

## TECHNICZNA TEORIA GRUBYCH PŁYT ORTOTROPOWYCH

JERZY KUJAWSKI (BIAŁYSTOK)

W pracy wyprowadzono równania technicznej teorii grubych płyt ortotropowych poddanych działaniu zmiennych w czasie sił powierzchniowych o wszystkich trzech składowych i sił masowych. Pola przemieszczenia i naprężenia opisano za pomocą sześciu funkcji, które wyznaczamy z równań ruchu continuum trójwymiarowego za pomocą zasady prac wirtualnych. Wyprowadzono macierz sztywności skończonego elementu czasoprzestrzennego, co pozwala na ułożenie programu obliczeń na drodze standardowego postępowania. Opracowano przykłady dotyczące płaskiego stanu odkształcenia  $\varepsilon_{22}=0$ , które zweryfikowano metodą elementów skończonych. Przeprowadzona analiza wykazuje, że znane teorie techniczne prowadzą do bardzo dużych błędów w naprężeniach  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta=1, 2$ ) w grubych płytach o krawędziach utwierdzonych lub cienkich, lecz podatnych na poprzeczne odkształcenia. Proponowana teoria wykazuje dość dobrą zgodność z wynikami dokładnymi nawet w płytach o bardzo dużej podatności na poprzeczne odkształcenia.

### 1. WSTĘP

W technice coraz częściej stosuje się dźwigary płytowe wykonane z materiałów anizotropowych wykazujących dużą podatność na poprzeczne odkształcenia postaciowe i normalne. Ich moduł Younga w płaszczyźnie płyty przewyższa moduł Younga w kierunku prostopadłym niejednokrotnie 15 razy, a moduł ścinania aż nawet 100 razy [1 i 2]. Analizę płyt takiego typu należy przeprowadzać za pomocą teorii uwzględniającej pełne tensory stanów naprężenia i odkształcenia [3].

Opracowaną przez E. REISSNERA [4 i 5] uściśloną teorię płyt izotropowych uogólnili na płyty anizotropowe K. GIRKMANN i R. BEER [6], J. MOSSAKOWSKI [7], S. G. LECHNICKI [8], S. A. AMBARCUMIAN [9] i Z. KĄCZKOWSKI [10]. W ostatnim trzydziestolecu literatura dotycząca uściślonych teorii płyt uległa znacznemu zwiększeniu. Wymienimy kilka prac oryginalnych, w których można znaleźć obszerne spisy literatury dotyczącej tego problemu [11–13].

W pracach [14 i 15] przedstawiono kinematyczną teorię uściślonego obliczania grubych tarcz ortotropowych, którą w pracy [16] uogólniono na stan płytowy. Teorie te pozwalają na spełnienie wszystkich związków liniowej teorii sprężystości dla ortotropowego ciała trójwymiarowego z wyjątkiem równań równowagi spełnianych w sensie całkowym. Podstawowy układ równań różniczkowych pozwala spełnić po cztery warunki brzegowe na poboczniczy walca ograniczającej tarczę lub płytę.

W płytach o krawędziach utwierdzonych i dużej podatności na poprzeczne odkształcenia różnice między wynikami otrzymanymi z teorii przedstawionej w pracy [16] a wynikami teorii Ambarcumiana zakładającej  $\varepsilon_{33}=0$  są bardzo duże. Fakt

ten stawia pod znakiem zapytania zastosowanie wymienionych teorii technicznych do analizy płyt o dużej podatności na poprzeczne odkształcenia.

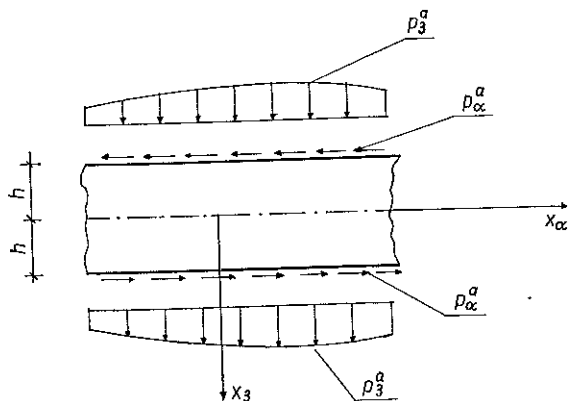
Trójwymiarowe rozwiązania w płytach tego typu są możliwe jedynie za pomocą metod numerycznych. Prowadzi to w zagadnieniach praktycznych do układów bardzo wielu równań, co poważnie ogranicza zastosowanie tych metod w praktyce (por. [17], str. 99).

Z powyższych względów w pracy niniejszej podjęto próbę zbudowania znacznie dokładniejszej teorii technicznej, która, jak wykazują przykłady zweryfikowane metodą elementów skończonych, pozwala na otrzymanie dość dobrej zbieżności z rozwiązaniami dokładnymi nawet w płytach o bardzo dużej podatności na poprzeczne odkształcenia.

Równania podstawowe wyprowadzono w zapisie macierzowym oraz podano macierz sztywności skończonego elementu czasoprzestrzennego, co pozwala na łatwą komputeryzację obliczeń.

## 2. PODSTAWOWE ZWIĄZKI TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Rozpatrzmy w ramach liniowej teorii sprężystości płytę wykonaną z materiału jednorodnego, ortotropowego i liniowo sprężystego. Przyjmujemy, że osie  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) kartezjańskiego układu współrzędnych leżą w płaszczyźnie środkowej płyty, a płaszczyzny ograniczające płytę mają równania  $x_3 = \pm h$ .



Rys. 1.

Stan naprężenia i odkształcenia w płycie jest opisany równaniami Cauchy'ego

$$(2.1) \quad \epsilon = [\partial_1 u_1, \partial_2 u_2, \partial_3 u_3, \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2, \partial_3 u_1 + \partial_1 u_3, \partial_3 u_2 + \partial_2 u_3]^T,$$

równaniami konstytutywnymi

$$(2.2) \quad \sigma = D\epsilon$$

oraz równaniami ruchu

$$(2.3) \quad \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia:

$$(2.4) \quad \sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}]^T, \quad D = \text{diag} [D_f, D_s],$$

$$D_f = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad D_s = \text{diag} [G_{13}, G_{23}],$$

$$\partial_i (i=1, 2, 3) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

We wzorach tych  $c_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) oraz  $G_{12}$  i  $G_{\alpha 3}$  ( $\alpha=1, 2$ ) są współczynnikami sprężystości materiału.

Obciążenie płyty stanowią siły przyłożone na jej powierzchniach zewnętrznych  $x_3 = \pm h$

$$(2.5) \quad \sigma_{\alpha 3} = p_\alpha^a, \quad \sigma_{33} = p_3^a$$

oraz siły masowe

$$(2.6) \quad X_\alpha = 0, \quad X_3 = X_3(x_i, t).$$

W warunkach brzegowych na pobocznicę walca ograniczającej płytę mogą występować w różnych kombinacjach trzy wielkości geometryczne i trzy statyczne

$$(2.7) \quad \begin{Bmatrix} u_n(x_i, t) \\ u_s(x_i, t) \\ u_3(x_i, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_n(x_i, t) \\ \hat{u}_s(x_i, t) \\ \hat{u}_3(x_i, t) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{nm}(x_i, t) \\ \sigma_{ns}(x_i, t) \\ \sigma_{n3}(x_i, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{nm}(x_i, t) \\ \hat{\sigma}_{ns}(x_i, t) \\ \hat{\sigma}_{n3}(x_i, t) \end{Bmatrix},$$

$x_i \in \Omega$ , przy czym  $\Omega$  oznacza powierzchnię brzegową płyty. Indeksami  $n$  i  $s$  oznaczono wielkości statyczne i geometryczne w kierunku normalnej i stycznej do brzegu płyty.

Dynamiczny problem rozpatrywanego zagadnienia uzupełniają warunki początkowe.

W celu możliwie dokładnego spełnienia warunków brzegowych na pobocznicę walca ograniczającej płytę — oddziaływania brzegowe aproksymujemy funkcjami o postaci

$$(2.8) \quad \begin{Bmatrix} \hat{u}_n \\ \hat{u}_s \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (h\zeta \hat{\phi}_n^0) \\ (h\zeta \hat{\phi}_s^0) \\ \hat{w}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (f \hat{\phi}_n^1) \\ (f \hat{\phi}_s^1) \\ (g \hat{w}^1) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{nm} \\ \hat{\sigma}_{ns} \\ \hat{\sigma}_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (h\zeta \hat{\sigma}_{nm}^0) \\ (h\zeta \hat{\sigma}_{ns}^0) \\ \hat{\sigma}_{n3}^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (f \hat{\sigma}_{nm}^1) \\ (f \hat{\sigma}_{ns}^1) \\ (g \hat{\sigma}_{n3}^1) \end{Bmatrix},$$

gdzie  $f = h\zeta \left(1 - \frac{5}{3}\zeta^2\right)$ ,  $g = 1 - 3\zeta^2$ ,  $\zeta = z/h$ ,  $z = x_3$ .

A zatem

$$(2.9) \quad \hat{A} \approx A = h\zeta \hat{A}^0 + f \hat{A}^1, \quad \hat{S} \approx S = S^0 + g S^1,$$

gdzie  $A = \hat{\sigma}_{nm}, \hat{\sigma}_{ns}, \hat{u}_n, \hat{u}_s$  są antysymetrycznymi, a  $S = \hat{\sigma}_{n3}, \hat{u}_3$ , symetrycznymi wielkościami brzegowymi.

