegubów plastycznych, w których występują nieograniczone płynięcia plastyczne materiału, zmienia się ona w «mechanizm».

Ze względu na jednakową rozpiętość przęseł o nośności belki decyduje nośność przęsła, znajdującego się w warunkach najbardziej niekorzystnego podparcia, tj. przęsła skrajnego. Przegubury plastyczne powstaną w miejscach wystąpienia ekstremalnych momentów zginających, tj. w przęśle 0-1 i na podporze 1.



Rys. 2.

Rozpatrzymy następujące przypadki (rys. 2): a) ustawienia obu sił w przęśle 0-1 oraz b) jednej siły w przęśle 0-1, drugiej w przęśle 0-2.

Obciążenia niszczące wystąpią w postaci sił granicznych P_{no} . Ze względu na to, że o zniszczeniu belki decyduje zniszczenie jej przęsła skrajnego — siły te będą dla

belek dwu, trzy, cztero i wieloprzęsłowych jednakowe. Wyznamy je korzystając z kinematycznego twierdzenia nośności granicznej [1]. Na podstawie tego twierdzenia znajdziemy następujące równania:

a) dla przęsła 0-1 obciążonego dwiema siłami (rys. 2a)

$$(4.1) \quad P_n \cdot 1 + P_n d = M_0 |\theta_x| + M_0 |\theta_1|;$$

b) dla przęsła 0-1 obciążonego jedną siłą (rys. 2b)

$$(4.2) \quad P_n \cdot 1 = M_0 |\theta_x| + M_0 |\theta_1|.$$

Występujące w równaniach (4.1) i (4.2) θ_1 , θ_x i d są następujące:

$$(4.3) \quad \theta_1 = -\frac{1}{L-x}, \quad \theta_x = \frac{L}{x(L-x)}, \quad d = \frac{L-x-a}{L-x}.$$

Wyznaczone z równań (4.1) i (4.2) po wprowadzeniu $\kappa = x/L$ siły P_n wynoszą

$$(4.4) \quad P_n = \frac{1+\kappa}{\kappa(2-2\kappa-\alpha)} \frac{M_0}{L},$$

dla przęsła 0-1 obciążonego dwiema siłami oraz

$$(4.5) \quad P_n = \frac{1+\kappa}{\kappa(1-\kappa)} \frac{M_0}{L},$$

dla przęsła obciążonego jedną siłą.

Siły niszczące przęsło 0-1 będą najmniejsze z sił określonych wzorami (4.4) i (4.5). Otrzymamy je «minimalizując» równania (4.4) i (4.5), tj. z warunku

$$(4.6) \quad \frac{dP_n}{d\kappa} = 0.$$

Z równania (4.6) wyznaczmy $\kappa_{gr} = x_{gr}/L$ określające położenia lewego przegubu plastycznego, przy których siły P_n osiągają najmniejsze wartości P_{no} . Otrzymamy następujące wartości:

a) w przypadku, gdy obie siły znajdują się w przęsle 0-1

$$(4.7) \quad \kappa_{gr} = \frac{x_{gr}}{L} = -1 + \sqrt{2 - \frac{\alpha}{2}};$$

b) w przypadku, gdy jedna siła znajduje się w przęsle 0-1

$$(4.8) \quad \kappa_{gr} = 0,414.$$

Siły niszczące P_{no} , otrzymane z (4.4) i (4.5) na podstawie (4.7) i (4.8) wyniosą:

a) przy ustawieniu obu sił w przęsle 0-1

$$(4.9) \quad P_{no} = \frac{1}{6-\alpha-2\sqrt{2(4-\alpha)}} \frac{M_0}{L};$$

b) przy ustawieniu jednej siły w przęśle 0-1

$$(4.10) \quad P_{no} = 5,83 \frac{M_0}{L}.$$

Chcąc ustalić, przy jakim rozstawie a sił P prawa siła znajdzie się nad podporą 1, a zatem jaka wartość a będzie graniczną wartością dla obu rozwiązań, porównamy siły P_{no} określone wzorami (4.9) i (4.10). Otrzymamy

$$(4.11) \quad -0,125 \alpha^3 + 0,957 \alpha^2 - 2,076 \alpha + 0,986 = 0,$$

skąd $\alpha_0 = 0,656$.

