

NIELINIOWE ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI TRÓJWARSTWOWEJ POWŁOKI WALCOWEJ PRZY OBCIĄŻENIACH ZŁOŻONYCH

MARIAN OSTWAŁD (POZNAŃ)

W pracy przedstawiono analizę przebiegu utraty stateczności trójwarstwowej powłoki walcowej poddanej osiowemu ściskaniu, ciśnieniu zewnętrznemu i skręcaniu. Równania stateczności uzyskano na drodze energetycznej. Przy ich wyprowadzaniu przyjęto niesymetryczny kształt przekroju poprzecznego powłoki, tzn. różne grubości i własności fizyczne warstw nośnych. Dla określenia przemieszczeń dowolnych punktów powłoki wykorzystano hipotezę linii łamanej. Nieliniowe równania stateczności rozwiązano metodą Bubnowa–Galerkina. Uzyskano układ trzech nieliniowych równań algebraicznych, który pozwala na wyznaczenie obciążeń krytycznych jako funkcji ugięcia powłoki. Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w postaci wykresów i tablic.

1. WSTĘP

Trójwarstwowe cienkościenne konstrukcje powłokowe charakteryzują się wieloma cennymi zaletami. Zalety te przyczyniają się do coraz szerszego ich stosowania w różnych dziedzinach techniki. Przenoszenie dużych obciążeń przy stosunkowo niedużym ciężarze, własności termoizolacyjne, dźwiękochłonne i inne, możliwe do uzyskania przez odpowiednią konstrukcję warstwy wypełniającej — stwarzają szerokie możliwości ich wykorzystywania przez konstruktorów. Z praktycznego punktu widzenia najbardziej interesujący jest problem, jak zachowują się konstrukcje powłokowe przy obciążeniach złożonych. W niniejszej pracy przedstawiono analizę stateczności trójwarstwowej powłoki walcowej poddanej osiowemu ściskaniu ciśnieniu zewnętrznemu oraz skręcaniu.

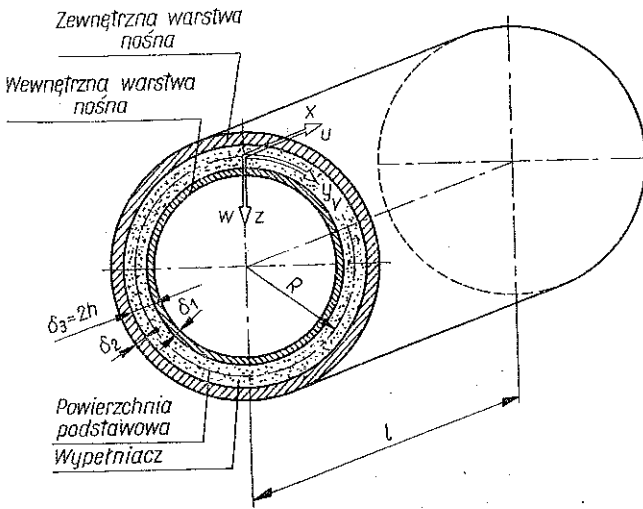
Dla walcowych powłok jednowarstwowych analiza przebiegu utraty stateczności przy obciążeniach złożonych przedstawiona była m.in. przez O. I. TIEREBUSZKĘ [1]. Pierwszą pracę poświęconą obciążeniom złożonym trójwarstwowych powłok walcowych (osiowe ściskanie oraz zginanie) opublikowali C. T. WANG i D. D. SULLIVAN [2]. Stateczność przy ściskaniu, skręcaniu i zginaniu badali C. T. WANG, R. J. VACCARO i D. F. DE SANTO [3]. Z wielu i innych prac warto jeszcze wymienić prace E. H. BAKERA [4], L. M. KURSZINA [5, 6] oraz A. HOLSTONA, A. FELDMANA i D. A. STANGA [7]. Szereg prac na temat powłok trójwarstwowych omawia F. PLANTEMA [8].

W niniejszej pracy wyprowadzono równania, za pomocą których możliwe jest otrzymanie zależności między obciążeniami krytycznymi a parametrami funkcji ugięcia. Odpowiednie przyjęcie funkcji aproksymującej ugięcie powłoki przy utracie

stateczności pozwala na analizę zachowania się powłoki przy obciążeniach prostych (ściskanie, ciśnienie, skręcanie) oraz złożonych jako kombinacji różnych obciążeń prostych.

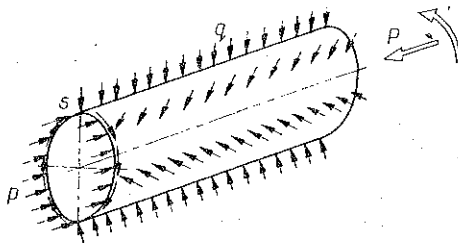
2. ZAŁOŻENIA I PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Rozpatrywana powłoka składa się z dwóch cienkich, izotropowych warstw nośnych o różnych grubościach i własnościach sprężystych, sztywno połączonych z transversalnie izotropową warstwą wypełniającą o znacznie niższych własnościach sprężystych niż warstwy nośne. Przyjęto ortogonalny układ współrzędnych x, y, z (rys. 1) oraz duży stosunek promienia powierzchni podstawowej R do całkowitej



Rys. 1

grubości powłoki ($R/\delta=100$). Powierzchnia podstawowa pokrywa się z powierzchnią środkową wypełniacza. Odkształcenia powłoki są sprężyste i opisane za pomocą nieliniowych związków geometrycznych technicznej teorii powłok. Dla warstw nośnych zastosowano hipotezę Kirchhoffa-Love'a, dla wypełniacza przyjęto liniowy rozkład odkształceń wywołanych naprężeniami stycznymi oraz jego nieściśliwość. Stan dokrytyczny jest bezmomentowy. Powłoka wykazuje ugięcia wstępne (początkowe odchylenia od geometrycznie idealnego kształtu). Powłoka obciążona jest

