

STACJONARNY NADDŹWIĘKOWY OPŁYW WALCA Z PŁASKIM CZOŁEM, GAZEM LEPKIM I PRZEWODZĄCYM CIEPŁO

ANDRZEJ TOPOLIŃSKI i EDWARD WALICKI (BYDGOSZCZ)

W pracy przedstawiono numeryczne rozwiązanie zagadnienia stacjonarnego wzdłużnego opływu cylindra z płaskim czołem strumieniem gazu lepkiego i przewodzącego ciepło. Zagadnienie rozwiązano dla małych liczb Reynoldsa, przy których spełnione są warunki stabilności użytego dwukrokowego schematu różnicowego typu Laxa-Wendorffa.

1. WSTĘP

Naddźwiękowe loty na dużych wysokościach — ze względu na rozrzedzenie gazu — odpowiadają opływowi ciał z niewielkimi liczbami Reynoldsa ($Re < 1000$). W tych warunkach przybliżone równania oparte na teorii warstwy przyściennej nie opisują zjawisk przepływowych z wystarczającą dokładnością. Natomiast wyznaczenie takiego opływu możliwe jest przez rozwiązanie pełnych równań Naviera-Stokesa.

Istotną klasę przepływów — z punktu widzenia zastosowań — stanowią opływy ciał silnie zatępionych z załamaniem tworzących [1, 5, 6, 10 i 11], którym poświęcono stosunkowo niewiele publikacji.

W niniejszej pracy przedstawiono niektóre rozwiązania stacjonarnego, osiowo-symetrycznego przepływu gazu lepkiego, przewodzącego ciepło w pobliżu czoła półmieskończonego walca kołowego o płaskiej podstawie.

2. RÓWNANIA PODSTAWOWE I WARUNKI GRANICZNE

Wykorzystując fakt, że rozważany przepływ jest osiowo-symetryczny, będziemy poszukiwać stacjonarnego rozwiązania opływu czołowej części walca w ograniczonym obszarze całkowania Ω przedstawionym na rys. 1.

Równania opisujące niestacjonarny ruch gazu można przedstawić w następującej bezwymiarowej postaci:

$$(2.1) \quad F_t + A_x + B_r + C + D = 0,$$

$$(2.2) \quad p = (\kappa - 1) \rho e,$$

$$(2.3) \quad \mu = \lambda = [M_\infty \kappa (\kappa - 1) e]^{0.5},$$

gdzie

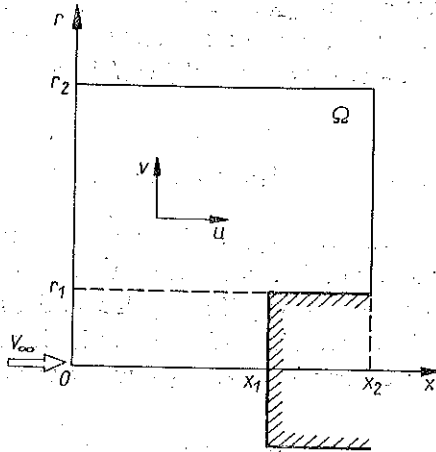
$$F = \rho \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ e + \frac{V^2}{2} \end{bmatrix}, \quad A = \rho \begin{bmatrix} u \\ u^2 + \frac{p}{\rho} \\ uv \\ u \left(e + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix},$$

$$B = \rho \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 + \frac{p}{\rho} \\ v \left(e + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix}, \quad C = \frac{\rho v}{r} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ e + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \end{bmatrix},$$

$$D = -\frac{1}{\text{Re}_\infty} \left[\begin{aligned} & 0 \\ & \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x}, \\ & \frac{\partial u}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{4}{3} \frac{\mu}{r} \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r}, \\ & \frac{\kappa}{Pr} \left(\frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \lambda \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial e}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) u + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) v \right] + \frac{\partial}{\partial r} \mu \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) v + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) u \right] + \frac{\mu}{r} \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) v + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) u \right] \end{aligned} \right]$$

W równaniach (2.1)–(2.3) ρ oznacza gęstość, p ciśnienie, u, v składowe wektora prędkości, e wewnętrzną energię jednostkową, κ wykładnik adiabaty, μ, λ lepkość i przewodność cieplną gazu; Re_∞ , M_∞ , Pr odpowiednio liczby Reynoldsa, Macha i Prandtla strumienia jednorodnego.