Tak więc dla rozstawu sił P $a \leq 0,656 L$ wyznaczmy siły graniczne ze wzoru (4.9), natomiast przy rozstawie $a \geq 0,656 L$ wyznaczmy je ze wzoru (4.10). Siły te zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1. Obciążenie graniczne P_{no} wg teorii nośności granicznej belek dla $n \geq 2$
 $EJ = \text{const}$

$\alpha = \frac{a}{L}$	$\kappa_{gr} = \frac{x_{gr}}{L} = -1 + \sqrt{2 - \frac{\alpha}{2}}$	$P_{no} = \frac{1 + \kappa_{gr}}{\kappa_{gr}(2 - 2\kappa_{gr} - \alpha)} \frac{M_0}{L}$
0	0,414	2,91 M_0/L
0,1	0,396	3,18 M_0/L
0,2	0,378	3,49 M_0/L
0,3	0,360	3,86 M_0/L
0,4	0,342	4,29 M_0/L
0,5	0,323	4,80 M_0/L
0,6	0,307	5,43 M_0/L
0,656	0,293	5,83 M_0/L
0,656	0,414	5,83 M_0/L
0,7	0,414	5,83 M_0/L
0,8	0,414	5,83 M_0/L
0,9	0,414	5,83 M_0/L
1,0	0,414	5,83 M_0/L
$\alpha = a/L$	$\kappa_{gr} = \frac{x_{gr}}{L} = 0,414$	$P_{no} = 5,85 M_0/L$

5. STAN GRANICZNY PRZYSTOSOWANIA

W konstrukcji poddanej działaniu obciążeń cyklicznych mogą powstać w każdym cyklu obciążeń nowe odkształcenia plastyczne, a odkształceniom tym towarzyszy zwykle powstanie stanu samozrównoważonych naprężeń resztkowych. Naprężenia te mogą powodować zmniejszenie naprężeń całkowitych. W rezultacie konstrukcja (po powstaniu w niej w stadium początkowym obciążenia pewnych odkształceń plastycznych) może na kolejne cykle obciążenia reagować już w sposób czysto sprężysty. Stan taki nazywamy stanem przystosowania.

Jeżeli obciążenia występujące w konstrukcji przekroczą obciążenia, do których konstrukcja może się przystosować, to ulegnie ona zniszczeniu. Rozróżnimy dwa typy zniszczenia:

1) Zniszczenie przyrostowe, gdy występujące w kolejnych cyklach obciążeń odkształcenia plastyczne narastają i powstałe w rezultacie nadmierne ugięcia czynią konstrukcję bezużyteczną lub powodują jej zniszczenie.

2) Zniszczenie wskutek zmęczenia niskocyklowego, gdy występujące w kolejnych cyklach obciążeń przyrosty odkształceń plastycznych przeciwnych znaków powodują powstanie w materiale kruchych złomów.

Graniczne obciążenie przystosowania możemy wyznaczyć z analogicznych twierdzeń do twierdzeń występujących w teorii nośności granicznej: kinematycznego Neala i statycznego Bleicha.

Graniczne obciążenie powodujące zniszczenie wskutek zmęczenia niskocyklowego otrzymujemy z twierdzenia Bleicha. Obciążenie powodujące zniszczenie przyrostowe konstrukcji otrzymujemy z obu twierdzeń, przy czym z twierdzenia kinematycznego otrzymujemy jego górną ocenę, ze statycznego — ocenę dolną. Na ogół korzystamy z metody kinematycznej jako łatwiejszej w stosowaniu. Potrzebna jest wtedy, podobnie jak w kinematycznej metodzie nośności granicznej, znajomość kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów ruchu plastycznego. Metoda statyczna wymaga natomiast skonstruowania samorzównoważonego pola momentów resztkowych, odpowiadającego stanowi naprężeń resztkowych. W metodzie kinematycznej zadanie sprowadza się w końcu do rozwiązania układu równań, w metodzie statycznej — układu nierówności.

Zniszczenie rozpatrywanej przez nas konstrukcji nastąpi wskutek zniszczenia skrajnego przęsła belki. Belka będzie najniekorzystniej obciążona, gdy obie siły znajdują się w przęśle 0-1, bądź jedna z nich znajdzie się w przęśle 0-1 druga w przęśle 1-2 (zależać to będzie od rozstawu a sił P). Oba te przypadki zostaną szczegółowo rozpatrzone.