Nieznane parametry brzegowe  $A^k$  i  $S^k$  ( $k=0, 1$ ) wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów:

$$(2.10) \quad \int_{-h}^h (\hat{A}-A)^2 dz = \text{minimum}, \quad \int_{-h}^h (\hat{S}-S)^2 dz = \text{minimum}.$$

Stąd po podstawieniu (2.7) i (2.8) oraz wykorzystaniu faktu, że

$$(2.11) \quad \int_{-h}^h \{1, z^2, f^2, g^2\} dz = \left\{ 2h, \frac{2}{3}h^3, \frac{8}{63}h^3, \frac{8}{5}h \right\},$$

$$(2.12) \quad \int_{-h}^h \{zf, 1g\} dz = \{0, 0\},$$

otrzymujemy

$$(2.13) \quad (\hat{\sigma}_{nn}^1, \hat{\sigma}_{ns}^0, \hat{\phi}_n^0, \hat{\phi}_s^0) = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h (\hat{\sigma}_{nn}, \hat{\sigma}_{ns}, \hat{u}_n, \hat{u}_s) z dz,$$

$$(\hat{\sigma}_{nn}^1, \hat{\sigma}_{ns}^1, \hat{\phi}_n^1, \hat{\phi}_s^1) = \frac{63}{8h^2} \int_{-h}^h (\hat{\sigma}_{nn}, \hat{\sigma}_{ns}, \hat{u}_n, \hat{u}_s) f dz;$$

$$(2.14) \quad (\hat{\sigma}_{n3}, \hat{w}_0) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (\hat{\sigma}_{n3}, \hat{u}_3) dz, \quad (\hat{\sigma}_{n3}^1, \hat{w}^1) = \frac{5}{8h} \int_{-h}^h (\hat{\sigma}_{n3}, \hat{u}_3) g dz,$$

### 3. RÓWNANIA PODSTAWOWE

#### 3.1. Pola przemieszczenia i naprężenia

$$(3.1) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\zeta\varphi_1^0 \\ h\zeta\varphi_2^0 \\ w^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f\varphi_1^1 \\ f\varphi_2^1 \\ gw^1 \end{pmatrix},$$

gdzie  $\varphi_\alpha^k$  i  $w^k$  ( $k=0, 1$ ) są nieznanymi funkcjami zmiennych  $x_\alpha$ ,

$$f = h\zeta \left( 1 - \frac{5}{3}\zeta^2 \right), \quad g = 1 - 3\zeta^2.$$

Korzystając z równań (2.1) i (3.1) otrzymujemy pole odkształcenia:

$$(3.2) \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} h\zeta & \mathbf{I}_4 & 0 \\ 0 & & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^0 + \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^+) + \begin{bmatrix} f & \mathbf{I}_4 & 0 \\ 0 & & g\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^1,$$

w którym

$$\begin{aligned}
 \bar{\epsilon}^0 &= \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & 1 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \\ w^0 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^0 \bar{\mathbf{u}}^0, \\
 \bar{\epsilon}^+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{h^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi_1^1 \\ \varphi_2^1 \\ w^1 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^+ \bar{\mathbf{u}}^1, \\
 \bar{\epsilon}^1 &= \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi_1^1 \\ \varphi_2^1 \\ w^1 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^1 \bar{\mathbf{u}}^1,
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

przy czym  $\mathbf{I}_4$  jest macierzą jednostkową o wymiarze  $4 \times 4$  a  $\mathbf{I}_2$  jest analogiczną o wymiarze  $2 \times 2$ .

Z równań (2.2) i (3.2) wynika pole naprężenia

$$\sigma = \mathbf{D} \left( \begin{bmatrix} h\zeta & \mathbf{I}_4 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} (\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}^+) + \begin{bmatrix} f & \mathbf{I}_4 & 0 \\ 0 & g & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \bar{\epsilon}^1 \right).
 \tag{3.4}$$

### 3.2. Równania ruchu płyty. Siły wewnętrzne

W pracy [16] funkcje  $\varphi_\alpha^1$  i  $w^1$  wyznaczono z warunku, aby założone pole przemieszczania (3.1) spełniało warunki brzegowe (2.5).

Pozostałe trzy funkcje wyznaczono z równań równowagi płyty. Sposób ten prowadzi do niesymetrycznych operatorów różniczkowych  $L_{\alpha 3} \neq L_{3\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) w podstawowym układzie równań różniczkowych.

Fakt ten utrudnia korzystanie z metody elementów skończonych ze względu na niesymetryczną budowę macierzy sztywności elementu oraz prowadzi do niedokładnych wyników dla płyt o dużej podatności na poprzeczne odkształcenia. W pracy niniejszej wszystkie nieznanne funkcje (3.1) wyznaczymy z równań równowagi dynamicznej continuum trójwymiarowego (2.3). Równania te mnożymy przez przemieszczenia wirtualne płyty  $\delta u_i$ :

$$\int_t \int_V \int (\sigma_{ij,j} + X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV dt = 0.
 \tag{3.5}$$

Stąd po podstawieniu (3.1) i (3.4) i scałkowaniu względem grubości płyty otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int_t \int_A \left[ (M_{\alpha\beta,\beta}^0 - Q_\alpha^0 + M_{\alpha t,t}^0 + 2hp_\alpha^0) \delta \varphi_\alpha^0 + \left( M_{\alpha\beta,\beta}^1 + \frac{2}{3} Q_\alpha^0 - \frac{5}{3} Q_\alpha^1 + M_{\alpha t,t}^1 + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{4}{3} hp_\alpha^1 \right) \delta \varphi_\alpha^1 + (Q_{\alpha,\alpha}^0 + Q_{t,t}^0 + 2p_3^0 + 2hX_3^0) \delta w^0 + \right. \\
 \left. + \left( Q_{\alpha,\alpha}^1 + \frac{6}{h^2} \bar{\sigma}_{33}^0 + Q_{t,t}^1 - 4p_3^1 + 2hX_3^1 \right) \delta w^1 \right] dA dt = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

gdzie

$$(3.7) \quad \begin{Bmatrix} M_{\alpha\beta}^0 \\ M_{\alpha\beta}^1 \end{Bmatrix} = \int_{-h}^h \sigma_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} z \\ f \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} Q_\alpha^0 \\ Q_\alpha^1 \end{Bmatrix} = \int_{-h}^h \sigma_{\alpha 3} \begin{Bmatrix} 1 \\ g \end{Bmatrix} dz,$$

$$(3.8) \quad \bar{\sigma}_{33}^0 = \int_{-h}^h \sigma_{33} z dz, \quad \begin{Bmatrix} X_3^0 \\ X_3^1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h X_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ g \end{Bmatrix} dz,$$

$$(3.9) \quad \begin{Bmatrix} M_{\alpha t}^0 \\ M_{\alpha t}^1 \end{Bmatrix} = - \int_{-h}^h \rho \dot{u}_\alpha \begin{Bmatrix} z \\ f \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} Q_t^0 \\ Q_t^1 \end{Bmatrix} = - \int_{-h}^h \rho \dot{u}_\alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ g \end{Bmatrix} dz.$$

Równanie (3.6) powinno być spełnione dla dowolnych wartości  $\bar{\delta}\varphi_\alpha^{k-}$  i  $\bar{\delta}u^k$  ( $k=0, 1$ ), stąd wynika następujące sześć równań ruchu grubej płyty:

$$(3.10) \quad M_{\alpha\beta, \beta}^0 - Q_\alpha^0 + M_{\alpha t, t}^0 + 2hp_\alpha^a = 0, \quad Q_{\alpha, \alpha}^0 + Q_{t, t}^0 + 2p_3^a + 2hX_3^0 = 0;$$

$$(3.11) \quad M_{\alpha\beta, \beta}^1 + \frac{2}{3}Q_\alpha^0 - \frac{5}{3}Q_\alpha^1 + M_{\alpha t, t}^1 - \frac{4}{3}hp_\alpha^a = 0,$$

$$Q_{\alpha, \alpha}^1 + \frac{6}{h^2}\bar{\sigma}_{33}^0 + Q_{t, t}^1 - 4p_3^a + 2hX_3^1 = 0.$$

Równania (3.10) są klasycznymi równaniami ruchu płyty, natomiast (3.11) są równaniami równowagi dynamicznej sił wewnętrznych i inercyjnych wyższego rzędu.

Na podstawie (3.4), (3.7) i (3.8)<sub>1</sub>, po uwzględnieniu (2.11) i (2.12) otrzymujemy wzory na siły wewnętrzne, które zapisujemy w zwięzłej postaci macierzowej:

$$(3.12) \quad \bar{\sigma}^0 = \mathbf{D}^0 (\bar{\epsilon}^0 + \bar{\epsilon}^+), \quad \bar{\sigma}^1 = \mathbf{D}^1 \bar{\epsilon}^1,$$

gdzie

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}^0 &= [M_{11}^0, M_{22}^0, \bar{\sigma}_{33}^0, M_{12}^0, Q_1^0, Q_2^0]^T, \\ \bar{\sigma}^1 &= [M_{11}^1, M_{22}^1, \bar{\sigma}_{33}^1, M_{12}^1, Q_1^1, Q_2^1]^T, \\ \mathbf{D}^0 &= \text{diag} [\bar{\mathbf{D}}_f, \bar{\mathbf{D}}_s], \quad \mathbf{D}^1 = \text{diag} \left[ \frac{4}{21} \bar{\mathbf{D}}_f, \frac{4}{5} \bar{\mathbf{D}}_s \right], \\ \bar{\mathbf{D}}_f &= \frac{2}{3} h^3 \mathbf{D}_f, \quad \bar{\mathbf{D}}_s = 2h \mathbf{D}_s. \end{aligned}$$

Wykonując całkowanie względem grubości płyty zgodnie ze wzorami (3.9) otrzymujemy

$$(3.14) \quad \bar{\sigma}_t^0 = \mathbf{D}_t^0 \bar{\epsilon}_t^0, \quad \bar{\sigma}_t^1 = \mathbf{D}_t^1 \bar{\epsilon}_t^1,$$

gdzie

$$(3.15) \quad \bar{\sigma}_t^k = [M_{1t}^k, M_{2t}^k, 0, 0, Q_t^k, 0]^T, \quad k=0, 1;$$

$$\bar{\epsilon}_t^k = \begin{bmatrix} \partial_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^k \\ \varphi_2^k \\ w^k \end{bmatrix} = \mathbf{L}_t \bar{\mathbf{u}}^k, \quad k=0, 1,$$

$$\mathbf{D}_t^0 = \text{diag} [K, K, 0, 0, H, 0],$$

$$\mathbf{D}_t^1 = \text{diag} \left[ \frac{4}{21} K, \frac{4}{21} K, 0, 0, \frac{4}{5} H, 0 \right],$$

$$K = -\frac{2}{3} h^3 \rho, \quad H = -2h\rho.$$

(3.16)

3.3. Wyznaczanie naprężeń  $\sigma_{13}$  ( $i=1, 2, 3$ )

Naprężenia  $\sigma_{13}$  wyznaczone z równań konstytutywnych (3.4) nie spełniają warunków brzegowych (2.5) na płaszczyznach granicznych płyty. Dokładniejszą wartość tych naprężeń otrzymamy z równań ruchu płyty (2.3).