Przy sprawdzaniu równań ruchu do bezwymiarowych postaci użyto — jako parametrów odniesienia — parametrów napływającego niezakłóconego strumienia gazu: ρ_∞ , V_∞ , μ_∞ , λ_∞ oraz średnicy walca L .



Rys. 1

Postawione zadanie będziemy rozwiązywać numerycznie metodą «ustalenia» dla podanych niżej warunków granicznych, zakładając na podstawie intuicji i fizycznego sensu zadania, że takie rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne. Z takiego postanowienia sprawy o przydatności uzyskanego rozwiązania powinna zdecydować weryfikacja doświadczalna.

Warunki brzegowe i początkowe

1) Na brzegach $x=0$, $0 \leq r \leq r_2$ i $r=r_2$, $0 \leq x \leq x_2$ przyjmujemy warunki odpowiadające jednorodnemu strumieniowi gazu:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u &= u_\infty = 1, & v &= v_\infty = 0, \\ \rho &= \rho_\infty = 1, & e &= e_\infty = [\kappa(\kappa - 1) M_\infty^2]^{-1}. \end{aligned}$$

2) Na osi symetrii $r=0$, $0 \leq x \leq x_1$ przyjęto warunki symetrii przepływu:

$$(2.5) \quad v = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial e}{\partial r} = 0.$$

3) Na ściankach walca $-x=x_1$, $0 \leq r \leq r_1$ oraz $r=r_1$, $x_1 \leq x \leq x_2$

$$(2.6) \quad u = v = 0, \quad e_w = a e_\infty \quad (a = \text{const}).$$

4) Na granicy $x=x_2$, $r_1 \leq r \leq r_2$ wartości wszystkich funkcji — z racji wspomnianego uprzednio ograniczenia obszaru obliczeniowego — wyznaczone były na drodze ekstrapolacji wielomianami drugiego stopnia z wnętrza obszaru Ω , co odpowiada warunkowi⁽¹⁾

$$(2.7) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0.$$

⁽¹⁾ Założony brak przenoszenia się zaburzeń — od tak przyjętej granicy prawostronnej obszaru — w górę strumienia gazu wyjaśniony został (dla zbliżonych parametrów przepływu) w pracach [2 i 8].

Warunek początkowy odpowiada nagłemu umieszczeniu walca w jednorodnym strumieniu gazu; jest to równoznaczne z zastosowaniem warunków (2.6) na ściankach walca oraz warunków (2.4) w pozostałej części obszaru Ω ($\rho=1$ na ściankach walca).

3. SCHEMAT RÓŻNICOWY. FILTR SHUMANA

Układ równań (2.1)–(2.3), opisujący ciągły rozkład funkcji pola przepływu, zamieniony został dyskretnym ich rozkładem w węzłach wprowadzonej siatki różnicowej. Tak więc w węzłach o współrzędnych $x=mh_1$, $t=lh_2$ oraz $t=n\tau$ określone są funkcje $f_{m,l}=(mh_1, lh_2, n\tau)$. Tutaj h_1 , h_2 , τ są krokami po przestrzeni i czasie; m , l , n oznaczają liczby całkowite określające węzły w odpowiednich kierunkach siatki różnicowej.

Do numerycznego całkowania układu równań (2.1)–(2.3) użyty został jawny, dwustopniowy układ różnicowy [1] drugiego rzędu aproksymacji (τ^2 , h^2 , h^2) wykorzystujący siatkę przeplataną. Zastosowany schemat różnicowy jest warunkowo stabilny. Warunek stabilności modelowego układu równań, otrzymanego po linearyzacji (2.1)–(2.3) jest następujący:

$$(3.1) \quad \tau \geq \min \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{h}{|u|+|v|+c\sqrt{2}}, \frac{h^2 \rho}{8v} \right\},$$

gdzie

$$h = \max(h_1, h_2),$$

$$v = \max \left(\frac{1}{\text{Re}_\infty}, \frac{\kappa}{\text{Re}_\infty \text{Pr}} \right)$$

oraz gdzie c oznacza lokalną prędkość dźwięku.