5.1. Obciążenie graniczne odpowiadające zniszczeniu przyrostowemu belki

Obciążenie to wyznaczmy korzystając z twierdzenia kinematycznego Neala, które dla płaskich konstrukcji prętowych (ramy, belki) można sformułować następująco:

Jeżeli dla pewnego mechanizmu o n przegubach plastycznych i o kątach θ_i obrotu w tych przegubach zachodzi nierówność

$$(5.1) \quad \sum_{i=1}^n M_{0i} |\theta_i| < \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \theta_i,$$

gdzie

$$(5.2) \quad \mathfrak{M}_i = \begin{cases} \max M_i, & \text{jeżeli } \theta_i > 0, \\ \min M_i, & \text{jeżeli } \theta_i < 0, \end{cases}$$

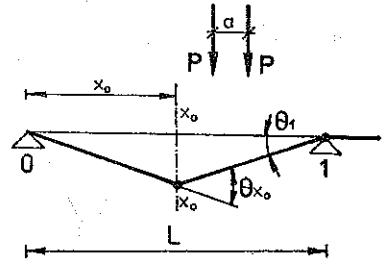
to przystosowanie konstrukcji nie nastąpi.

Graniczne obciążenie P_{pp} odpowiadające zniszczeniu przyrostowemu belki, będzie zatem obciążeniem spełniającym równanie:

$$(5.3) \quad \sum_{i=1}^n M_{0i} |\theta_i| = \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i \theta_i.$$

Obciążenie to zależy od liczby n przęseł. Ze względu na to, że dla $n \geq 3$ różnice są małe, przyjmiemy dla $n > 3$ obciążenie P_{pp} wyznaczone dla $n=3$.

Założymy, że powstały dwa przeguby plastyczne (rys. 3): w miejscu wystąpienia największego momentu zginającego, tj. w przęśle 0-1 pod «lewą» siłą oraz w miejscu wystąpienia najmniejszego momentu, tj. na podporze 1. Występujące w schemacie zniszczenia tego przęśla kąty obrotu θ_{x_0} i θ_1 określone są wzorami (4.2) i (4.3). Do wzorów tych należy na miejsce x wprowadzić x_0 .



Rys. 3.

Wykorzystując równanie (5.3) napiszemy:

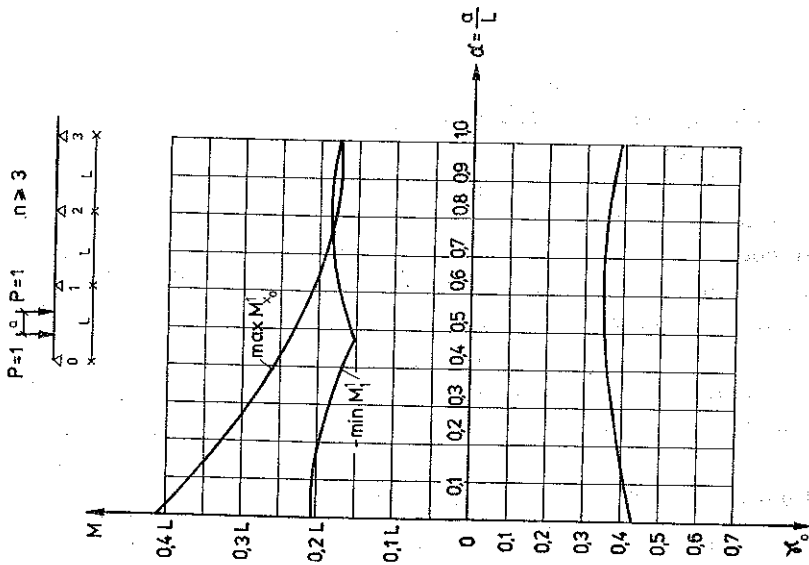
$$(5.4) \quad M_0 |\theta_{x_0}| + M_0 |\theta_1| = \max M_{x_0}^1 P_{pp} \theta_{x_0} + \min M_1^1 P_{pp} \theta_1.$$

Podstawiając θ_{x_0} i θ_1 oraz wartości κ_0 z p. 3 do (5.4), otrzymujemy graniczną siłę przystosowania:

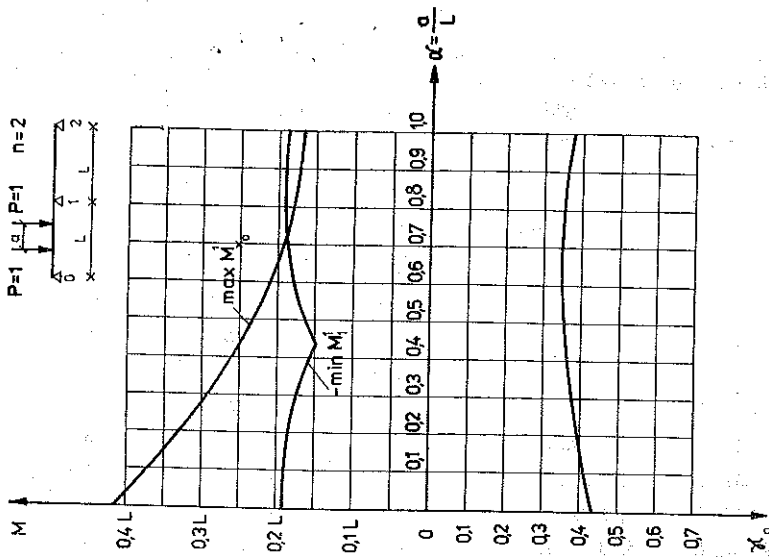
$$(5.5) \quad P_{pp} = \frac{1 + \kappa_0}{\max M_{x_0}^1 - \kappa_0 \min M_1^1} M_0.$$

Tablica 2. Graniczne obciążenia przystosowania: P_{pp} — odpowiadające zniszczeniu przyrostowemu dla belek o liczbie przęseł $n=2$ i $n \geq 3$, P_{pz} — odpowiadające zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego dla belek o liczbie przęseł $n \geq 3$

$\alpha = \frac{a}{L}$	$P_{pp} = \frac{1 + \kappa_0}{\max M_{x_0}^1 - \kappa_0 \min M_1^1} M_0$		Momenty zginające w przekroju β wywołane siłami $P=1$ oraz odległość x_β tego przekroju od podpory 0			$P_{pz} = \frac{2c}{\max M_\beta^1 - \min M_\beta^1} M_0$
	$n=2$	$n \geq 3$	x_β	max M	min M	$n \geq 3$
0	2,88 M_0/L	2,87 M_0/L	0,5 L	0,400 L	-0,078 L	3,56 M_0/L
0,1	3,16 M_0/L	3,15 M_0/L	0,5 L	0,355 L	-0,078 L	3,93 M_0/L
0,2	3,49 M_0/L	3,48 M_0/L	0,5 L	0,313 L	-0,075 L	4,54 M_0/L
0,3	3,86 M_0/L	3,86 M_0/L	0,5 L	0,274 L	-0,069 L	4,96 M_0/L
0,4	4,29 M_0/L	4,29 M_0/L	0,4 L	0,253 L	-0,050 L	5,61 M_0/L
0,5	4,67 M_0/L	4,75 M_0/L	0,4 L	0,226 L	-0,044 L	6,30 M_0/L
0,6	4,98 M_0/L	5,03 M_0/L	0,4 L	0,204 L	-0,038 L	7,03 M_0/L
0,7	5,22 M_0/L	5,31 M_0/L	0,4 L	0,189 L	-0,031 L	7,73 M_0/L
0,8	5,46 M_0/L	5,53 M_0/L	0,4 L	0,179 L	-0,026 L	8,30 M_0/L
0,9	5,64 M_0/L	5,69 M_0/L	0,4 L	0,174 L	-0,024 L	8,60 M_0/L
1,0	5,77 M_0/L	5,76 M_0/L	0,4 L	0,172 L	-0,023 L	8,73 M_0/L



Rys. 5.



Rys. 4.