Z równań równowagi dynamicznej sił poziomych wyznaczamy

$$(3.17) \quad \sigma_{\alpha\beta, \beta} + \sigma_{\alpha 3, 3} = \rho \ddot{u}_\alpha \Rightarrow \sigma'_{\alpha 3} = - \int (\sigma_{\alpha\beta, \beta} - \rho \ddot{u}_\alpha) dz + C(x_\alpha).$$

Po podstawieniu  $u_\alpha$  i  $\sigma_{\alpha\beta}$  określonych wzorami (3.1) i (3.4) oraz wyznaczeniu stałej całkowania z warunku brzegowego (2.5)<sub>1</sub> otrzymujemy

$$(3.18) \quad \sigma_{\alpha 3} = p_\alpha^a + \frac{1}{2} h^2 (1 - \zeta^2) (\sigma_{\alpha\beta, \beta}^0 - \rho \ddot{\varphi}_\alpha^0) + \frac{h^2}{12} (1 - 6\zeta^2 + 5\zeta^4) (\sigma_{\alpha\beta, \beta}^1 - \rho \ddot{\varphi}_\alpha^1),$$

przy czym

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{3}{2h^3} M_{\alpha\beta}^0, \quad \sigma_{\alpha\beta}^1 = \frac{63}{8h^3} M_{\alpha\beta}^1.$$

Z równań równowagi momentów (3.10) i (3.11) wynikają wzory następujące:

$$(3.19) \quad (\sigma_{\alpha\beta, \beta}^0 - \rho \ddot{\varphi}_\alpha^0) = \frac{3}{2h^3} (Q_\alpha^0 - 2hp_\alpha^a),$$

$$(\sigma_{\alpha\beta, \beta}^1 - \rho \ddot{\varphi}_\alpha^1) = \frac{63}{8h^3} \left( -\frac{2}{3} Q_\alpha^0 + \frac{5}{3} Q_\alpha^1 + \frac{4}{3} hp_\alpha^a \right),$$

które wykorzystane do (3.18) określają naprężenia  $\sigma'_{\alpha 3}$  w następującej postaci:

$$(3.20) \quad \sigma'_{\alpha 3} = p_\alpha^a + \frac{3}{4h} (1 - \zeta^2) (Q_\alpha^0 - 2hp_\alpha^a) + \frac{7}{16h} (1 - 6\zeta^2 + 5\zeta^4) \left( \frac{5}{2} Q_\alpha^1 - Q_\alpha^0 + 2hp_\alpha^a \right).$$

Całkując naprężenia  $\sigma'_{\alpha 3}$  względem płyty stwierdzamy, że zachodzi zależność

$$(3.21) \quad \int_{-h}^h \sigma_{\alpha 3} dz = \int_{-h}^h \sigma'_{\alpha 3} dz = Q_\alpha^0.$$

W analogiczny sposób wyznaczmy naprężenia  $\sigma'_{33}$ . Z równania równowagi dynamicznej sił pionowych otrzymujemy

$$(3.22) \quad \sigma_{33, 3} + \sigma_{33, \alpha} + X_3 = \rho \ddot{u}_3 \Rightarrow \sigma'_{33} = - \int (\sigma_{33, \alpha} + X_3 - \rho \ddot{u}_3) dz + C_1(x_\alpha).$$

Stała  $C_1(x_\alpha)$  ze względu na antysymetrię naprężeń  $\sigma_{33}$  jest równa zero.

Po uwzględnieniu (3.1), (3.4) i (3.8)<sub>2</sub> wzór (3.22)<sub>2</sub> doprowadzamy do postaci

$$(3.23) \quad \sigma_{33} = -h\zeta(\sigma_{\alpha 3, \alpha}^0 - \rho \ddot{w}^0 + X_3^0) - h\zeta(1 - \zeta^2)(\sigma_{\alpha 3, \alpha}^1 - \rho \ddot{w}^1 + X_3^1).$$

Jeśli w (3.23) uwzględnimy następujące związki

$$(3.24) \quad (\sigma_{\alpha 3, \alpha}^0 - \rho \ddot{w}^0 + X_3^0) = -h^{-1} p_3^0, \quad (\sigma_{\alpha 3, \alpha}^1 - \rho \ddot{w}^1 + X_3^1) = -\frac{5}{8h} \left( \frac{6}{h^2} \bar{\sigma}_{33}^0 - 4p_3^0 \right),$$

które wynikają z równań równowagi dynamicznej sił pionowych (3.10) i (3.11), to otrzymamy

$$(3.25) \quad \sigma'_{33} = \zeta p_3^0 - \frac{5}{2} (1 - \zeta^2) \zeta (p_3^0 - h \sigma_{33}^0),$$

gdzie

$$(\sigma_{\alpha 3}^0, \sigma_{\alpha 3}^1, \sigma_{33}^0) = \left( \frac{1}{2h} Q_\alpha^0, \frac{5}{8h} Q_\alpha^1, \frac{3}{2h^3} \bar{\sigma}_{33}^0 \right).$$

Można wykazać, że zachodzi tożsamość

$$(3.26) \quad \int_{-h}^h (\sigma_{33} - \sigma'_{33}) \varepsilon_{33} dz = 0.$$

Stąd wynika, że praca naprężeń  $\sigma_{33}$  otrzymanych z uogólnionego prawa Hooke'a na odkształceniu poprzecznym  $\varepsilon_{33} = -\frac{6}{h} \zeta w^1$  jest równa analogicznej pracy naprężenia  $\sigma'_{33}$ .

#### 3.4. Układ równań różniczkowych

Układ równań różniczkowych możemy otrzymać korzystając z równań ruchu płyty (3.10) i (3.11). Z uwagi na fakt, że praktyczne obliczenia są możliwe jedynie za pomocą metod numerycznych, układ ten wyprowadzimy w inny sposób, który pozwala na bezpośrednie przejście do obliczania grubych płyt metodą elementów skończonych.

Całkując przez części równanie (3.6), otrzymujemy następujące równanie zapisane w postaci macierzowej:

$$(3.27) \quad \int_t^s \int_A [(\delta \bar{\mathbf{u}}^0)^T \mathbf{N}^0 + (\delta \bar{\mathbf{u}}^1)^T \mathbf{N}^1] dS dt + \int_A [(\delta \bar{\mathbf{u}}^0)^T \mathbf{N}_t^0 + (\delta \bar{\mathbf{u}}^1)^T \mathbf{N}_t^1]_t^s dA + \\ + \int_t^s \int_A [(\delta \bar{\mathbf{u}}^0)^T (\mathbf{p}_0 + \mathbf{X}^0) + (\delta \bar{\mathbf{u}}^1)^T (\mathbf{p}^1 + \mathbf{X}^1)] dA dt = \\ = \int_t^s \int_A [(\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 + \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1)^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 + (\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1)^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}^1 + (\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^0)^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t^0 + (\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^1)^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t^1] dA dt,$$



gdzie

$$(3.28) \quad \begin{aligned} N^k &= [M_{nn}^k, M_{ns}^k, Q_n^k]^T, & N_t^k &= [M_{1t}^k, M_{2t}^k, Q_t^k]^T, \\ X^k &= 2h [0, 0, X_3^k]^T, & k &= 0, 1 \\ p^0 &= 2 [hp_1^a, hp_2^a, p_3^a]^T, & p^1 &= -\frac{4}{3} [hp_1^a, hp_2^a, 3p_3^a]^T. \end{aligned}$$

Lewa strona równania (3.27) przedstawia czteropracę wirtualną obciążeń zewnętrznych i sił masowych, natomiast prawa strona czteropracę wirtualną sił wewnętrznych [18 i 19]. Dwie pierwsze całki równania (3.27) tworzą zespół warunków brzegowych i początkowych zagadnienia. W celu wyprowadzenia układu równań różniczkowych zajmiemy się dwiema pozostałymi całkami.

Na podstawie (3.3) i (3.15) otrzymujemy

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \bar{\delta}\epsilon^0 &= L^0 (\delta\bar{u}^0), & \bar{\delta}\epsilon^+ &= L^+ (\delta\bar{u}^+), & \bar{\delta}\epsilon^1 &= L^1 (\delta\bar{u}^1), \\ \bar{\delta}\epsilon_t^0 &= L_t (\delta\bar{u}^0), & \bar{\delta}\epsilon_t^1 &= L_t (\delta\bar{u}^1). \end{aligned}$$

Wielkości te podstawione do prawej strony równania (3.27) pozwalają napisać czteropracę wirtualną sił wewnętrznych, masowych i powierzchniowych w postaci następującej:

$$(3.30) \quad \int \int_A \{ [L^0 (\delta\bar{u}^0) + L^+ (\delta\bar{u}^+)]^T D_0 (L^0 \bar{u}^0 + L^+ \bar{u}^+) + [L^1 (\delta\bar{u}^1)]^T D^1 L^1 \bar{u}^1 + \\ + [L_t^0 (\delta\bar{u}^0)]^T D_t^0 \bar{u}^0 + [L_t^1 (\delta\bar{u}^1)]^T D_t^1 L_t^1 \bar{u}^1 - (\delta\bar{u}^0)^T (p^0 + X^0) + \\ - (\delta\bar{u}^1)^T (p^1 + X^1) \} dA dt = 0.$$

Po przekształceniu otrzymujemy równanie

$$(3.31) \quad \int \int_A \{ (\delta\bar{u}^0)^T [(L^0)^T D^0 (L^0 \bar{u}^0 + L^+ \bar{u}^+) + L_t^T D_t^0 L_t \bar{u}^0 - (p^0 + X^0)] + \\ + (\delta\bar{u}^1)^T [(L^+)^T D^0 (L^0 \bar{u}^0 + L^+ \bar{u}^+) + (L^1)^T D^1 L^1 \bar{u}^1 + L_t^T D_t^1 L_t \bar{u}^1 - (p^1 + X^1)] \} dA dt = 0,$$

stąd ze względu na dowolność przemieszczeń wirtualnych  $\delta\bar{u}^k$  ( $k=0, 1$ ) wynika układ równań różniczkowych w zwięzłej postaci macierzowej:

$$(3.32) \quad \begin{bmatrix} (L^0)^T D^0 L^0 + L_t^T D_t^0 L_t, & (L^0)^T D^0 L^+ \\ (L^+)^T D^0 L^0, & (L^+)^T D^0 L^+ + (L^1)^T D^1 L^1 + L_t^T D_t^1 L_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}^0 \\ \bar{u}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p^0 + X^0 \\ p^1 + X^1 \end{bmatrix} = 0,$$

gdzie  $\bar{u}^k = [\varphi_1^k, \varphi_2^k, w^k]$ .