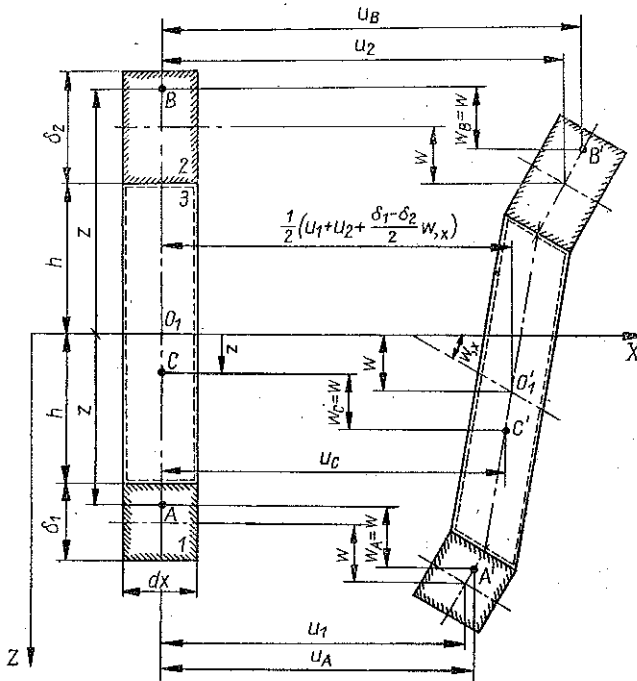


Rys. 2

siłami ściskającymi działającymi w kierunku osiowym, ciśnieniem zewnętrznym w kierunku prostopadłym do powierzchni bocznej oraz momentem skręcającym (rys. 2). Przyjęto, że brzożki powłoki podparte są przegubowo-przesuwnie.

Oporając się na przyjętych założeniach określić można przemieszczenia dowolnych punktów A, B, C powłoki (rys. 3):

$$\begin{aligned}
 w_A &= w, \\
 u_A &= u_1 - [z - (h + 1/2 \delta_1)] w_{,x}, \\
 v_A &= v_1 - [z - (h + 1/2 \delta_1)] w_{,y}, \\
 w_B &= w, \\
 u_B &= u_2 - [z + (h + 1/2 \delta_2)] w_{,x}, \\
 v_B &= v_2 - [z + (h + 1/2 \delta_2)] w_{,y}, \\
 w_C &= w, \\
 u_C &= 1/2 (u_1 + u_2) + 1/4 (\delta_1 - \delta_2) w_{,x} + z/h [1/2 (u_1 - u_2) + 1/4 (\delta_1 + \delta_2) w_{,x}], \\
 v_C &= 1/2 (v_1 + v_2) + 1/4 (\delta_1 - \delta_2) w_{,y} + z/h [1/2 (v_1 - v_2) + 1/4 (\delta_1 + \delta_2) w_{,y}].
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$



Rys. 3

W powyższych wzorach u_1, u_2, v_1, v_2 oznaczają przemieszczenia punktów leżących na powierzchniach środkowych poszczególnych warstw nośnych.

Odształcenia powłoki przy dużych ugięciach określone są znanymi związkami geometrycznymi:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= u_{,x} + 1/2 w_{,x}^2, & \epsilon_y &= v_{,y} - w/R + 1/2 w_{,y}^2, \\
 \gamma_{xy} &= v_{,x} + u_{,y} + w_{,x} w_{,y}, & \gamma_{yz} &= w_{,y} + v_{,z}, & \gamma_{xz} &= w_{,x} + u_{,z}.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Związki między odkształceniami i naprężeniami opisane są prawem Hooke'a. W pracy wykorzystano nowe zmienne, określone w następujący sposób:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_\alpha &= 1/2 (u_1 + u_2), & u_\beta &= 1/2 (u_1 - u_2), \\ v_\alpha &= 1/2 (v_1 + v_2), & v_\beta &= 1/2 (v_1 - v_2). \end{aligned}$$

3. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

Różniczkowe równania równowagi wydzielonego elementu powłoki wyprowadzono wykorzystując zasadę prac przygotowanych. Energię potencjalną wewnętrznych sił sprężystości określono jako sumę energii poszczególnych warstw. Dla warstw nośnych energię potencjalną określono ze wzoru

$$(3.1) \quad U_{1,2} = 1/2 \int_V (\sigma_x^{A,B} \varepsilon_x^{A,B} + \sigma_y^{A,B} \varepsilon_y^{A,B} + \tau_{xy}^{A,B} \gamma_{xy}^{A,B}) dV,$$

dla warstwy wypełniającej

$$(3.1') \quad U_3 = 1/2 \int_V (\sigma_x^c \varepsilon_x^c + \sigma_y^c \varepsilon_y^c + \tau_{xy}^c \gamma_{xy}^c + \tau_{xz}^c \gamma_{xz}^c + \tau_{yz}^c \gamma_{yz}^c) dV.$$

Praca sił zewnętrznych dla obciążeń przedstawionych na rys. 2 wynosi

$$(3.2) \quad A = \int_0^1 \int_0^{2\pi R} q w dx dy + \left[\int_0^{2\pi R} \int_{-(h+\delta_2)}^{(h+\delta_1)} \frac{N_x^0}{\delta} u(z) dy dz + \int_0^{2\pi R} \int_{-(h+\delta_2)}^{(h+\delta_1)} \frac{N_{xy}^0}{\delta} v(z) dy dz \right]_0^1,$$

gdzie $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ oznacza całkowitą grubość powłoki oraz

$$N_x^0 = -\frac{P}{2\pi R}, \quad N_{xy}^0 = \frac{M_s}{2\pi R^2}$$

obciążenie zewnętrzne.