Występujące we wzorze (5.5) ekstremalne momenty zginające $\max M_{x_0}^1$ w przęśle 0-1 i $\min M_1^1$ na podporze 1 oraz położenie κ_0 «lewej» siły, przy którym występuje moment $\max M_{x_0}^1$, zostały dla różnych α wyznaczone w pracy [8]. W niniejszej pracy przedstawiono je w postaci wykresów (rys. 4 i rys. 5). Z wykresów tych, mając dany rozstaw a sił P , możemy odczytać odpowiadające mu położenie κ_0 «lewej» siły, przy którym występuje moment $\max M_{x_0}^1$ oraz momenty $\max M_{x_0}^1$ i $\min M_1^1$.

Obliczone ze wzoru (5.5) na podstawie wyznaczonych w podany wyżej sposób wartości κ_0 , $\max M_{x_0}^1$ i $\min M_1^1$ graniczne siły przystosowania P_{pp} odpowiadające zniszczeniu przyrostowemu belki zestawiono w tablicy 2.

5.2. Obciążenie graniczne odpowiadające zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego

Obciążenie to wyznaczmy korzystając z twierdzenia statycznego Bleicha, które można sformułować następująco: *Stan przystosowania płaskiej konstrukcji prętowej wystąpi, jeżeli istnieje stały rozkład momentów resztkowych \bar{M}_i takich, że w każdym przekroju będą zachowane nierówności:*

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \max M_i + \bar{M}_i &\leq M_{0i}, \\ -M_{0i} &\leq \min M_i + \bar{M}_i, \\ \max M_i - \min M_i &\leq 2M_{ei}. \end{aligned}$$

Nierówności (5.6)₁ i (5.6)₂ służą do wyznaczenia granicznego obciążenia, odpowiadającego zniszczeniu przyrostowemu belki (ocena dolnej granicy tego obciążenia). Do wyznaczania granicznego obciążenia przystosowania, odpowiadającego zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego, służy nierówność (5.6)₃, przy czym przy stałym przekroju ($M_{ei} = \text{const}$) wystarczy zastosować ją do przekroju β , w którym wyrażenie $(\max M_i - \min M_i)$ osiąga maksimum.

Warunek (5.6)₃ zastosowany do tego przekroju ma postać

$$(5.7) \quad (\max M_\beta^1 - \min M_\beta^1) P_{pz} = 2M_e.$$

Moment M_e jest to największy sprężysty moment zginający, jaki konstrukcja może przenieść. Przyjmując

$$(5.8) \quad R_s = Q_r,$$

otrzymujemy

$$(5.9) \quad M_e = Q_r W.$$

Zastępując następnie we wzorze (5.9) wskaźnik przekroju W przez wskaźnik oporu plastycznego W_{pl} , czyli wprowadzając $W = cW_{pl}$ oraz podstawiając dalej $Q_r W_{pl} = M_0$, otrzymujemy

$$(5.10) \quad M_e = cM_0.$$

Graniczną siłę przystosowania wskutek zmęczenia niskocyklowego otrzymujemy więc ze wzoru (5.7), po podstawieniu do niego (5.10) w postaci

$$(5.11) \quad P_{pz} = \frac{2c}{\max M_{\beta}^1 - \min M_{\beta}^1} M_0.$$

Wartości tej siły zostały dla różnych α zestawione w tabelicy 2.

Ze względu na to, że o zniszczeniu belki wskutek nieprzystosowania decyduje nie rozpatrywany typ zniszczenia, a zniszczenie przyrostowe belki, ograniczono się jedynie do analizy belki wieloprzęsłowej.

Z tych samych względów, pragnąc wykorzystać istniejące rozwiązania (tablice z [7]), wyznaczono siły P_{pz} , biorąc pod uwagę przekroje β oddalone o $x=0,5L$ oraz $x=0,4L$ od podpory 0, mimo iż extrema funkcji ($\max M_{\beta}^1 - \min M_{\beta}^1$) ściśle nie występują w tych przekrojach.

6. PORÓWNANIE STANÓW GRANICZNYCH NOŚNOŚCI, PRYZSTOSOWANIA I METODY NAPRĘŻEŃ DOPUSZCZALNYCH

W punktach 4 i 5 wyznaczono graniczne obciążenia nośności granicznej i przystosowania. Obciążenia te porównamy z obciążeniem granicznym P_s , odpowiadającym założeniu sprężystego zachowania się konstrukcji.