Do wytlumienia oscylacji funkcji w warstwie uderzeniowej, spowodowanych nieliniową niestabilnością użytego schematu różnicowego, użyto filtra SHUMANA [3, 7 i 9]. Podane niżej wzory oddają zasadę jego działania:

$$(3.2) \quad F_{m,l}^{n+1} = L_h \tilde{F}_{m,l}^n,$$

$$(3.3) \quad \tilde{F}_{m,l}^{n+1} = F_{m,l}^{n+1} + k [\theta_{m\pm 1, l}^x (F_{m\pm 1, l}^{n+1} - F_{m, l}^{n+1}) - \theta_{m-1, l}^x (F_{m, l}^{n+1} - F_{m-1, l}^{n+1}) + \theta_{m, l\pm 1}^r (F_{m, l\pm 1}^{n+1} - F_{m, l}^{n+1}) + \theta_{m, l-1}^r (F_{m, l}^{n+1} - F_{m, l-1}^{n+1})].$$

Równanie (3.2) jest schematycznym przedstawieniem rezultatu otrzymanego przy zastosowaniu operatora różnicowego L_h schematu [1 i 11]. Właściwą filtrację realizuje (3.3), w którym

$$\theta_{m\pm 1, l}^x = \chi^x \left[\frac{\rho_{m\pm 1, l}^{n+1} - \rho_{m, l}^{n+1}}{\max(\rho_{l+1, j}^{n+1} - \rho_{l, j}^{n+1})} \right]^2,$$

$$\theta_{m, l\pm 1}^r = \chi^r \left[\frac{\rho_{m, l\pm 1}^{n+1} - \rho_{m, l}^{n+1}}{\max(\rho_{i, j+1}^{n+1} - \rho_{i, j}^{n+1})} \right]^2.$$

Współczynniki χ wyznaczono we wszystkich węzłach siatki różnicowej; ich wartości zależne były od znaków gradientów gęstości w otoczeniu każdego węzła [7 i 11].

Stałą k dobierano w taki sposób, aby zachowana była liniowa stabilność użytego schematu różnicowego ($0 \leq k \leq 0,25$) oraz prawidłowa relacja między oddziaływaniem filtra i rzeczywistą lepkością gazu

$$\left(k \ll \frac{\tau}{h^2 \text{Re}_\infty} \right).$$

4. WYNIKI OBLICZEŃ

Obliczenia wykonane zostały dla $\text{Re}_\infty = 50$, $\kappa = 1,4$, $\text{Pr} = 0,74$, $x_1 = 1,0$, $x_2 = 1,6$, $r_1 = 0,5$, $r_2 = 2,14$, $h_1 = h_2 = 0,0666667$. Pozostałe parametry przytacza tablica 1. Jako umowny warunek ustalenia przyjęto

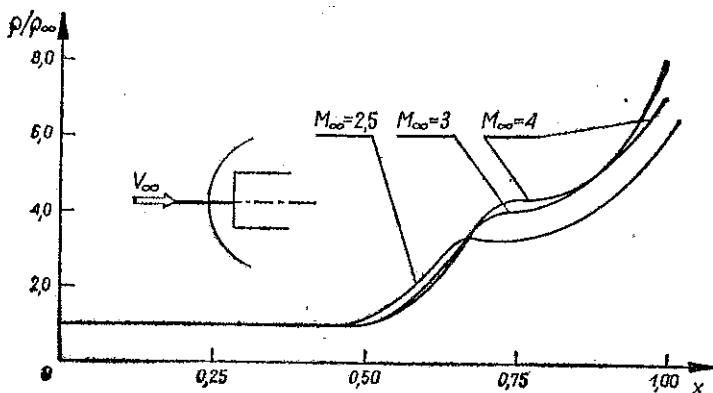
$$\frac{1}{\rho_{m,l}^{n+1}} \frac{|\rho_{m,l}^{n+1} - \rho_{m,l}^n|}{\tau} \leq 0,03.$$

W trakcie obliczeń krok na osi czasu τ był zmienny: mniejszy w trakcie wstępnego formowania się obrazu pola przepływu i zwiększany w końcowych etapach obliczeń, przy czym spełniony był zawsze warunek (3.3).