Wykorzystując zasadę prac przygotowanych

$$(3.3) \quad \delta (U_1 + U_2 + U_3 - A) = 0,$$

otrzymano ogólne równanie wariacyjne rozpatrywanego problemu.

Podstawiając do równania (3.3) wielkości (3.1) i (3.2) oraz (2.1), (2.2) i (2.3) i przekształcając otrzymane równanie zgodnie z zasadami rachunku wariacyjnego, otrzymano układ pięciu równań równowagi oraz układ sześciu warunków brzegowych. Definiując następnie siły wewnętrzne, działające w poszczególnych przekrojach powłoki, przekształcono równania równowagi w układ tzw. podstawowych równań równowagi. Wprowadzono tutaj funkcje naprężeń oraz funkcje przemieszczeń.

Dzięki przyjęciu funkcji naprężeń F , siły normalne i styczne przedstawić można następująco:

$$(3.4) \quad N_x = F_{,yy}, \quad N_y = F_{,xx}, \quad N_{xy} = -F_{,xy}.$$

Funkcje przemieszczeń określone są wzorami:

$$(3.5) \quad \psi = u_{\beta, x} + v_{\beta, y},$$

$$(3.6) \quad \varphi = u_{\beta, y} - v_{\beta, x}.$$

Wykorzystując równanie nierozdzielności odkształceń oraz wprowadzając do wyrazów nieliniowych ugięcie początkowe w_0 , otrzymuje się następujący układ równań podstawowych:

$$(3.7) \quad K_1 \nabla^2 \nabla^2 w + K_2 \nabla^2 \nabla^2 F + K_3 \nabla^2 \psi + 1/R F_{,xx} + L(F, w + w_0) + q = 0,$$

$$(3.8) \quad \psi - K_4 \nabla^2 \psi + t \nabla^2 w - h/2G_s (C_2 \nabla^2 \nabla^2 F + C_3 \nabla^2 \nabla^2 w) = 0,$$

$$(3.9) \quad l/B^* \nabla^2 \nabla^2 F + K_5 \nabla^2 \nabla^2 w - C_2 \nabla^2 \psi + 1/2 L(w + 2w_0, w) + l/R w_{,xx} = 0,$$

$$(3.10) \quad \varphi - K_6 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Równanie (3.7) jest równaniem równowagi, równanie (3.8) otrzymano z warunku nierozdzielności przemieszczeń, równania (3.9) i (3.10) określić można jako równania zgodności odkształceń powłoki trójwarstwowej. Równanie (3.10), zawierające jedynie funkcję φ charakteryzującą wzajemne obroty zewnętrznych warstw nośnych, nie jest sprzężone z pozostałymi trzema równaniami. Posiada ono rozwiązanie o charakterze efektu brzegowego [9], w związku z czym w rozwiązywaniu szeregu zagadnień stateczności może być pominięte. W niniejszej pracy założono, że rozwiązaniem równania (3.10) jest $\varphi = 0$ i wykorzystano tylko trzy pierwsze równania podstawowe.

W równaniach (3.7)–(3.9) występują niewiadome funkcje: funkcja naprężeń $F = F(x, y)$, funkcja przemieszczeń $\psi = \psi(x, y)$, funkcja ugięcia $w = w(x, y)$ oraz funkcja ugięcia początkowego $w_0 = w_0(x, y)$.

Wykorzystano operatory

$$\nabla^2 f = f_{,xx} + f_{,yy},$$

$$L(f_1, f_2) = f_{1,xx} f_{2,yy} + f_{1,yy} f_{2,xx} - 2f_{1,xy} f_{2,xy}.$$

Dla skrócenia zapisu wprowadzono szereg oznaczeń:

sztywność rozciągania warstwy ($i=1, 2, 3$)

$$B_i = \frac{E_i \delta_i}{1 - \nu_i^2};$$

sztywność rozciągania powłoki trójwarstwowej

$$B = \sum_1^3 B_i;$$

sprowadzony współczynnik Poissona

$$\nu = \frac{\sum_1^3 B_i \nu_i}{B},$$

$$B^* = B(1 - \nu^2);$$

szttywność zginania warstw nośnych ($i=1, 2$)

$$D_i = \frac{E_i \delta_i^3}{12 (1-\nu_i^2)};$$

szttywność zginania warstwy wypełniającej

$$D_3 = B_3 \left[\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{4} \right)^2 + 1/3 \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{4} \right)^2 \right];$$

szttywność zginania powłoki trójwymiarowej

$$D = \sum_1^2 D_i$$

oraz

$$B_{12} = B_1 - B_2,$$

$$B'_{12} = B_1 \nu_1 - B_2 \nu_2,$$

$$K = B_1 + B_2 + 1/3 B_3,$$

$$K' = B_1 \nu_1 + B_2 \nu_2 + 1/3 B_3 \nu_3,$$

$$t = h + 1/4 (\delta_1 - \delta_2),$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia: moduły sprężystości podłużnej i współczynnik Poissona poszczególnych warstw ($i=1, 2, 3$) — E_i, ν_i , moduł odkształcenia postaciowego wypełniacza G_s , grubości poszczególnych warstw ($i=1, 2, 3$) — δ_i , $h=1/2 \delta_3$, promień powierzchni podstawowej R .