Jeżeli za granicę sprężystego zachowania się konstrukcji przyjmiemy jak poprzednio Q_r , to obciążenie P_s wyznaczmy z nierówności

$$(6.1) \quad \max |M| P_s \leq M_e,$$

do której na miejsce momentu M_e podstawimy (5.10). Po przekształceniach poszukiwane obciążenie graniczne P_s otrzymamy w postaci

$$(6.2) \quad P_s = \frac{c}{\max |M|} M_0.$$

Obciążenie to dla belek o przekroju dwuteowym oraz liczbie przęseł $n=2$ i $n \geq 3$ zestawiono w tabelicy 3.

Korzystając z wyznaczonych wyżej i zestawionych w tablicach 1, 2 i 3 wartości sił granicznych P_{no} , P_{pp} i P_s , sporządzono wykresy tych sił w zależności od ich rozstawu α (rys. 6). Analiza sporządzonych wykresów prowadzi do następujących wniosków:

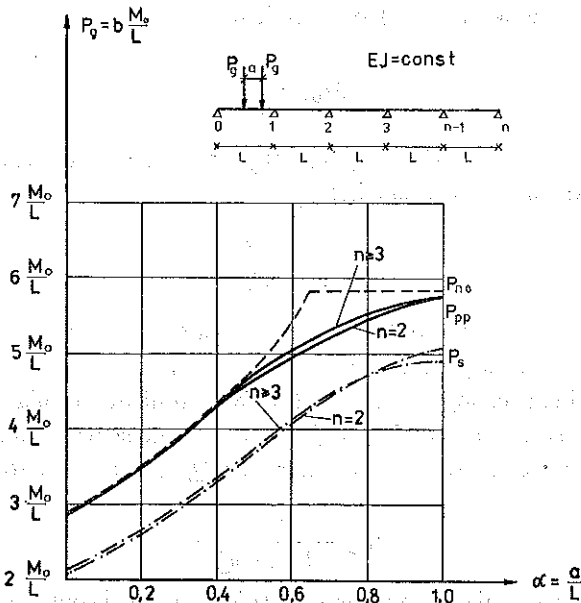
1) Siły graniczne wyznaczone metodą nośności granicznej oraz graniczne siły przystosowania są znacznie większe (od 18% do 45%) od sił granicznych wyznaczonych z warunku naprężeń dopuszczalnych, jeśli oprzeć się na kryterium nieprzekroczenia odkształceń sprężystych. Z tego względu projektowanie metodą naprężeń dopuszczalnych jest nieekonomiczne i to tym bardziej, im rozstaw a sił P jest mniejszy.

2) Dla rozstawu sił P $a \leq 0,5L$ oraz $a \approx L$, ze względu na nieznaczne różnice w wartościach granicznych sił nośności granicznej i przystosowania — można przeprowadzić projektowanie, korzystając z rozwiązań nośności granicznej, jako prostych.

Tablica 3. Graniczne obciążenie P_s wg metody naprężeń dopuszczalnych dla belek o liczbie przęseł $n=2$ i $n \geq 3$, $c=0,85$, $EJ=\text{const}$.

$\alpha = \frac{a}{L}$	Maksymalne bezwzględne wartości momentu zginającego od sił $P=1$ oraz odległości $x\gamma$ od podpory 0 przekroju γ , w którym moment ten występuje				$P_s = \frac{c}{\max M } M_0$	
	x		$\max M$		$n=2$	$n \geq 3$
	$n=2$	$n \geq 3$	$n=2$	$n \geq 3$		
0	0,432 L	0,428 L	0,414 L	0,410 L	2,06 M_0/L	2,08 M_0/L
0,1	0,415 L	0,408 L	0,369 L	0,364 L	2,31 M_0/L	2,34 M_0/L
0,2	0,393 L	0,389 L	0,327 L	0,323 L	2,60 M_0/L	2,63 M_0/L
0,3	0,377 L	0,374 L	0,292 L	0,287 L	2,92 M_0/L	2,96 M_0/L
0,4	0,364 L	0,361 L	0,260 L	0,256 L	3,27 M_0/L	3,32 M_0/L
0,5	0,354 L	0,351 L	0,232 L	0,229 L	3,67 M_0/L	3,72 M_0/L
0,6	0,348 L	0,348 L	0,209 L	0,208 L	4,06 M_0/L	4,09 M_0/L
0,7	0,348 L	0,350 L	0,193 L	0,191 L	4,40 M_0/L	4,45 M_0/L
0,8	1,000 L	1,000 L	0,180 L	0,180 L	4,72 M_0/L	4,72 M_0/L
0,9	1,000 L	1,000 L	0,172 L	0,174 L	4,95 M_0/L	4,88 M_0/L
1,0	1,000 L	1,000 L	0,168 L	0,173 L	5,06 M_0/L	4,92 M_0/L