Wykonując mnożenie operatorowe powyższych macierzy, układ równań różniczkowych napiszemy w następującej formie:

$$(3.33) \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}^0 \\ \bar{u}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p^0 + X^0 \\ p^1 + X^1 \end{bmatrix} = 0.$$

Podmacierze  $A_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta=1, 2$ ) układu równań (3.33) mają budowę następującą:

$$(3.34) \quad A_{11} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = A_{21}^T = \begin{bmatrix} L_{14} & L_{15} & L_{16} \\ L_{24} & L_{25} & L_{26} \\ L_{34} & L_{35} & L_{36} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} L_{41} & L_{45} & L_{46} \\ L_{54} & L_{55} & L_{56} \\ L_{64} & L_{65} & L_{66} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \bar{c}_{11} \partial_1^2 + \bar{G}_{12} \partial_2^2 - S_1 + K \partial_t^2, & L_{12} &= L_{21} = (\bar{c}_{12} + \bar{G}_{12}) \partial_{12}^2, \\
 L_{13} &= L_{31} = -S_1 \partial_1, & L_{14} &= L_{41} = \frac{2}{3} S_1, & L_{15} &= L_{51} = 0, \\
 L_{16} &= L_{61} = -\frac{6}{h^2} \bar{c}_{13} \partial_1, \\
 L_{22} &= \bar{G}_{12} \partial_1^2 + \bar{c}_{12} \partial_2^2 - S_2 + K \partial_t^2, & L_{23} &= L_{32} = -S_2 \partial_2, \\
 L_{24} &= L_{42} = 0, & L_{25} &= L_{52} = \frac{2}{3} S_2, & L_{26} &= L_{62} = -\frac{6}{h^2} \bar{c}_{23} \partial_2, \\
 L_{33} &= -(S_1 \partial_1^2 + S_2 \partial_2^2) - H \partial_t^2, & L_{34} &= L_{43} = \frac{2}{3} S_1 \partial_1, \\
 (3.25) \quad L_{35} &= L_{53} = \frac{2}{3} S_2 \partial_2, & L_{36} &= L_{63} = 0, \\
 L_{44} &= \frac{4}{21} (\bar{c}_{11} \partial_1^2 + \bar{G}_{21} \partial_2^2) - \frac{24}{9} S_1 + \frac{4}{21} K \partial_t^2, \\
 L_{45} &= L_{54} = \frac{4}{21} (\bar{c}_{12} + \bar{G}_{12}) \partial_{12}^2, & L_{46} &= L_{64} = -\frac{4}{3} S_1 \partial_1, \\
 L_{55} &= \frac{4}{21} (\bar{G}_{12} \partial_1^2 + \bar{c}_{22} \partial_2^2) - \frac{24}{9} S_2 + \frac{4}{21} K \partial_t^2, & L_{56} &= L_{65} = -\frac{4}{3} S_2 \partial_2, \\
 L_{66} &= -\frac{4}{5} (S_1 \partial_1^2 + S_2 \partial_2^2) + \frac{36}{h^4} \bar{c}_{33} - \frac{4}{5} H \partial_t^2, \\
 \bar{c}_{ij} &= \frac{2}{3} h^3 c_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), & \bar{G}_{12} &= \frac{2}{3} h^3 G_{12}, & S_\alpha &= 2hG_{\alpha 3} \quad (\alpha = 1, 2).
 \end{aligned}$$

Jest to uwikłany układ równań różniczkowych cząstkowych dwunastego rzędu. Rozwiązanie układu najwygodniej jest znaleźć numerycznie, na przykład metodą elementów skończonych.

Przy wyprowadzeniu powyższych operatorów różniczkowych we wszystkich macierzach transponowanych układu (3.32) przyjęto znak minus przed pochodnymi  $\partial_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) i  $\partial_t$ , co wynika z przekształcenia GREENA [20].

Układ równań ruchu płyty (3.10) i (3.11) oraz układ równań różniczkowych (3.32) możemy również otrzymać korzystając z zasady HAMILTONA [21].

### 3.5. Warunki brzegowe i początkowe

Dwie pierwsze całki równania (3.27) pozwalają nam określić naturalne warunki brzegowe i początkowe.

Jednorodne warunki brzegowe statyczne i geometryczne mają postać

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad \mathbf{N}^0 &= [M_{nn}^0, M_{ns}^0, Q_n^0]^T = 0, & \mathbf{N}^1 &= [M_{nn}^1, M_{ns}^1, Q_n^1]^T = 0, \\
 \bar{\mathbf{u}}^0 &= [\varphi_n^0, \varphi_s^0, w^0]^T = 0, & \bar{\mathbf{u}}^1 &= [\varphi_n^1, \varphi_s^1, w^1]^T = 0.
 \end{aligned}$$

Warunki początkowe formułujemy następująco: w chwili  $t=t_0$  mamy określone pole przemieszczeń i pole prędkości przemieszczeń, co zapisujemy w następującej postaci:

$$(3.37) \quad \mathbf{u}^0 = \begin{Bmatrix} \varphi_1^0(x_\alpha, t_0) \\ \varphi_2^0(x_\alpha, t_0) \\ w^0(x_\alpha, t_0) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^1 = \begin{Bmatrix} \varphi_1^1(x_\alpha, t_0) \\ \varphi_2^1(x_\alpha, t_0) \\ w^1(x_\alpha, t_0) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_t^0 = \begin{Bmatrix} M_{1t}^0(x_\alpha, t_0) \\ M_{2t}^0(x_\alpha, t_0) \\ Q_t^0(x_\alpha, t_0) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N}_t^1 = \begin{Bmatrix} M_{1t}^1(x_\alpha, t_0) \\ M_{2t}^1(x_\alpha, t_0) \\ Q_t^1(x_\alpha, t_0) \end{Bmatrix}.$$

Jeśli w chwili  $t=t_0$  płyta znajdowała się w stanie spoczynku, to warunki początkowe przyjmują postać

$$(3.38) \quad \mathbf{N}_t^0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_t^1 = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{u}}^1 = \mathbf{0}.$$

Jeśli na powierzchni brzegowej płyty dane są przemieszczenia lub naprężenia (2.7), to korzystając ze wzorów (2.8), (2.13) i (2.14) niejednorodne warunki brzegowe wyrazimy równaniami

$$(3.39) \quad \mathbf{N}^0 = \hat{\mathbf{N}}^0, \quad \mathbf{N}^1 = \hat{\mathbf{N}}^1, \quad \bar{\mathbf{u}}^0 = \hat{\mathbf{u}}^0, \quad \bar{\mathbf{u}}^1 = \hat{\mathbf{u}}^1,$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{N}}^0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} h^3 \hat{\sigma}_{nn}^0, & \frac{2}{3} h^3 \hat{\sigma}_{ns}^0, & 2h \hat{\sigma}_{n3}^0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\hat{\mathbf{N}}^1 = \begin{bmatrix} \frac{8}{63} h^3 \hat{\sigma}_{nn}^1, & \frac{8}{63} h^3 \hat{\sigma}_{ns}^1, & \frac{8}{5} h \hat{\sigma}_{n3}^1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\hat{\mathbf{u}}^k = [\hat{\phi}_n^k, \hat{\phi}_s^k, \hat{w}^k]^T, \quad k=0, 1.$$

Ze względu na założone pole przemieszczeń (3.1) otrzymaliśmy układ równań różniczkowych dwunastego rzędu. Pozwala to spełnić po sześć warunków brzegowych na pobocznicę walca ograniczającej płytę.

Na nieobciążonej swobodnej powierzchni brzegowej jednorodne warunki brzegowe określone równaniami (3.36)<sub>1, 2</sub> są czysto statyczne. Jeśli brzeg jest całkowicie utwierdzony, to mamy czysto geometryczne jednorodne warunki brzegowe (3.36)<sub>3, 4</sub>. W tych przypadkach dla obranego pola przemieszczenia (3.1) warunki brzegowe na pobocznicę walca ograniczającej płytę — są ściśle spełnione.

#### 4. ZASTOSOWANIE METODY CZASOPRZESTRZENNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Ze względu na wysoki rząd układu równań różniczkowych (3.33) praktyczne wyniki, poza nielicznymi wyjątkami, można uzyskać tylko metodami numerycznymi. Uniwersalną metodą doskonale przystosowaną do elektronicznej techniki obliczeniowej jest metoda elementów skończonych [17]. Analiza płyt metodą elementów skończonych z uwzględnieniem poprzecznego ścinania jest przedstawiona mię-

dzy innymi w pracach [22–25]. Zastosowano tam uściślone teorie płyt REISSNERA [4 i 5] lub MINDLINA [26], które opierają się na liniowym rozkładzie naprężeń  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta=1, 2$ ) na grubości płyty. Fakt ten ogranicza zastosowanie omawianych teorii do płyt średniej grubości i niezbyt dużej podatności na poprzeczne odkształcenia [3].

Zastosowanie metody elementów skończonych w przestrzeni i w czasie jest przedstawione w pracach [18 i 19].

#### 4.1. Macierz sztywności elementu czasoprzestrzennego

Podstawowym problemem w metodzie elementów skończonych jest znajomość macierzy sztywności pojedynczego elementu, pozwalająca na ułożenie ogólnego programu obliczeń na drodze standardowego postępowania.

W pracy niniejszej macierz sztywności wyprowadzimy dla najprostszego prostopadłościennego elementu czasoprzestrzennego.

Rozpatrzmy prostopadłościenny element czasoprzestrzenny o wymiarach  $2a \times 2b \times 2c$ . Wymiary  $a$  i  $b$  wyrażają się w jednostkach długości, a wymiar  $c$  w jednostkach czasu. Lokalne współrzędne bezwymiarowe  $\xi = x/a, \eta = y/b$  i  $\tau = t/c$  zmieniają się w granicach od  $-1$  do  $1$ .

Przyjmujemy element liniowy z rodziny serendipowskiej o ośmiu węzłach. Element czasoprzestrzenny otrzymamy zamieniając oś  $z$  na oś czasu  $t$  (por. [17], str. 123).

Rozkład niewiadomych wielkości geometrycznych  $\bar{\mathbf{u}}^k$  ( $k=0, 1$ ) wewnątrz elementu jest określony wektorami kolumnowymi

$$(4.1) \quad \bar{\mathbf{u}}^0 = \begin{Bmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \\ \nu^0 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \delta_e^0 = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_8] \begin{Bmatrix} \delta_1^0 \\ \delta_2^0 \\ \vdots \\ \delta_8^0 \end{Bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{u}}^1 = \begin{Bmatrix} \varphi_1^1 \\ \varphi_2^1 \\ w^1 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \delta_e^1 = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_8] \begin{Bmatrix} \delta_1^1 \\ \delta_2^1 \\ \vdots \\ \delta_8^1 \end{Bmatrix},$$

gdzie  $\delta_r^k = [\varphi_{1r}^k, \varphi_{2r}^k, w_r^k]^T$ ,  $k=0, 1$ ,  $r=1, 2, \dots, 8$  są poszukiwanymi wielkościami geometrycznymi w węzle  $r$  elementu.

Funkcja kształtu dla elementu o ośmiu węzłach ma najprostszą budowę:

$$(4.2) \quad N_r = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \tau_0) \mathbf{I}_3,$$

gdzie  $\xi_0 = \xi \xi_r$ ,  $\eta_0 = \eta \eta_r$ ,  $\tau_0 = \tau \tau_r$ ,  $r=1, 2, \dots, 8$  są to nowe zmienne, za pomocą których można opisać wszystkie funkcje kształtu w jednolity sposób [17], a  $\mathbf{I}_0$  jest macierzą jednostkową (3.3).