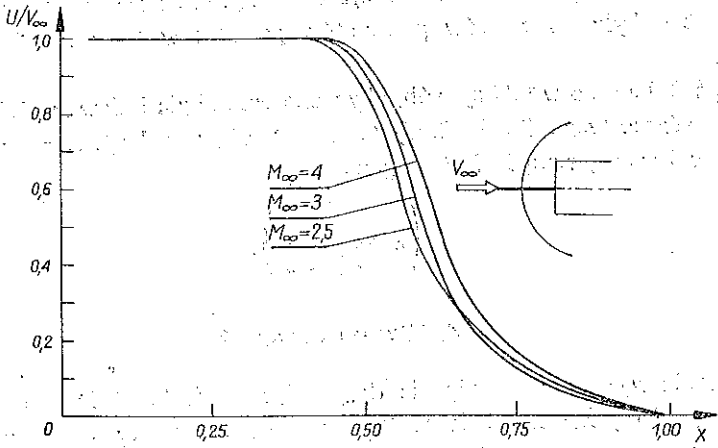
Tablica 1

M_∞	2,5	3,0	4,0
a (2.6)	1,5	1,5	3,0
Czas ustalenia	4,493	4,291	4,004

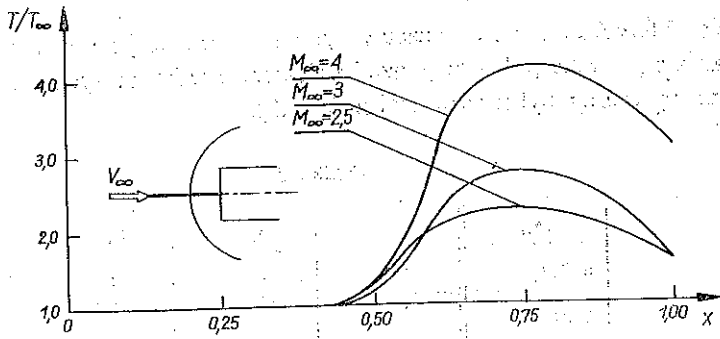
Rysunki 2-8 przedstawiają wykresy niektórych funkcji na wybranych kierunkach pola przepływu.