3) W pozostałym przedziale, to jest dla $0,5L \leq a < L$, należy projektować konstrukcję ze względu na przystosowanie, mimo iż ani polska norma, ani też normy innych krajów nie podają żadnych praktycznych wskazówek na ten temat. Wynika to niewątpliwie z pracochłonności obliczeń metodą przystosowania, jak również



Rys. 6.

z braku możliwości uwzględnienia wpływu obciążeń cyklicznych na nośność konstrukcji przez zastosowanie pewnych współczynników odniesienia do rozwiązań teorii nośności granicznej, bądź metody naprężeń dopuszczalnych.

W przypadku rozpatrywanej belki można byłoby np. dla rozstawu a sił P znajdującego się w przedziale $0,5L \leq a < L$ zmniejszyć wyznaczone na podstawie teorii nośności granicznej obciążenie graniczne w przybliżeniu o 12%. Byłoby to jednak rozwiązanie przybliżone i wcale nie wiemy, czy moglibyśmy je zastosować np. do belek ciągłych o innych charakterystykach geometrycznych, bądź do ram.

Tak więc, aby konstrukcję zaprojektować bezpiecznie a jednocześnie ekonomicznie, należy zaprojektować ją metodą teorii przystosowania.

7. WSKAZÓWKI DO PROJEKTOWANIA

Zaprojektowanie belki poddanej obciążeniu dwóch sił ruchomych P sprowadza się do wyznaczenia jej przekroju.

Jeżeli znany jest współczynnik bezpieczeństwa s , który należy stosować w przyjętej przy projektowaniu teorii, to wskaźnik wytrzymałości szukanego przekroju belki wyznaczymy z następującej zależności, stanowiącej uogólnioną postać wzorów (4.9), (4.10), (5.5) i (6.2):

$$(7.1) \quad P_0 = b \frac{M_0}{L} \geq sP.$$

We wzorze tym P jest działającym obciążeniem, a b współczynnikiem liczbowym zależnym od rozstawu a sił P różnym dla różnych teorii. Współczynnik ten możemy odczytać z wykresów przedstawionych na rys. 6.

Z przekształcenia wzoru (7.1) otrzymujemy

$$(7.2) \quad M_0 \geq \frac{PsL}{b}.$$

Wprowadzając do wzoru (7.2) $M_0 = Q_r W_{pl}$ oraz $W_{pl} = W/c$ otrzymujemy w końcu warunek na wskaźnik wytrzymałości:

$$(7.3) \quad W \geq \frac{cPsL}{bQ_r}.$$

Ten sam wskaźnik można obliczyć na podstawie wzoru uwzględniającego w sposób przybliżony częściową redystrybucję plastyczną. Jest to wzór podany w normie PN-76/B-03200 i oznaczony numerem (23). W celu ujednoczenia kryteriów wytrzymałościowych stosowanych w niniejszej pracy — zamiast wytrzymałości obliczeniowej R należy przyjąć naprężenie dopuszczalne Q_r/s . Prowadzi to do wzoru

$$(7.4) \quad W \geq \frac{2cPsL}{(1+c)bQ_r}.$$

Współczynnik b występujący we wzorze (7.4) jest to rozwiązanie otrzymane w teorii nośności granicznej.

PRZYKŁAD. Wyznaczyć dwuteowy przekrój walcowany pięcioprzęsłowej belki stalowej obciążonej dwiema przesuwającymi się po niej siłami $P=4,900$ kG, gdy rozstaw tych sił wynosi $a_1=0,6$ m lub $a_2=4,0$ m. Rozpiętość przęseł belki $L=6$ m. Współczynnik bezpieczeństwa we wszystkich trzech teoriach $s=1,6$.