Na podstawie (3.3), (3.15) i (4.1) mamy

$$\begin{aligned}
 \bar{\epsilon}_e^0 &= \sum_{r=1,8} L^0 N_r \delta_r^0 = \sum_{r=1,8} B_r^0 \delta_r^0 = B^0 \delta_e^0, \\
 \bar{\epsilon}_e^+ &= \sum_{r=1,8} L^+ N_r \delta_r^+ = \sum_{r=1,8} B_r^+ \delta_r^+ = B^+ \delta_e^+, \\
 \bar{\epsilon}_e^{-1} &= \sum_{r=1,8} L^{-1} N_r \delta_r^{-1} = \sum_{r=1,8} B_r^{-1} \delta_r^{-1} = B^{-1} \delta_e^{-1}, \\
 \bar{\epsilon}_{te}^0 &= \sum_{r=1,8} L_t N_r \delta_r^0 = \sum_{r=1,8} B_{tr} \delta_r^0 = B_t \delta_e^0, \\
 \bar{\epsilon}_{te}^{-1} &= \sum_{r=1,8} L_t N_r \delta_r^{-1} = \sum_{r=1,8} B_{tr} \delta_r^{-1} = B_t \delta_e^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Przemieszczenia wirtualne  $\delta \bar{u}^k$  mają teraz postać

$$\delta \bar{u}^k = N d \delta_e^k, \quad k=0,1.
 \tag{4.4}$$

Jeśli do równania (3.34) podstawimy wielkości (4.3) po uwzględnieniu zależności (3.29) i (4.4) oraz dodamy pracę wirtualną sił węzłowych elementu, to otrzymamy następujące równanie

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad (d \delta_e^0)^T F_e^0 + (d \delta_e^1)^T F_e^1 &= \int_{te} \int_{Ae} \{ (d \delta_e^0)^T [(B_e^0)^T D^0 (B^0 \delta_e^0 + B^+ \delta_e^1) + \\
 &+ B_t^T D_t^0 B_t \delta_e^0 - N^T (p^0 + X^0)] + (d \delta_e^1)^T [(B^+)^T D_0 (B^0 \delta_e^0 + B^+ \delta_e^1) + \\
 &+ (B^1)^T D^1 B^1 \delta_e^1 + B_t^T D_t^1 B_t \delta_e^1 - N^T (p^1 + X^1)] \} dA dt.
 \end{aligned}$$

Równanie to jest spełnione dla każdej wartości przemieszczeń wirtualnych  $d \delta_e^k$  ( $k=0,1$ ), stąd po skróceniu przez  $d \delta_e^k$  otrzymujemy typowy związek dla dowolnego elementu skończonego:

$$\begin{bmatrix} F_e^0 \\ F_e^1 \end{bmatrix} = K_e \begin{bmatrix} \delta_e^0 \\ \delta_e^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{pe}^0 \\ F_{pe}^1 \end{bmatrix},
 \tag{4.6}$$

w którym macierz sztywności elementu czasoprzestrzennego określa wzór

$$K_e = \int_{te} \int_{Ae} \left[ \begin{array}{cc} (B^0)^T D^0 B^0 + B_t^T D_t^0 B_t, & (B^0)^T D^0 B^+ \\ (B^+)^T D^0 B^0, & (B^+)^T D^0 B^+ + (B^1)^T D^1 B^1 + B_t^T D_t^1 B_t \end{array} \right] dA dt
 \tag{4.7}$$

oraz

$$F_{pe}^0 = \int_{te} \int_{Ae} N^T (p^0 + X^0) dA dt, \quad F_{pe}^1 = \int_{te} \int_{Ae} N^T (p^1 + X^1) dA dt.
 \tag{4.8}$$

Jeśli mamy zagadnienie statyczne, to funkcja kształtu i macierz sztywności przyjmują postać

$$N_r = \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) I_3, \quad r=1, 2, \dots, 4,
 \tag{4.9}$$

$$K_e = \int_{Ae} \left[ \begin{array}{cc} (B^0)^T D^0 B^0, & (B^0)^T D^0 B^+ \\ (B^+)^T D^0 B^0, & (B^+)^T D^0 B^+ + (B^1)^T D^1 B^1 \end{array} \right] dA.
 \tag{4.10}$$

Łatwo zauważyć, że prawą stronę wzoru (4.6) możemy otrzymać bezpośrednio z układu równań (3.32), jeśli podstawimy  $\bar{u}^k = N\delta_o^k$  ( $k=0, 1$ ) oraz wyrazy obciążeniowe pomnożymy przez  $N^T$  i całość scałkujemy względem powierzchni elementu czasoprzestrzennego. Stąd wynika bezpośrednie przejście z układu równań różniczkowych wyprowadzonego w zapisie macierzowym do metody elementów skończonych.

## 5. UPROSZCZENIE TEORII

W płytach izotropowych o średniej grubości i niezbyt dużej liczbie Poissona  $\nu < 0,3$  oraz w płytach ortotropowych o małych sztywnościach ścinania poprzecznego  $G_{\alpha 3}/c_{\alpha\alpha} \ll 1$  ( $\alpha=1, 2$ ) zmiany grubości płyty są niewielkie w stosunku do całkowitego ugięcia płyty. Możemy zatem przyjąć, iż płyta jest nieściśliwa w kierunku grubości,  $w^1 = 0$ .

Dokonyamy korekty wzorów wyprowadzonych w poprzednich punktach z uwagi na zmianę modelu płyty. Z trzeciego równania konstytutywnego wyznaczamy

$$(5.1) \quad \varepsilon_{33} = c_{33}^{-1} (\sigma_{33} - c_{3\alpha} \sigma_{3\alpha}) \quad (\alpha=1, 2).$$

Wielkość ta, podstawiona do pozostałych równań, prowadzi do następującej zależności między odkształceniami i naprężeniami:

$$(5.2) \quad \sigma = D\varepsilon + A\sigma_{33},$$

gdzie

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \sigma &= [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}]^T, \\ D &= \text{diag}[D_f, D_s], \quad A = [A_1, A_2, 0, 0, 0]^T, \\ D_f &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad D_s = \text{diag}[G_{13}, G_{23}]. \end{aligned}$$

Nowe współczynniki sprężystości określają wzory  $B_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} - c_{33}^{-1} c_{\alpha 3} c_{\beta 3}$ ,  $A_\alpha = c_{\alpha 3}/c_{33}$  ( $\alpha, \beta=1, 2$ ), a naprężenie  $\sigma_{33}$  otrzymane ze scałkowania równania ruchu w kierunku  $x_3$  ma postać

$$(5.4) \quad \sigma_{33} = p_3^a \zeta - \frac{5}{8} \zeta (1 - \zeta^2) Q_{\alpha, \alpha}^1.$$

Współczynniki  $B_{\alpha\beta}$  są stałymi sprężystości dla ciała ortotropowego w płaskim stanie naprężenia.

Wzór (5.4) pozwala na dość dokładne określenie naprężeń  $\sigma_{33}$ , jednak prowadzi do niesymetrycznych operatorów różniczkowych i niesymetrycznej macierzy sztywności. Z tego względu do wyprowadzenia równań różniczkowych i macierzy sztywności przyjmujemy naprężenia  $\sigma_{33}$  analogiczne do występujących w teorii Reissnera i Ambarcumiana:

$$(5.5) \quad \sigma_{33} = \frac{6}{5} p_3^a \zeta + \frac{6}{20} \zeta \left( 1 - \frac{5}{3} \zeta^2 \right) p_3^a.$$

Układ równań różniczkowych (3.33) przyjmuje postać

$$(5.6) \quad \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \\ w_0 \\ \varphi_1^1 \\ \varphi_2^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2hp_1^a + \frac{2}{5}A_1 h^2 p_{3,1}^a \\ 2hp_2^a + \frac{2}{5}A_2 h^2 p_{3,2}^a \\ 2p_3^a + 2hX_3^0 \\ -\frac{4}{3}hp_1^a - \frac{2}{105}A_1 h^3 p_{3,11}^a \\ -\frac{4}{3}hp_2^a - \frac{2}{105}A_2 h^3 p_{3,22}^a \end{bmatrix} = 0.$$

Operatory różniczkowe  $L_{pg}$  ( $p, g=1, 2, \dots, 5$ ) otrzymamy z (3.35) zamieniając  $\bar{c}_{\alpha\beta}$  na  $\bar{B}_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}h^3 B_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta=1, 2$ ).

Macierz sztywności otrzymamy ze wzoru (4.7) skreślając w macierzach  $\mathbf{L}^k, \mathbf{L}^+, \mathbf{L}_t$  ( $k=0, 1$ ) trzecią kolumnę z uwagi na fakt, iż  $w^1=0$ . Związki (4.8) przyjmują postać

$$(5.7) \quad \mathbf{F}_{pe}^0 = \int_{te} \int_{Ae} [\mathbf{N}^T(\mathbf{p}^0 + \mathbf{X}^0) - (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{A}^0 p_3^a] dAdt,$$

$$\mathbf{F}_{pe}^1 = \int_{te} \int_{Ae} [\mathbf{N}^T \mathbf{p}^1 - (\mathbf{B}^1)^T (\mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^1) p_3^a] dAdt,$$

tutaj  $\mathbf{A}^0 = \frac{4}{5}h^2 \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^1 = \frac{4}{105}h^2 \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{p}^1 = -\frac{4}{3}h[p_1^a, p_2^a, 0]^T$ , pozostałe wyrażenia nie ulegają zmianie.

## 6. PRZYKŁADY

Analizę wpływu poprzecznego ścinania i naprężeń  $\sigma_{33}$  na stany naprężenia i przemieszczenia przeprowadzimy na przykładzie zgięcia walcowego pasma płytowego. Zastosujemy teorię uproszczoną, co pozwoli w łatwy sposób otrzymać ogólne wzory dogodnie do analizy.