Pozostałe oznaczenia:

$$C_1 = 1/B^* (B_{12} - \nu B'_{12}),$$

$$C_2 = 1/B^* (B'_{12} - \nu B_{12}),$$

$$C_3 = -B_3 1/4 (\delta_1 - \delta_2) (C_1 + \nu_3 C_2) + 1/3 B_3 1/4 (\delta_1 + \delta_2),$$

$$K_1 = -D + 1/B^* B_3^2 \nu_3 \left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{4} \right)^2 (1 - \nu \nu_3) (\nu_3 - \nu),$$

$$K_2 = 1/B^* B_3 (\nu - \nu_3) 1/4 (\delta_1 - \delta_2) + t C_1,$$

$$K_3 = t (K - B_{12} C_1 - B'_{12} C_2) - B_3 1/4 (\delta_1 - \delta_2) (C_1 + \nu_3 C_2) + 1/3 B_3 1/4 (\delta_1 + \delta_2),$$

$$K_4 = h/2 G_s (K - B_{12} C_1 - B'_{12} C_2),$$

$$K_5 = 1/4 B^* B_3 (\nu - \nu_3) (\delta_1 - \delta_2),$$

$$K_6 = K - K' - (B_{12} - B'_{12}) (C_1 - C_2).$$

4. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ STATECZNOŚCI

Dla rozwiązania zagadnienia stateczności trójwarstwowej powłoki walcowej, poddanej obciążeniu złożonemu, przyjęto funkcję aproksymującą ugięcie powłoki w następującej postaci [1 i 10]:

$$(4.1) \quad w = f_1 \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{i(y+kx)}{R} + f_3 \sin^2 \frac{j\pi x}{l},$$

gdzie f_1, f_2, f_3 są to nieznanne parametry funkcji ugięcia, liczba półfal w kierunku osi powłoki i fal obwodowych przy ściskaniu i ciśnieniu — m, n , liczba fal obwodowych i tangens kąta między kierunkiem fali spiralnej i osią powłoki przy skręcaniu — i, k , dla ściskania — $j=m$, dla ciśnienia i skręcania — $j=1$.

Przyjęta postać funkcji spełnia warunek okresowości i zerowania się ugięć na brzegach powłoki. Ugięcie początkowe przyjęto w postaci

$$(4.2) \quad w_0 = f_{10} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{ny}{R}.$$

Podstawiając całkowite ugięcie ($w + w_0$) do równań (3.8) i (3.9) wyznaczono postać funkcji naprężeń F oraz funkcji przemieszczeń ψ . Do funkcji naprężeń F wprowadzono wyrazy uwzględniające naprężenia stanu błonowego od obciążeń zewnętrznych. Podstawiając funkcje w, F, ψ do równania równowagi (3.7), stosując do jego rozwiązania metodę Bubnowa—Galerkina, otrzymuje się układ trzech nieliniowych równań algebraicznych określających zależności między obciążeniami działającymi na powłokę a parametrami funkcji ugięcia:

$$(4.3) \quad \zeta_3 F_1 + \zeta_1 (\zeta_1 + 2\zeta_{10}) F_2 + \zeta_2^2 F_3 + \zeta_3^2 F_4 + F_5 + m^2 p^* + \frac{m^2 \gamma^2}{H} q^* = 0,$$

$$(4.4) \quad (\zeta_1 + \zeta_{10})^2 F_6 + \zeta_3 F_7 + \zeta_2^2 F_8 + \zeta_3^2 F_9 + F_{10} + (\beta^2 k^2 + l) p^* + \frac{\beta^2}{H} q^* + 2\beta^2 k s^* = 0,$$

$$(4.5) \quad (\zeta_1 + 2\zeta_{10}) \zeta_1 F_{11} + (\zeta_1 + \zeta_{10})^2 F_{12} + (\zeta_1 + \zeta_{10})^2 \zeta_3 F_{13} + \\ + \zeta_2^2 F_{14} + \zeta_2^2 \zeta_3 F_{15} + \zeta_3 F_{16} + \zeta_3 j^2 p^* = 0,$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia: bezwymiarowe parametry funkcji ugięcia ($i=1, 2, 3$) — $\zeta_i = f_i/\delta$, $\zeta_{10} = f_{10}/\delta$; bezwymiarowe parametry obciążeń $p^* = p l^2 / B^* \delta$, $q^* = q l^4 / B^* \delta^3$, $s^* = s l^2 / B \delta$, średnia wartość naprężeń ściskających $p = P / 2\pi R \delta$, średnia wartość naprężeń stycznych $s = M_s / 2\pi R^2 \delta$, intensywność obciążenia powierzchniowego w kierunku normalnym (ciśnienie zewnętrzne) q ; $\gamma = n l / m \pi R$, $\beta = i l / \pi R$, bezwymiarowy parametr charakteryzujący wymiary geometryczne powłoki $H = l^2 / R \delta$, współczynniki zależne od wymiarów i własności sprężystych powłoki oraz od parametrów funkcji ugięcia ($j=1-16$) — F_j . Układ równań (4.3)—(4.5) umożliwia analizę utraty stateczności powłoki przy obciążeniach prostych oraz przy obciążeniach złożonych jako kombinacji różnych obciążeń prostych. Możliwe jest również wykorzystanie tych równań dla analizy stateczności walcowych powłok jednowarstwowych. Otrzymane wówczas równania są zgodne z równaniami wprowadzonymi przez O. I. TIEREBUSZKĘ [1].

5. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Wykorzystując otrzymane równania przeprowadzono obliczenia numeryczne. W niniejszej pracy przedstawiono wyniki dla powłoki o symetrycznych warstwach nośnych ($\delta_1 = \delta_2$, $E_1 = E_2$) o idealnym kształcie geometrycznym ($\zeta_{10} = 0$), o różnej długości, poddanej obciążeniom prostym. Wymiary oraz własności sprężyste poszczególnych warstw są następujące:

- 1) promień powierzchni podstawowej $R = 1,20$ m,
 - 2) grubość warstw nośnych $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$ cm,
 - 3) grubość warstwy wypełniającej $\delta_3 = 1,0$ cm,
 - 4) własności sprężyste warstw nośnych $E_1 = E_2 = 7,06 \cdot 10^9$ MN/m², $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$ (dural) oraz
 - 5) własności sprężyste warstwy wypełniającej $E_3 = 54$ MN/m², $G = 26,5$ MN/m², $\nu_3 = 0$ (piankowe tworzywo sztuczne).
- Długość powłoki określona jest za pomocą parametru $\lambda = l/R$.

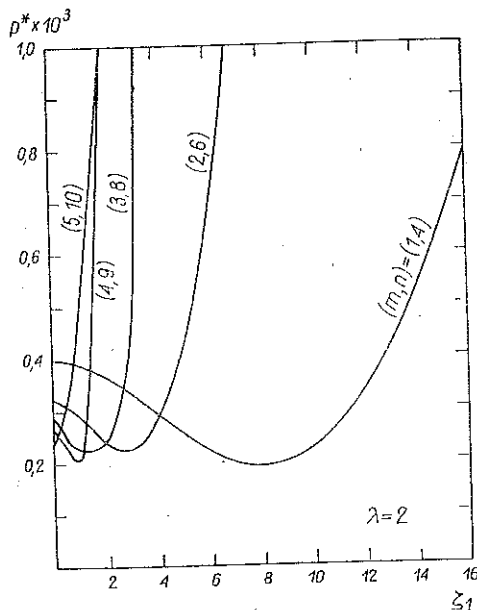
5.1 Ściskanie siłami osiowymi

Z równań (4.3) i (4.4) przy $\zeta_2 = 0$, $q^* = s^* = 0$ otrzymuje się równanie określające p^* w zależności od parametrów funkcji ugięcia:

$$(5.1) \quad p^* = -\frac{1}{m^2} (\zeta_2^2 F_4 + \zeta_3 F_1 + \zeta_1^2 F_2 + F_5).$$

Związek między parametrami ζ_1 i ζ_3 przedstawia równanie:

$$(5.2) \quad \zeta_3^3 F_4 + \zeta_3^2 F_1 + \zeta_3 [\zeta_1^2 (F_2 - F_{13}) + F_5 - F_{16}] - \zeta_1^2 (F_{11} + F_{12}) = 0.$$



Rys. 4

Jako dolne obciążenie krytyczne p_a^* przyjęto najmniejszą wartość p^* dla danej powłoki przy różnych kombinacjach m i n , jako górne obciążenie krytyczne — jak wyżej z dodatkowym założeniem $\zeta_1=0$. Wyniki obliczeń przedstawia tablica 1 oraz rys. 4 (dla $\lambda=2$). Z otrzymanych wyników można wnioskować o niewielkim wpływie ilości półfal m na dolne obciążenie krytyczne p_a^* w zakresie długości powłoki $\lambda=1-5$.

Tablica 1

| Ściskanie osiowe | | | | | | | | | | | | |
|----------------------|----------|-------------------------------|-----|-------|----------|-------------------------------|-----|-------|-----------|-----------|-----------|--|
| λ | p_g^* | p_g [MN/m ²] | m | n | p_a^* | p_a [MN/m ²] | m | n | ζ_1 | ζ_3 | p_g/p_a | |
| 1 | 79,9 | 94,4 | 1 | 7 | 44,0 | 52,0 | 1 | 6 | 3,50 | 1,48 | 1,815 | |
| 2 | 355,1 | 104,9 | 1 | 5 | 192,7 | 56,9 | 1 | 4 | 8,00 | 2,85 | 1,843 | |
| 3 | 817,8 | 107,4 | 1 | 4 | 486,0 | 63,8 | 1 | 4 | 8,50 | 2,99 | 1,683 | |
| 4 | 1581,2 | 116,8 | 1 | 3 | 834,3 | 61,6 | 1 | 3 | 14,00 | 4,53 | 1,895 | |
| 5 | 2318,8 | 109,6 | 1 | 3 | 1385,3 | 65,5 | 1 | 3 | 14,50 | 4,79 | 1,674 | |
| Ciśnienie zewnętrzne | | | | | | | | | | | | |
| λ | q_g^* | q_g [MN/m ²] | m | n | q_a^* | q_a [MN/m ²] | m | n | ζ_1 | ζ_3 | q_g/q_a | |
| 1 | 1383,7 | 0,164 | 1 | 9 | 1322,2 | 0,156 | 1 | 8 | 1,75 | 0,67 | 1,047 | |
| 2 | 12908,4 | 0,095 | 1 | 6 | 11836,1 | 0,087 | 1 | 5 | 4,50 | 1,38 | 1,091 | |
| 3 | 46643,6 | 0,068 | 1 | 5 | 41810,5 | 0,061 | 1 | 4 | 7,00 | 2,04 | 1,116 | |
| 4 | 110847,6 | 0,051 | 1 | 4 | 102457,0 | 0,047 | 1 | 4 | 6,75 | 1,87 | 1,082 | |
| 5 | 234103,7 | 0,044 | 1 | 4 | 206015,5 | 0,039 | 1 | 3 | 12,00 | 3,29 | 1,136 | |
| Skrećanie | | | | | | | | | | | | |
| λ | s_g^* | s_g [MN/m ²] | i | k | s_a^* | s_a [MN/m ²] | i | k | ζ_2 | s_g/s_a | | |
| 1 | 23,6 | 27,9 | 17 | 0,602 | 22,9 | 27,1 | 15 | 0,602 | 1,25 | 1,030 | | |
| 2 | 87,0 | 25,7 | 9 | 0,423 | 78,9 | 23,3 | 9 | 0,423 | 3,50 | 1,103 | | |
| 3 | 177,8 | 23,4 | 7 | 0,347 | 156,1 | 20,5 | 7 | 0,347 | 5,75 | 1,139 | | |
| 4 | 290,4 | 21,5 | 6 | 0,304 | 250,5 | 18,5 | 6 | 0,304 | 7,75 | 1,160 | | |
| 5 | 424,6 | 20,1 | 5 | 0,262 | 358,2 | 16,9 | 5 | 0,262 | 10,50 | 1,185 | | |