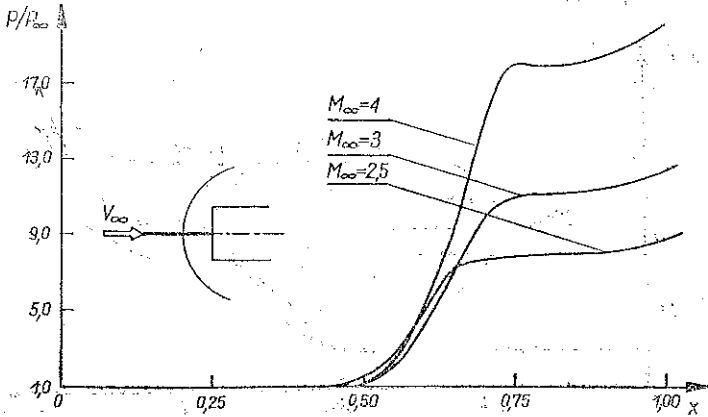
Rys. 2



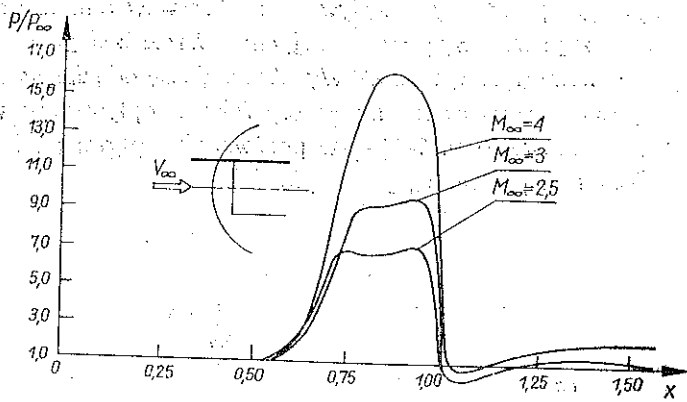
Rys. 3



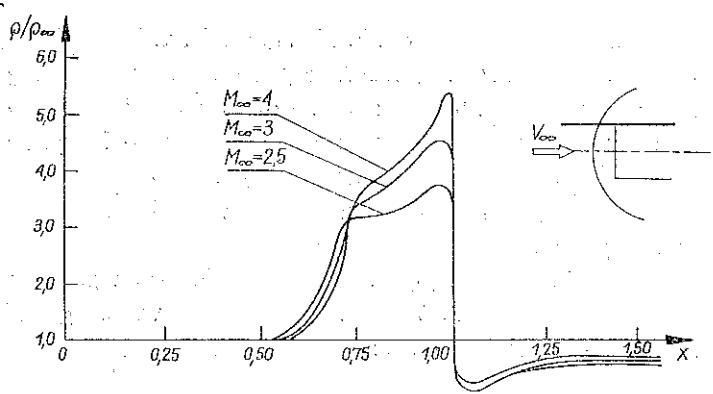
Rys. 4



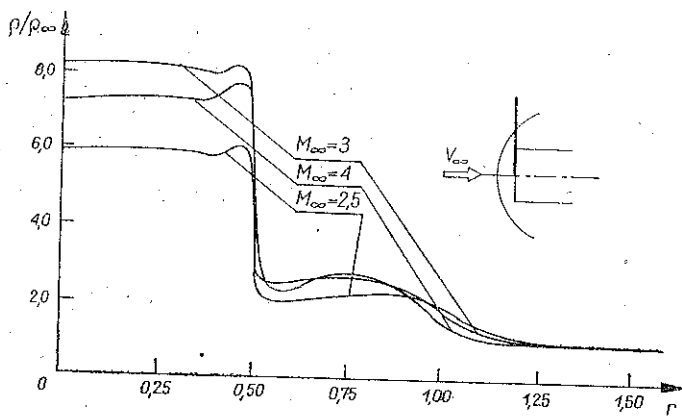
Rys. 5



Rys. 6

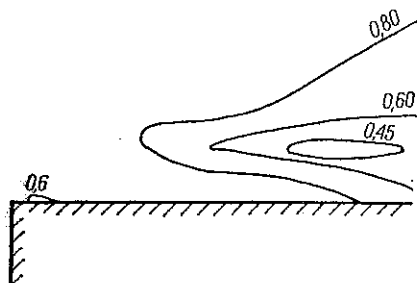


Rys. 7



Rys. 8

Ze względu na przyjęte parametry przepływu — zaobserwować można zlanie się struktury fali uderzeniowej i warstwy przyciennej, chociaż rozróżnienie obu zjawisk przepływowych jest możliwe (rys. 3, 5 do 8). Wyraźne staje się oddziaływanie liczby Macha strumienia jednorodnego oraz temperatury ścianek opływającego walca na grubość warstwy uderzeniowej (rys. 7–9) — w porównaniu opływu analogicznego ciała gazem nielepkiem i nieprzewodzącym ciepło [5].



Rys. 9

Interesującym zjawiskiem jest silne obniżenie się ciśnienia i gęstości (rys. 6 i 7) tuż za narożem ciała oraz powstanie zamkniętych obszarów obniżonej gęstości w pobliżu tworzących walca (rys. 9). Obszar taki obserwowany był dla wszystkich przypadków przepływu, przy czym rozrzedzenie miejscowe było tym silniejsze, im wyższa była liczba Macha strumienia jednorodnego.

W trakcie ustalania się opływu — centrum rozrzedzenia przemieszczało się w pobliżu naroża w prawo.