Równania równowagi pasma płytowego zginanego siłami pionowymi  $p_3=p$  mają postać

$$(6.1) \quad M_{,1} - Q^0 = 0, \quad Q_{,1} + 2p = 0, \quad M_{,1}^1 + \frac{2}{3}Q^0 - \frac{5}{3}Q^1 = 0.$$

Z równania (6.1)<sub>2</sub> wyznaczamy siłę poprzeczną

$$(6.2) \quad Q_0 = -2 \int p dx + C_1, \quad x = x_1.$$

Układ równań różniczkowych ma budowę

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \frac{2}{3} h^3 B \varphi_{,11}^0 - \frac{4}{9} AGh^3 \varphi_{,11}^1 &= Q^0 - \frac{2}{3} Ah^2 p_{,1}, \\ \frac{8}{63} h^3 (B-AG) \varphi_{,11}^1 - \frac{40}{9} Gh \varphi^1 &= -\frac{2}{3} Q^0, \\ 2Gh \left( \varphi^0 - \frac{2}{3} \varphi^1 + w_{,1} \right) &= Q_0, \end{aligned}$$

w którym

$$\varphi^k = \varphi_1^k, \quad (k=0, 1), \quad w = w^0, \quad B = B_{11}, \quad G = G_{13}, \quad A = c_{13}/c_{33}.$$

Po scałkowaniu i rozwikłaniu otrzymujemy

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \varphi^0 &= \frac{2}{3} A \frac{G}{B} \varphi^1 + \frac{3}{2h^3 B} \int \int Q^0 dx^2 - \frac{A}{Bh} \int p dx + C_2 x + C_3, \\ w_0 &= - \int \left( \varphi^0 - \frac{2}{3} \varphi^1 \right) dx + \frac{1}{2hG} \int Q^0 dx + C_4, \\ \varphi_{,11}^1 - \frac{k^2}{a^2} \varphi^1 &= -\frac{21}{4} \frac{Q^0}{h^2 (B-AG)}, \end{aligned}$$

gdzie

$$k = \frac{a}{h} \sqrt{\frac{35}{9}}, \quad \vartheta = \frac{B}{G} - A.$$

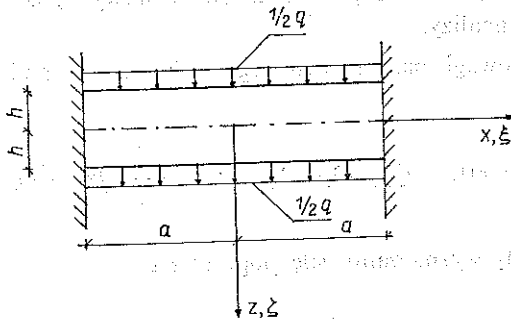
Rozwiązaniem równania (6.4)<sub>3</sub> są funkcje

$$(6.5) \quad \varphi^1 = \varphi_*^1 + C_5 \operatorname{ch} k \xi + C_6 \operatorname{sh} k \xi,$$

gdzie  $\varphi_*^1$  jest całką szczególną równania różniczkowego niejednorodnego (6.4)<sub>3</sub>.

### 6.1. Pasma obustronnie utwierdzone

Rozpatrzmy poprzecznie izotropowe pasmo płytowe poddane działaniu obciążenia  $p = \frac{1}{2} q$  (rys. 2).



Rys. 2.



W przyjętym układzie współrzędnych stałe całkowania  $C_1 = C_3 = C_5 = 0$ . Po wyznaczeniu stałych całkowania  $C_2, C_4, C_6$  z warunków brzegowych dla  $\xi = \pm 1$

$$(6.6) \quad \varphi^0 = 0, \quad \varphi^1 = 0, \quad w = 0,$$

otrzymujemy następujące wzory na przemieszczenia i naprężenia:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{4} \frac{q}{B} \left( \frac{a}{h} \right)^3 \left[ \xi(1-\xi^2) - \frac{2}{5} A \delta^2 \left( \xi - \frac{shk\xi}{shk} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{5} \frac{B}{G} \delta^2 \left( \xi - \frac{shk\xi}{shk} \right) \left( 1 - \frac{5}{3} \xi^2 \right) \right] h\xi, \\ w &= \frac{qa^4}{24\bar{B}} \left[ \left( 1 - \xi^2 + 4 \frac{B}{G} \delta^2 + \frac{4}{5} \vartheta \delta^2 \right) (1 - \xi^2) + \frac{8}{5} \delta^2 \frac{\vartheta}{k} \left( cthk - \frac{chk\xi}{chk} \right) \right], \\ \bar{B} &= \frac{2}{3} h^3 B, \\ \sigma_{11} &= \frac{1}{4} q \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left[ 1 - 3\xi^2 + 2\delta^2 A - \frac{3}{5} \vartheta \delta^2 \left( 1 - k \frac{chk\xi}{shk} \right) \left( 1 - \frac{5}{3} \xi^2 \right) \right] \xi, \\ \sigma'_{33} &= \frac{1}{2} q \xi \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 - k \frac{chk\xi}{shk} \right) (1 - \xi^2) \right], \\ \sigma_{13} &= -\frac{3}{4} q \frac{a}{h} \left[ \xi(1-\xi^2) - \frac{1}{3} \frac{shk\xi}{shk} (1 - 3\xi^2) \right], \\ \sigma'_{13} &= -\frac{3}{4} q \frac{a}{h} \left[ \xi(1-\xi^2) - \frac{7}{12} \frac{shk\xi}{shk} (1 - 6\xi^2 + 5\xi^4) \right]. \end{aligned}$$

Na podstawie teorii Ambarcumiana dla rozważanego przypadku mamy

$$(6.8) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{4} \frac{q}{B} \left( \frac{a}{h} \right)^3 \xi \left[ (1 - \xi^2) - \frac{3}{5} \frac{B}{G} \delta^2 \left( 1 - \frac{5}{3} \xi^2 \right) \right] h\xi, \\ w &= \frac{qa^4}{24\bar{B}} \left[ 1 - \xi^2 + \frac{24}{5} \frac{B}{G} \delta^2 \right] (1 - \xi^2), \\ \sigma_{11} &= \frac{1}{4} q \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left[ 1 - 3\xi^2 + \frac{12}{5} A \delta^2 - \frac{3}{5} \vartheta \delta^2 \left( 1 - \frac{5}{3} \xi^2 \right) \right] \xi, \\ \sigma_{13} &= -\frac{3}{4} q \frac{a}{h} \xi (1 - \xi^2), \quad \sigma_{33} = \frac{3}{4} q \left( 1 - \frac{1}{3} \xi^2 \right) \xi. \end{aligned}$$

W tablicy 1 i 2 zestawiono wartości współczynników poprawkowych do teorii klasycznej dla naprężeń  $\sigma_{11}(0,1)$  i  $\sigma_{11}(1,1)$  obliczonych według teorii Ambarcumiana  $\lambda^4$  i  $\gamma^4$  oraz wg proponowanej przez autora —  $\lambda$  i  $\gamma$ .

Tablica 1

A=c <sub>13</sub> /c <sub>33</sub> \ B/G		2,5	30	60	120
		δ=h/a=0,125			
0,25	λ <sup>A</sup>	1,0235	1,1953	1,3829	1,7578
	λ	1,0219	1,1932	1,3713	1,6705
1,0	λ <sup>A</sup>	1,0466	1,2187	1,4062	1,7812
	λ	1,0406	1,2120	1,3904	1,6907
δ=h/a=0,25					
0,25	λ <sup>A</sup>	1,0940	1,7812	2,5312	4,0312
	λ	1,0874	1,6907	2,0958	2,5155
	λ <sup>F</sup>	1,0848	1,6626	2,1374	2,7810
1,0	λ <sup>A</sup>	1,1875	1,8750	2,6250	4,1250
	λ	1,1625	1,7713	2,1818	2,6057
	λ <sup>F</sup>			2,2040	2,8537

Tablica 2

A=c <sub>13</sub> /c <sub>33</sub> \ B/G		2,5	30	60	120
		δ=h/a=0,125			
0,25	γ <sup>A</sup>	0,9882	0,9023	0,8085	0,6211
	γ	1,2115	1,7096	1,9513	2,2407
1,0	γ <sup>A</sup>	0,9767	0,8906	0,7969	0,6094
	γ	1,1557	1,6901	1,9365	2,2267
δ=h/a=0,25					
0,25	γ <sup>A</sup>	0,9530	0,6094	0,2344	-0,5156
	γ	1,4000	2,2261	2,5344	2,8109
	γ <sup>F</sup>	1,6744	2,9915	3,7376	4,6109
1,0	γ <sup>A</sup>	0,9062	0,5625	0,1875	-0,5625
	γ	1,2810	2,1681	2,4812	2,7621
	γ <sup>F</sup>			3,9394	4,8534

W rozważanym przypadku

$$\lambda^A = 1 + \frac{12}{5} A \delta^2 + \frac{2}{5} \vartheta \delta^2, \quad \gamma^A = 1 - \frac{6}{5} A \delta^2 - \frac{1}{5} \vartheta \delta^2,$$

$$\lambda = 1 + 2\delta^2 A + \frac{2}{5} \vartheta \delta^2 \left(1 - k \frac{1}{shk}\right),$$

$$\gamma = 1 - A \delta^2 - \frac{1}{5} \vartheta \delta^2 \left(1 - k \frac{chk}{shk}\right), \quad \sigma_{11}(0,1) = \lambda \sigma_{11}^*(0,1) \quad \sigma_{11}(1,1) = \gamma \sigma_{11}^*(1,1),$$

przy czym  $\sigma_{11}^*$  są to naprężenia uzyskane z teorii klasycznej.

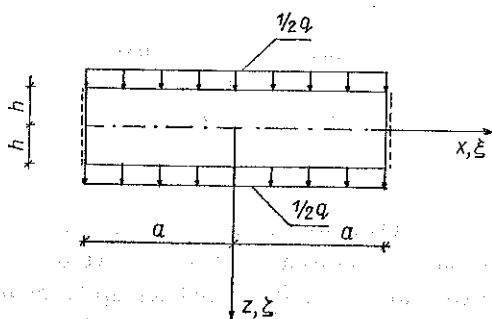
Wyniki zweryfikowano za pomocą metody elementów skończonych dokonując podziału ćwiartki pasma płytowego na 35 elementów prostokątnych z kwadratową zmiennością funkcji kształtu wzdłuż boków elementu (por. [17], str. 113).

Wyniki otrzymane z rozwiązania płaskiego stanu odkształcenia  $\varepsilon_{22}=0$  za pomocą metody elementów skończonych oznaczono symbolami  $\lambda^F$  i  $\gamma^F$ .

## 6.2. Pasma swobodnie podparte

W przypadku pasma płytowego swobodnie podpartego (rys. 3) stałe całkowania wyznaczamy z następujących warunków brzegowych: dla  $\xi = \pm 1$

$$(6.9) \quad M^0=0, \quad M^1=0, \quad w=0.$$



Rys. 3.