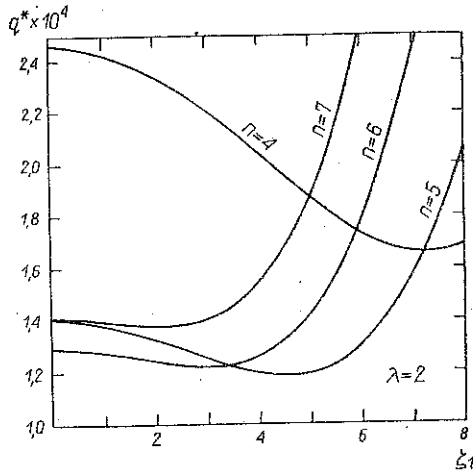
5.2 Ciśnienie zewnętrzne

Przyjmując w (4.3) i (4.4) $\zeta_2=0$, $p^*=s^*=0$ oraz $m=j=1$ [10], otrzymuje się (tak samo jak dla ściskania) dwa wzory:

$$(5.3) \quad q^* = -\frac{H}{\gamma^2} (\zeta_3^2 F_4 + \zeta_3 F_7 + \zeta_1^2 F_2 + F_5),$$

$$(5.4) \quad \zeta_3 = -\frac{\zeta_1^2 (F_{11} + F_{12})}{\zeta_1^2 F_{13} + F_{16}}.$$

Wyniki obliczeń przedstawiono w tablicy 1 oraz na rys. 5.



Rys. 5

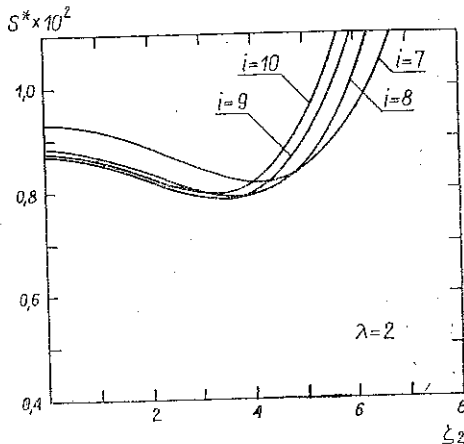
5.3. Skręcanie

Przyjmując w równaniach (4.4) i (4.5) $\zeta_1 = 0$, $p^* = q^* = 0$, oraz $j=1$ [10], otrzymuje się, tak jak poprzednio, dwa równania:

$$(5.5) \quad s^* = -\frac{1}{2\beta^2 k} (\zeta_3^2 F_9 + \zeta_3 F_7 + \zeta_2^2 F_8 + F_{10}),$$

$$(5.6) \quad \zeta_3 = -\frac{\zeta_2^2 F_{14}}{\zeta_2^2 F_{15} + F_{16}}.$$

Wartości parametru k przyjęto na podstawie pracy E. I. GRIGOLJUKA i P. P. CZULKOVA [9] oraz [11]. Otrzymane wyniki przedstawia rys. 6.



Rys. 6

5.4. Ściskanie osiowe i ciśnienie zewnętrzne

Z równań (4.3) oraz (4.5), przy $\zeta_2=0$, $s^*=0$, otrzymuje się równanie określające wartość bezwymiarowego parametru ciśnienia zewnętrznego przy jednoczesnym działaniu obu obciążeń w zależności od parametrów funkcji ugięcia oraz wartości bezwymiarowego parametru osiowej siły ściskającej:

$$(5.7) \quad q_{sc}^* = -\frac{H}{m^2 \gamma^2} (m^2 p_{sc}^* + \zeta_3^2 F_4 + \zeta_3 F_1 + \zeta_1^2 F_2 + F_5).$$

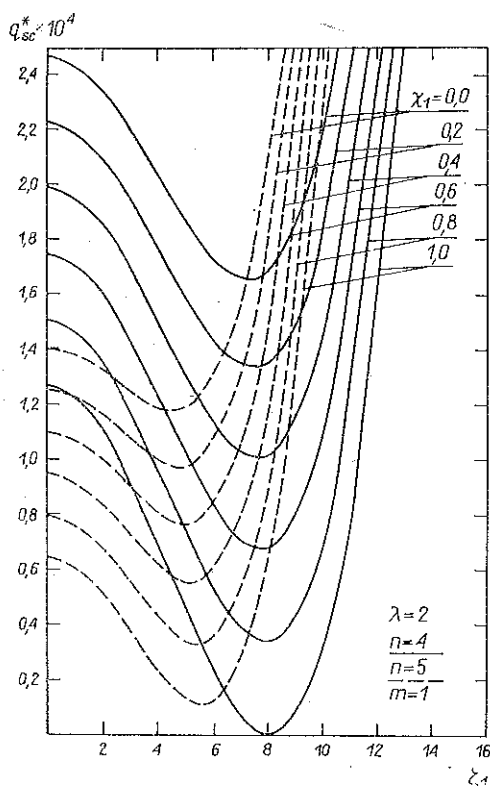
Związek między parametrami ζ_1 i ζ_3 przedstawia równanie

$$(5.8) \quad \zeta_3 = -\frac{\zeta_1^2 (F_{11} + F_{12})}{\zeta_1^2 F_{13} + F_{16} + m^2 p_{sc}^*}.$$