Wpływ temperatury ścianek na gęstość gazu na nich oraz gradient gęstości przy ściankach pokazują rysunki 2, 7 i 8. Zwraca uwagę wzrost gęstości (także i ciśnienia) na ścianie czołowej walca tuż przed narożem.

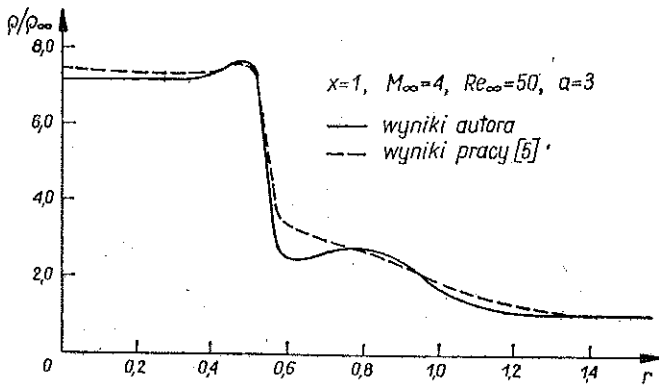
5. UWAGI KOŃCOWE

Rozważania przeprowadzone w pracy pozwalają sformułować pewne uwagi ogólne odnoszące się do strony fizycznej zbadanych przepływów.

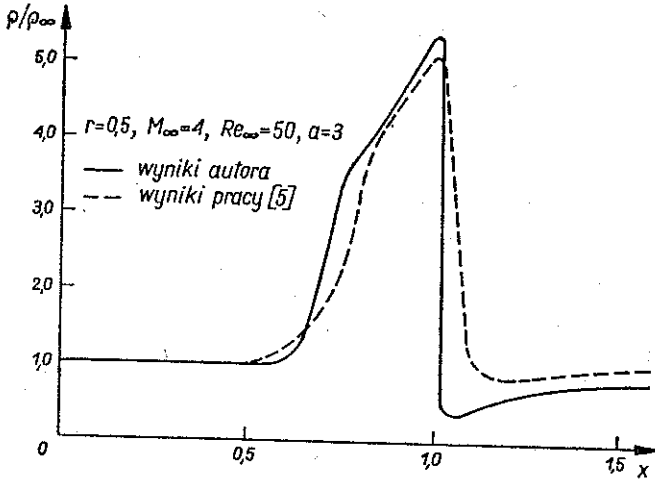
Z analizy rys. 2–9 wynika, że efekty lepkości i przewodności cieplnej gazu i związane z nimi efekty dysypatywne są w badanych przepływach tak znaczne, że powstałe warstwy uderzeniowe zaliczyć należy do «rozmytych». Struktura fali uderzeniowej i warstwy przyciennej przenikają się wzajemnie, oddziaływując na siebie. Wynikiem tego oddziaływania są wartości funkcji pól przepływu na fali uderzeniowej. Gęstość, ciśnienie i temperatura osiągają tutaj niższe wartości niż wynika to z warunków Rankine'a–Hugoniota.

Wpływ liczby Macha przepływu nie zakłóconego oraz temperatury ścianek walca jest istotny na obrazy rozkładów funkcji pola przepływu i wymiary warstw uderzeniowych.

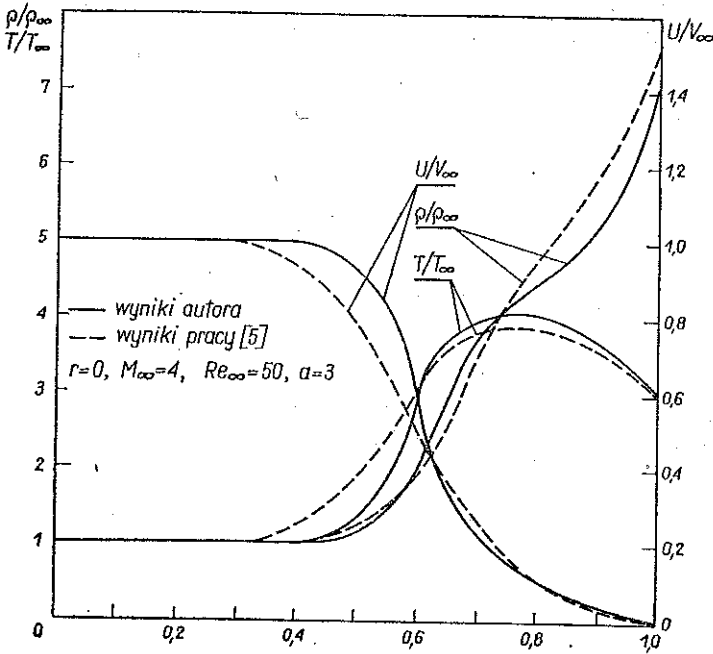
Otrzymane w pracy rezultaty porównano z wynikami uzyskanymi przez KRYŁOWA i PAWŁOWA [5] przy użyciu niejawnego schematu różnicowego typu przemiennych kierunków. Rysunki 10–12 wskazują dużą zgodność pól przepływu.