Pola przemieszczenia i naprężenia otrzymane na podstawie teorii proponowanej i Ambarcumiana mają odpowiednio postać

$$(6.10) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{3}{4} \frac{q}{B} \left( \frac{a}{h} \right)^3 \left[ -\xi + \frac{1}{3} \xi^3 + \frac{4}{5} A \delta^2 \xi - \frac{2}{15} A \delta^2 \frac{shk\xi}{kshk} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \frac{B}{G} \delta^2 \left( \xi - \frac{shk\xi}{kchk\xi} \right) \left( 1 - \frac{5}{3} \xi^2 \right) \right] h\xi, \\ w &= \frac{qa^4}{24B} \left[ \left( 5 - \xi^2 + \frac{24}{5} \vartheta \delta^2 \right) (1 - \xi^2) - \frac{8}{175} \vartheta^2 \delta^4 \left( 1 - \frac{chk\xi}{chk} \right) \right], \\ \sigma_{11} &= \frac{3}{4} q \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left[ 1 - \xi^2 - \frac{1}{5} \vartheta \delta^2 \left( 1 - \frac{chk\xi}{chk} \right) \left( 1 - \frac{5}{3} \xi^2 \right) \right] \xi, \\ \sigma_{13} &= -\frac{3}{4} q \left( \frac{a}{h} \right) \left[ \xi (1 - \xi^2) - \frac{1}{3} \frac{shk\xi}{kchk} (1 - 3\xi^2) \right], \\ \sigma'_{13} &= -\frac{3}{4} q \left( \frac{a}{h} \right) \left[ \xi (1 - \xi^2) - \frac{1}{60} k \vartheta \delta^2 \frac{shk\xi}{chk} (1 - 6\xi^2 + 5\xi^4) \right]; \end{aligned}$$

$$u = -\frac{3}{4} \frac{q}{B} \left(\frac{a}{h}\right)^3 \xi \left[ -1 + \frac{1}{3} \xi^2 + \frac{4}{5} A \delta^2 + \frac{1}{5} \frac{B}{G} \delta^2 \left(1 - \frac{5}{3} \xi^2\right) \right] h \xi,$$

$$w = \frac{q a^4}{24 B} \left( 5 - \xi^2 + \frac{24}{5} \vartheta \delta^2 \right) (1 - \xi^2),$$

$$(6.11) \quad \sigma_{11} = \frac{3}{4} q \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[ 1 - \xi^2 - \frac{1}{5} \vartheta \delta^2 \left(1 - \frac{5}{3} \xi^2\right) \right] \xi,$$

$$\sigma_{33} = \frac{3}{4} q \left(1 - \frac{1}{3} \xi^2\right) \xi,$$

$$\sigma_{13} = -\frac{3}{4} q \frac{a}{h} \xi (1 - \xi^2).$$

W tablicy 3 zestawiono wartości współczynników poprawkowych do teorii klasycznej dla naprężeń  $\sigma_{11}$  (0, 1) obliczonych według teorii Ambarcumiana  $\Phi^A$ , proponowanej  $\Phi$  i metodą elementów skończonych  $\Phi^F$ .

### 6.3. Analiza i omówienie wyników

W tablicach 1, 2 i 3 zestawiono wartości współczynników poprawkowych do naprężeń klasycznych dla spotykanych w praktyce płyt poprzecznie izotropowych [1-3]. Zestawienie wykonano dla płyty o średniej grubości  $\delta = h/a = 1/8$  i grubej  $\delta = h/a = 1/4$ . Przypadek  $B/G = 2\tau/(1-\nu) = 2,5$  ( $\tau = G/G'$ ) i  $A = \nu' m/(1-\nu) = 0,25$  ( $m = E/E'$ ) odpowiada płycie izotropowej o liczbie Poissona  $\nu = 0,20$ . Tutaj  $E$ ,  $G$  i  $\nu$  oznaczają odpowiednio moduły sprężystości podłużnej, poprzecznej i liczbę Poissona dla kierunków  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) a  $E'$ ,  $G'$  i  $\nu'$  te same wielkości dla kierunku  $z$ . Przypadek  $B/G = 120$  i  $A = 1,0$  dla  $\nu = \nu' = 0,20$  odpowiada  $\tau = 48$  i  $m = 4$ , to jest płycie o bardzo dużej podatności na poprzeczne odkształcenia postaciowe i normalne.

Tablica 3

$A = c_{13}/c_{33}$		$B/G$			
		2,5	30	60	120
$\delta = h/a = 0,125$					
0,25	$\Phi^A$	1,0047	1,0620	1,1245	1,2495
	$\Phi$	1,047	1,0619	1,1239	1,2429
1,0	$\Phi^A$	1,0031	1,0604	1,1229	1,2479
	$\Phi$	1,0031	1,0603	1,1224	1,2414
$\delta = h/a = 0,25$					
0,25	$\Phi^A$	1,0188	1,2479	1,4980	1,9979
	$\Phi$	1,0188	1,2414	1,4515	1,7713
	$\Phi^F$		1,2333	1,4518	1,7905
1,0	$\Phi^A$	1,0125	1,2416	1,4916	1,9916
	$\Phi$	1,0125	1,2356	1,4465	1,7679
	$\Phi^F$			1,4429	1,7838

Z tablicy 3 wynika, że w płycie obustronnie swobodnie podpartej dla danego przypadku obciążenia różnica między rozwiązaniami otrzymanymi z teorii proponowanej i Ambarcumiana a wynikami dokładnymi, za które uważamy wyniki uzyskane metodą elementów skończonych, jest niewielka. Na przykład dla  $B/G=120$ ,  $A=0,25$  i  $\delta=0,25$ ,  $\Phi^F/\Phi=1,7905/1,7713=1,01$  i  $\Phi^F/\Phi^A=1,7905/1,9979=0,896$ .

Jednakże rozkład naprężeń wzdłuż długości płyty otrzymany z teorii Ambarcumiana jest niewłaściwy, gdyż nawet na brzegach, gdzie naprężenia powinny być równe zeru, są równe  $\sigma_{11}(1,1)=0,99 \sigma_{11}^*(0,1)$ . Tutaj  $\sigma_{11}^*(0,1)$  jest maksymalnym naprężeniem klasycznym w środku płyty. Fakt ten utrudnia kształtowanie wytrzymałościowe płyt poprzecznie izotropowych.

Teoria Ambarcumiana pozwala na analizę naprężeń w otoczeniu środka płyt o krawędziach utwierdzonych, jeśli  $\delta < 0,25$  i  $B/G < 30$ . Natomiast na krawędziach utwierdzonych teoria Ambarcumiana daje bardzo duże błędy większe niż teoria klasyczna. W przypadku dużej podatności na poprzeczne odkształcenia naprężenia otrzymane z teorii Ambarcumiana są kilkakrotnie zaniżone, a nawet zmieniają znak na przeciwny, jak to ma miejsce dla  $B/G=120$  i  $\delta=0,25$ . Powoduje to bardzo niebezpieczne błędy, gdyż naprężenia na krawędziach utwierdzonych przeważnie decydują o wymiarowaniu płyty.

Proponowana teoria daje wyniki zbliżone do dokładnych nawet w płytach o bardzo małej sztywności ścinania poprzecznego, w których współczynniki poprawkowe  $\gamma^F$  do teorii klasycznej są większe od czterech. Na przykład dla  $B/G=120$  i  $\delta=0,25$  błąd wynosi (por. tablica 2)

$$\frac{4,6109 - 2,8109}{4,6109} 100\% = 39,1\%$$

dla  $A=0,25$ , a

$$\frac{4,8534 - 2,7621}{4,8534} 100\% = 42,1\%$$

dla  $A=1,0$ , co odpowiada czterokrotnie większej podatności na zmiany grubości płyty.

Dla tych samych przypadków błędy naprężeń w środku płyty otrzymanych z teorii proponowanej wynoszą odpowiednio (por. tablica 1)

$$\frac{2,7810 - 2,5155}{2,7810} 100\% = 9,55\%$$

$$\frac{2,8537 - 2,6057}{2,8537} 100\% = 6,44\%$$

Stosunkowo duży błąd naprężeń na krawędzi utwierdzonej płyty izotropowej o  $\nu=0,20$  i  $\delta=0,25$  (por. tablica 2)

$$\frac{1,6744 - 1,4000}{1,6744} 100\% = 16,35\%$$

w porównaniu z analogicznymi błędami płyt poprzecznie izotropowych o małych sztywnościach ścinania wynika z faktu pominięcia wpływu wydłużeń płyty w kierunku

ku grubości. Wydłużenia te w otoczeniu brzegu utwierdzonego są dość duże i rosną ze wzrostem liczby Poissona. W tym przypadku stosunek różnicy między ugięciem płaszczyzny zewnętrznej i środkowej do ugięcia płaszczyzny środkowej dla  $\xi_0 = 0,9583$  wyznaczony metodą elementów skończonych wynosi  $\kappa = [w(\xi_0, 1) - w(\xi_0, 0)]/w(\xi_0, 0) = 0,5576$ . Natomiast w płycie poprzecznie izotropowej o  $\delta = 0,25$  i  $B/G = 120$   $\kappa = 0,0255$  dla  $A = 0,25$  i  $\kappa = 0,0879$  dla  $A = 1,0$ . Wynika stąd wniosek, że w płytach ortotropowych o małych sztywnościach ścinania ze względu na małą wartość współczynników  $\kappa$  może być stosowany model płyty nieściśliwej w kierunku grubości  $\varepsilon_{33} = 0$ . Natomiast w średniej grubości i grubych płytach izotropowych o krawędziach utwierdzonych powinny być uwzględnione pełne tensory stanów odkształcenia i naprężenia.

Teoria Ambarcumiana i uproszczony wariant teorii proponowanej opierają się na analogicznych modelach płyt. W obu teoriach pola przemieszczeń poziomych są opisane sumą składnika liniowego i składnika zmieniającego się według paraboli trzeciego stopnia względem grubości płyty, a ugięcie jest stałe na grubości płyty. W teorii Ambarcumiana dwa z pięciu niezależnych parametrów są wyznaczone z warunków brzegowych (2.5)<sub>1</sub>, a pozostałe trzy z całkowitego spełnienia równań równowagi.

W teorii proponowanej wszystkie pięć niezależnych parametrów są wyznaczone z równań ruchu spełnionych w postaci (3.5). Jak wykazuje przeprowadzona analiza, sposób ten prowadzi do znacznie dokładniejszych wyników.

W tablicach 1, 2 i 3 przeprowadzono analizę tylko naprężeń  $\sigma_{11}$ , gdyż różnice między ugięciami otrzymanymi z teorii Ambarcumiana i proponowanej a dokładnymi są niewielkie i nawet w skrajnych przypadkach nie przekraczają 15%.

W wykonanych przykładach teorii opierające się na założeniu o liniowości naprężeń  $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{3}{2} \frac{M_{\alpha\beta}}{h^2} \frac{z}{h}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ), jak np. Reissnera i Mindlina, dają rozkłady naprężeń  $\sigma_{11}$  identyczne z teorią klasyczną w paśmie swobodnie podpartym i niewielkie różnice w paśmie utwierdzonym, jeśli uwzględniają wpływ  $\sigma_{33}$  na momenty zginające.