Wartość p_{sc}^* przyjmowano do obliczeń wg zależności

$$(5.9) \quad p_{sc}^* = \chi_1 p_d^*,$$

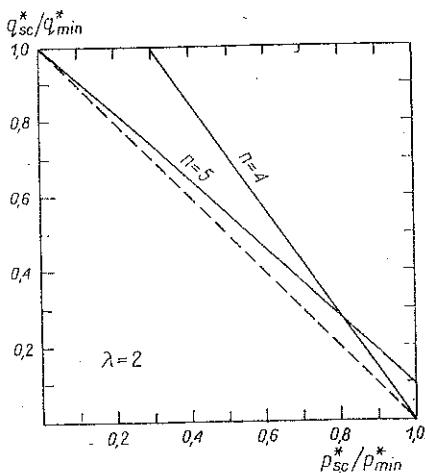
przy czym p_d^* oznacza dolne obciążenie krytyczne dla ściskania osiowego (wg tablicy 1), $\chi_1=0-1,0$.



Rys. 7

Wyznaczając z (5.8) wartość parametru $\zeta_3 = f(\zeta_1, p_{sc}^*)$ i podstawiając do (5.7) otrzymano zależność $q_{sc}^* = f(\zeta_1)$ dla określonej wartości siły ściskającej. Następnie związek między ciśnieniem a ściskaniem przedstawiono w postaci stosunków dolnych obciążeń krytycznych q_{sc}^*/q_d^* oraz p_{sc}^*/p_d^* . Na rys. 7 i 8 przedstawiono powyższe zależności w postaci wykresów dla powłoki o długości $\lambda=2$. Linia przerywana zaznaczono na rys. 8 związek między poszczególnymi obciążeniami opisany liniowym równaniem

$$(5.10) \quad \frac{p_{sc}^*}{p_d^*} + \frac{q_{sc}^*}{q_d^*} = 1.$$



Rys. 8

Równanie to przyjmowane dla powłok jednowarstwowych [1] i [10]—dla powłok trójwarstwowych zmniejsza obszar stateczności. Z przeprowadzonych dodatkowo obliczeń wynika, że równanie (5.10) poprawne jest dla powłoki o długości $\lambda=5$. Dla powłok krótszych lepsze przybliżenie daje równanie postaci

$$(5.11) \quad \frac{p_{sc}^*}{p_d^*} + \left(\frac{q_{sc}^*}{q_d^*} \right)^{1,2} = 1.$$

5.5. Skręcanie, ściskanie osiowe i ciśnienie zewnętrzne

Z równań (4.4) i (4.5) przy $\tau_1=0$ oraz $j=1$ otrzymuje się związek między bezwymiarowym parametrem momentu skręcającego s_{ss}^* przy jednoczesnym działaniu wszystkich obciążeń i parametrami funkcji ugięcia oraz bezwymiarowymi parametrami siły ściskającej p_{ss}^* i ciśnienia q_{ss}^* :

$$(5.12) \quad s_{ss}^* = -\frac{1}{2\beta^2 k} \left[(\beta^2 k^2 + 1) p_{ss}^* + \frac{\beta^2}{H} q_{ss}^* + \zeta_3^2 F_9 + \zeta_3 F_7 + \zeta_2^2 F_8 + F_{10} \right].$$

Związek między parametrami funkcji ugięcia jest następujący:

$$(5.13) \quad \zeta_3 = - \frac{\zeta_2^2 F_{14}}{\zeta_2^2 F_{15} + F_{16} + p_{ss}^*}.$$

Wartości obciążeń dodatkowych wyznaczyć można ze wzorów:

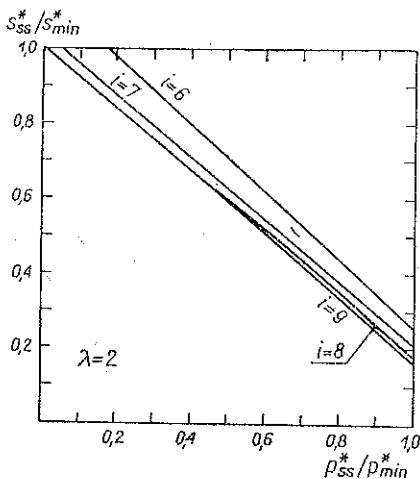
$$(5.14) \quad p_{ss}^* = \chi_2 p_d^*, \quad q_{ss}^* = \chi_3 q_d^*,$$

gdzie p_d^* i q_d^* oznaczają dolne obciążenia krytyczne dla powłoki ściskanej i dla powłoki obciążonej ciśnieniem zewnętrznym ($\chi_2, \chi_3 = 0-1,0$). Równanie (5.12) pozwala na rozpatrzenie trzech następujących wariantów obciążeń złożonych:

- A. $p_{ss}^* = \chi_2 p_d^*, \quad q_{ss}^* = 0,$
- B. $p_{ss}^* = 0, \quad q_{ss}^* = \chi_3 q_d^*,$
- C. $p_{ss}^* = \chi_2 p_d^*, \quad q_{ss}^* = \chi_3 q_d^*.$

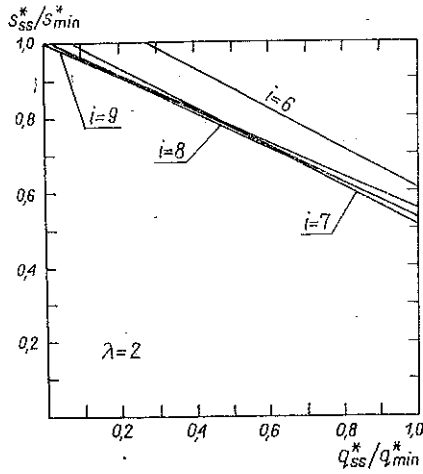
Wariant A dotyczy powłoki obciążonej momentem skręcającym i ściskaniem, wariant B — momentem skręcającym i ciśnieniem, wariant C jest ogólnym przypadkiem obciążenia złożonego.