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. U. THOMMEN, *Numerical integration of the Navier-Stokes equations*, ZAMP, **17**, 5, 1966.
2. Б. М. Павлов, *О расчёте сверхзвукового обтекания тел с использованием полных уравнений Навье Стокса*, Изв. АН СССР, МЖГ, **3**, 1968.
3. A. C. Vliegenthart, *The Shuman filtering operator and the numerical computation of shock waves*, J. Eng. Math., **4**, 4, 1970.
4. О. М. Белоцерковский, Ю. М. Давыдов, *Нестационарный метод «крутых частиц» для газодинамических расчетов*, Журн. Выч. Мат. и Мат. Фи., **2**, 1, 1971.
5. Б. В. Крылов, Б. М. Павлов, *Применение разностной схемы к расчету обтекания торца сверхзвуковым потоком вязкого газа*, Выч. Мет. и Прогр., **19**, Изд. Моск. Унив., Москва 1972.
6. P. J. Roache, *Computational of fluid dynamics*, Albuquerque, N. M., Harmosa Press, 1972.
7. A. Harten, G. Zwas, *Switched numerical Shuman filters for shock calculations*, J. Eng. Math., **6**, 2, 1972.
8. З. А. Емельянова, Б. М. Павлов, *Расчет сверхзвукового вязкого обтекания затупленных конических тел*, Выч. Мет. и Прогр. X X, Изд. Моск. Унив., Москва 1972.
9. K. Srinivas, J. Gururaja, K. K. Prasad, *An assessment of the quality of selected finite difference schemes for time dependent compressible flow*, J. Comp. Phys., **20**, 1976.
10. В. Г. Воронин, В. В. Лунев, А. Н. Никулин, *О стационарной форме тел при их разрушении за счёт аэродинамического нагрева*, Изв. АН СССР МЖГ, **2**, 1978.
11. A. Topoliński, *Analiza numeryczna pewnych przepływów gazu lepkiego*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska 1978 (niepublikowana).

Резюме

СТАЦИОНАРНОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРА С ПЛОСКИМ ТОРЦОМ ВЯЗКИМ И ТЕПЛОПРОВОДЯЩИМ ГАЗОМ

В работе представлено численное решение проблемы стационарного, продольного обтекания цилиндра с плоским торцом потоком сверхзвукового вязкого и теплопроводящего газа. Проблема решена для малых чисел Рейнольдса, которые обеспечивают устойчивость используемой двухшаговой разностной схемы типа Лакса-Вендорффа. Результаты вычислений представлены в форме графиков некоторых функций, характерных для анализируемого течения.

SUMMARY

STEADY SUPERSONIC FLOW OF VISCOUS AND HEAT-CONDUCTING GAS PAST A CYLINDER WITH A FLAT FRONT

In this work the numerical analysis of the problem of a steady longitudinal flow over a cylinder with flat front by stream of viscous and heat-conducting gas is considered.

The solution of this problem was obtained for small values of Reynolds number for which the explicit, two-step Lax-Wendroff type scheme used in work was stable.

The results of calculations were presented on plots of certain functions characteristic of the considered flow.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA, BYDGOSZCZ.

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 lipca 1979 r.