Współczynniki b występujące we wzorze (7.1) odczytamy z wykresów przedstawionych na rys. 6. Zestawiono je dla $\alpha_1=a_1/L=0,6/6,0=0,1$ oraz $\alpha_2=a_2/L=4,0/6,0=0,666$ w tablicy 4.

Tablica 4. Współczynniki b odczytane z rys. 6 dla różnych teorii

α	Teoria nośności granicznej	Teoria przystosowania	Teoria naprężeń dopuszczalnych
0,1	3,20	3,15	2,35
0,666	5,80	5,20	4,35

Podstawiając do wzorów (7.3) i (7.4) $c=0,85$ (dwuteowy przekrój walcowany), $Q_r=2500$ kg/cm², P , L i s podane w zadaniu oraz b odczytane dla różnych teorii z wykresów na rys. 6 (do wzoru (7.4) z wykresu odpowiadającego teorii nośności granicznej) otrzymamy wskaźniki wytrzymałości odpowiadające poszczególnym teoriom oraz odpowiadające im pola przekrojów belek. Zestawiono je w tablicy 5.

Tablica 5. Wskaźniki wytrzymałości W_x oraz dobrane przekroje belek wyznaczone wg różnych teorii

α	Teoria nośności granicznej	Teoria przystosowania	Norma PN-76/B-03200	Metoda naprężeń dopuszczalnych
0,1	490 cm ³ I 280	506 cm ³ I 280	544 cm ³ I 280	680 cm ³ I 320
0,666	275 cm ³ I 220	307 cm ³ I 240	296 cm ³ I 240	367 cm ³ I 250

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. P. G. HODGE, *Plastic analysis of structure*, Mc Graw Hill, New York 1959.
2. J. A. KÖNIG, A. SAWCZUK, W. PAPROCKA-GRABCZYŃSKA, *Obliczenie ram i belek na przystosowanie*, Zesz. Probl. Mostostal, 5, 1974.
3. A. SAWCZUK, M. JANAS, J. A. KÖNIG, *Analiza plastyczna konstrukcji*, Ossolineum, Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk 1972.
4. H. BLEICH, *Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes*, Bauingenieur, 19-20, 1932.

5. B. G. NEAL, *The behaviour of framed structures under repeated loading*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 4, 78, 1951.
6. W. T. KOITER, *General theorems for elastic-plastic solids*, Progress in Solid Mechanics, 2, North-Holland, Amsterdam 1960.
7. J. BRYL, *Przykłady obliczeń konstrukcji stalowych, część III, Projektowanie belek podsuwnicowych*, PWN, Poznań 1960.
8. W. PAPROCKA-GARLICKA, *Z zagadnień nośności stalowych belek podsuwnicowych*, Prace IPPT, Warszawa 1975.
9. D. G. EYRE, T. V. GALAMBOS, *Shakedown tests on steel bars and beams*, Proc. ASCE, July 1970.
10. D. G. EYRE, T. V. GALAMBOS, *Deflection analysis for shakedown*, Proc. ASCE, July 1970.

Резюме

ПРИНЦИПЫ И МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СПЛОШНЫХ БАЛОК ПОДВЕРГНУТЫХ ПОДВИЖНЫМ НАГРУЗКАМ

Работа представляет анализ влияния циклических нагрузок на несущую способность стальных многопролетных балок. Приведены принципы определения предельных нагрузок, опираясь на теорию предельной несущей способности, на теорию приспособления, а также на метод допустимых напряжений, определены соответствующие нагрузки и показаны существенные различия, выступающие между ними. Указана необходимость точного анализа нагрузок и способа их приложения к конструкции перед подбором подходящего метода расчетов, а также представлен метод проектирования этих конструкций на основе трех выше перечисленных теорий.

SUMMARY

THE PRINCIPLES AND METHOD OF DESIGNING THE ELASTIC-PLASTIC CONTINUOUS BEAMS SUBJECT TO MOVING LOADS

The paper contains the analysis of the influence of cyclic loads on the carrying capacity of multi-span steel beams. The methods of determining the limit loads are given, the load carrying capacity technique, shake-down theory and allowable stresses principle being used; the corresponding loads are determined, and considerable differences between the individual results are indicated. The necessity is shown of a detailed analysis of loads and the methods of their application before a suitable method of analysis is selected; the method of designing the structures on the basis of the three approaches mentioned above is proposed.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1977 r.