## 7. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono techniczną teorię grubych płyt ortotropowych. Punktem wyjścia jest założenie kinematyczne dotyczące rozkładu przemieszczeń po grubości płyty. Pola przemieszczeń opisano sumą przemieszczeń zerowego rzędu  $u_\alpha^0 = h\zeta\varphi_\alpha^0$ ,

$u_3^0 = w^0$  i pierwszego rzędu  $u_\alpha^1 = h\zeta \left(1 - \frac{5}{3}\zeta^2\right)\varphi_\alpha^1$ ,  $u_3^1 = (1 - 3\zeta^2)w^1$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Funkcje

rozkładu przemieszczeń są ortogonalne  $\int_{-1}^1 \zeta\zeta \left(1 - \frac{5}{3}\zeta^2\right) d\zeta = \int_{-1}^1 1(1 - 3\zeta^2) d\zeta = 0$ .

Sześć nieznanymi parametrów opisujących rozkład przemieszczeń w płaszczyźnie płyty wyznaczono z równań ruchu continuum trójwymiarowego, za pomocą zasady prac wirtualnych. W efekcie otrzymano sześć równań ruchu grubej płyty. Trzy pierwsze równania są klasycznymi równaniami ruchu, a pozostałe równaniami

równowagi dynamicznej sił wewnętrznych pierwszego rzędu. Występuje tu pewna analogia z teorią momentów wyższego rzędu [27] i teorią płyt grubych W. Z. WŁASOWA i N. N. LEONTIEWA [28].

Jeśli przyjmiemy tylko pole przemieszczeń zerowego rzędu i dokonamy związanej z tym zmiany stałych sprężystości  $c_{\alpha\beta}$  na  $B_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta=1, 2$ ), gdyż  $\varepsilon_{33}=0$ , oraz przyjmujemy  $S_{\alpha} = \frac{5}{6} 2hG_{\alpha 3}$ , to otrzymamy teorię MINDLINA [26]. Uwzględniając dodatkowo wpływ  $\sigma_{33}$  w postaci (5.5) na momenty zginające otrzymamy teorię REISSNERA [4 i 5]. Jak wykazano w przykładach pole przemieszczeń pierwszego rzędu znacznie zwiększa dokładność rozwiązania. Aby uniknąć związanej z tym konieczności rozwiązywania układu równań z sześcioma niewiadomymi, możemy zastosować metodę iteracji i w pierwszym przybliżeniu przyjąć funkcje tylko zerowego rzędu  $\varphi_{\alpha}^0$  i  $w^0$  to jest teorię Reissnera.

Mając określone przemieszczenia zerowego rzędu rozwiązujemy układ trzech równań z niewiadomymi  $\varphi_{\alpha}^1$  i  $w^1$ , w którym po prawej stronie występują znane przemieszczenia  $\varphi_{\alpha}^0$  i  $w^0$ . Następnie wyznaczone przemieszczenia  $\varphi_{\alpha}^1$  i  $w^1$  podstawimy do równań równowagi sił wewnętrznych zerowego rzędu i otrzymujemy  $\varphi_{\alpha}^0$  i  $w^0$  w drugim przybliżeniu. Powtarzając iterację kilkakrotnie otrzymamy dokładne pola przemieszczenia zerowego i pierwszego rzędu. Iteracja powinna być szybko zbieżna, gdyż punktem wyjścia jest rozwiązanie według teorii Reissnera.

Jeśli chcemy uzyskać rozwiązanie bardziej dokładne, to możemy przyjąć pole przemieszczeń drugiego rzędu o postaci  $u_{\alpha}^2 = h\zeta \left(1 - \frac{14}{3}\zeta^2 + \frac{21}{5}\zeta^4\right) \varphi_{\alpha}^2$ ,  $u_3^2 = \left(1 - 10\zeta^2 + \frac{35}{3}\zeta^4\right) w^2$  lub jeszcze wyższych rzędów. Funkcje rozkładu przemieszczeń względem grubości płyty wyznaczamy z warunku, aby były ortogonalne do wszystkich funkcji pozostałych rzędów. Zastosowanie metody elementów skończonych i iteracyjnego rozwiązania równań pozwoli na łatwe otrzymanie rozwiązań za pomocą elektronicznej techniki obliczeniowej. Będzie to przedmiotem następnych prac autora.

Łatwo zauważyć, że wyprowadzone wzory mogą być zastosowane do analizy płyt ortotropowych, podłużnie niejednorodnych o zmiennej grubości. Należy tylko uwzględnić w odpowiednich wzorach  $h=h(x_{\alpha})$  i  $D=D(x_{\alpha})$ . Zmianie ulegną operatory różniczkowe  $L_{pg}$  ( $p, g=1, \dots, 6$ ), co nie ma większego znaczenia, gdyż rozwiązanie może być otrzymane tylko numerycznie. Inne będą również wzory na naprężenia  $\sigma'_{i3}$  ( $i=1, 2, 3$ ) ze względu na odmienną postać warunków granicznych (2.5) w płycie o zmiennej grubości.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. M. TARNOPOLSKII, A. W. ROZE, *Osobennosti rasczeta dietalej iz armirowannyh plastikow*, Izd. "Zinatne", Ryga 1969.
2. J. A. ZUKAS, *Effects of transverse normal and shear strains in orthotropic shells*, AJAAJ., 12, 12, 1753-1756, 1974.
3. B. ROGOWSKI, *Zginanie plyty poprzecznie izotropowej*, Arch. Inż. Łąd. 20, 4, 673-686, 1974.

4. E. REISSNER, *On the theory of bending of elastic plates*, J. Math. Phys., **23**, 184–191, 1944.
5. E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Appl. Mech., **12**, A69–A77, 1945.
6. K. GIRKMANN, R. BEER, *Anwendung der verschärften Platten — theorie nach Erich Reissner auf orthotropen Platten*, Öster. Ing.-Archiv, **12**, 101, 1958.
7. J. MOSSAKOWSKI, *Równania teorii Reissnera dla płyt ortotropowych*, Księga Jubieluszuwa W. Wierzbickiego, PWN, 145–155, Warszawa 1959.
8. S. G. LIECHNICKII, *K teorii anizotropnych tolstych плит*, Izv. Akad. Nauk SSSR, **2**, 142–145, 1959.
9. S. A. AMBARCUMIAN, *Teoria anizotropnych plastin*, Nauka, Moskwa 1967.
10. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
11. A. GAWEŃKI, *Statyka podłużnie niejednorodnej płyty Reissnera o zmiennej grubości*, Rozpr. Inż. **20**, 4, 555–576, 1972.
12. G. JEMIELITA, *Techniczna teoria płyt średniej grubości*, Rozpr. Inż. **23**, 3, 483–499, 1975.
13. P. R. S. SPEARE, K. O. KEMP, *Shear deformation in elastic homogeneous and sandwich plates*, Proc. Instn. Engre, Part 2, 697–710, Dec, 1976.
14. J. KUJAWSKI, *Obrotowo symetryczny stan naprężeń w grubych tarczach o ortotropii cylindrycznej*, Rozpr. Inż. **23**, 3, 473–483, 1975.
15. J. KUJAWSKI, *Techniczna teoria grubych tarcz ortotropowych*, Mech. Teoret. i Stos., **15**, 2, 239–245, 1977.
16. J. KUJAWSKI, *Zginanie płyt ortotropowych średniej grubości*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo, **22**, 1978.
17. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
18. Z. KĄCZKOWSKI, *The method of finite space-time elements in dynamics of structures*, J. Techn. Phys., **16**, 1, 69–84, 1975.
19. Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych*, **22**, 3, 365–378, 1976.
20. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, T. 3, PWN, Warszawa 1966.
21. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady 1972.
22. C. W. PRYOR, R. M. BARKER, *Finite element bending analysis of Reissner plates*, J. Eng. Mech. Div., ASSE, EMG, 967–983, Dec. 1970.
23. V. KOLAR, J. NEMEC, *The efficient finite element analysis of rectangular and skew laminated plates*, Int. J. Num. Meth. Eng. **7**, 3, 1973.
24. E. HINTON, A. RAZZAQUE, O. C. ZIENKIEWICZ, J. D. DAVIES, *A simple finite element solution for plates of homogeneous, sandwich and cellular construction*, Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2, 43–65, Mar. 1975.
25. E. HINTON, *The flexural analysis of laminated composites using a parabolic isometric plate bending element*, Int. J. Num. Meth. Eng., **11**, 174–179, 1977.
26. R. D. MINDLIN, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*, J. Appl. Mech., **18**, 1, 31–38, March 1951.
27. R. TIFFEN, F. P. SAYER, *A moment theory of elastic plates*, Mathematika, **9**, 11–24, 1962.
28. W. Z. WŁASOW, N. N. LEONTIEW, *Balki, płyty i obłoczki na uprugom ośnowanii*, Fizmatgiz, Moskwa 1960.

## Резюме

## ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОЛСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛИТ

В работе выведены уравнения технической теории толстых ортотропных плит, подвергнутых действию переменных во времени поверхностных сил о всех трех составляющих и массовых сил. Поля перемещения и напряжения описаны при помощи шести функций, которые определяем из уравнений движения трехмерного континуум с помощью принципа



виртуальных работ. Выведена матрица жесткости конечного времени-пространственного элемента, что позволяет составить программу расчетов путем стандартной процедуры.

Разработаны примеры, касающиеся плоского деформационного состояния  $\varepsilon_{22}=0$ , которые проверены методом конечных элементов. Проведенный анализ показывает что известные технические теории приводят к очень большим ошибкам в напряжениях  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta=1, 2$ ) в толстых плитах с закрепленными краями, или в тонких, но податливых на поперечные деформации. Предложенная теория показывает довольно хорошее совпадение с точными результатами, даже в плитах с очень большой податливостью на поперечные деформации.

#### SUMMARY

### TECHNICAL THEORY OF THICK ORTHOTROPIC PLATES

Equations of the technical theory of thick orthotropic plates are derived in the case of plates subject to the action of the surface forces variable in time and possessing all three components and of the body forces. The fields of displacement and stress are described in terms of six functions to be determined from the equations of motion of a three-dimensional continuum by means of the virtual work principle. The stiffness matrix of the space-time finite element is derived what enables the application of the standard approach to constructing the computation program.

Several examples are given concerning the plane strain case  $\varepsilon_{22}=0$  which are then verified by the finite element method. The analysis shows that the known technical theories lead to very large errors in calculating the stresses  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta=1, 2$ ) in thick plates with clamped edges, and also in thin plates sensitive to transversal deformations. The theory proposed exhibits a fairly good agreement with the accurate results even in the cases of plates subject to very large transversal deformations.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 sierpnia 1975 r.*

---