Zależności między rozpatrywanymi obciążeniami przedstawiono w postaci stosunków bezwymiarowych s_{ss}^*/s_d^* oraz p_{ss}^*/p_d^* i q_{ss}^*/q_d^* , gdzie s_d^* oznacza dolne obciążenie krytyczne dla powłoki skręcającej. Na rys. 9 przedstawiono obszar statecz-



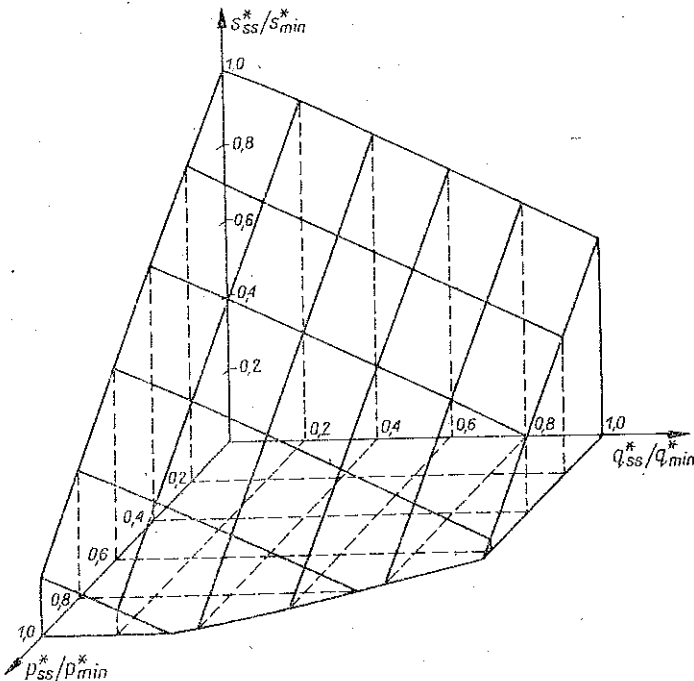
Rys. 9

ności dla powłoki o długości $\lambda=2$ obciążonej momentem skręcającym i siłą ściskającą (wariant A). Z wykresu odczytać można dolną wartość s_{ss}^* dla dowolnej siły ściskającej p_{ss}^* . Na rys. 10 przedstawiono obszar stateczności dla powłoki o długości $\lambda=2$ obciążonej momentem skręcającym i ciśnieniem zewnętrznym (wariant B). Rysunek 11 przedstawia obszar stateczności odpowiadający jednoczesnemu działaniu na powłokę o długości $\lambda=2$ momentu skręcającego, siły osiowej i ciśnienia



Rys. 10

zewnątrznego (wariant C). Obszar stateczności ograniczony jest powierzchnią lekko wypukłą na zewnątrz w stosunku do początku układu współrzędnych. Wszystkie wykresy ograniczone są do wartości p_{ss}^* i q_{ss}^* nie przekraczających wartości dolnych obciążeń krytycznych dla tych obciążeń działających na powłokę oddzielnie.



Rys. 11

Przedstawione na rys. 9, 10, 11 obszary stateczności mają inny kształt niż na rys. 8. Wynika to z postaci funkcji (4.1) aproksymującej ugięcie powłoki: skręcanie opisane jest za pomocą innego wyrażenia niż ściskanie i ciśnienie.

Obszar stateczności przy skręcaniu i ściskaniu można w przybliżeniu ograniczyć za pomocą linii opisanej następującym równaniem:

$$(5.15) \quad \frac{p_{ss}^*}{p_d^*} + \left(\frac{s_{ss}^*}{s_d^*} \right)^{4/3} = 1.$$

Równanie to ogranicza obszar stateczności powłoki dla sił osiowych bliskich p_d^* .

Dla skręcania i ciśnienia zewnętrznego linia ograniczająca obszar stateczności może być opisana równaniem

$$(5.16) \quad \frac{q_{ss}^*}{q_d^*} + \left(\frac{s_{ss}^*}{s_d^*} \right)^{2,75} = 1.$$

Równanie (5.16) nieznacznie powiększa obszar stateczności dla mniejszych wartości q_{ss}^* i ogranicza ten obszar dla ciśnienia q_{ss}^* bliskiego q_d^* .

Powierzchnię ograniczającą obszar stateczności w przypadku jednoczesnego działania ściskania, ciśnienia i skręcania również można aproksymować za pomocą równania opisującego związek pomiędzy poszczególnymi obciążeniami. Dobór tego równania jest zagadnieniem złożonym przede wszystkim ze względu na kształt obszaru stateczności. Dla powłok o długościach $\lambda=2$ i $\lambda=4$ dla parametrów χ_2 , $\chi_3 \in (0; 0,2 >$ dobrą zgodność z wynikami obliczeń daje równanie:

$$(5.17) \quad \left(\frac{p_{ss}^*}{p_d^*} \right)^{1,1} + \frac{q_{ss}^*}{q_d^*} + \left(\frac{s_{ss}^*}{s_d^*} \right)^{1,6} = 1.$$

Dla $\chi_2, \chi_3 > 0,2$ równanie (5.17) ogranicza obszar stateczności. Dla parametrów $\chi_2, \chi_3 \in (0,2, 0,5)$ przyjąć można

$$(5.18) \quad \frac{p_{ss}^*}{p_d^*} + \frac{q_{ss}^*}{q_d^*} + \left(\frac{s_{ss}^*}{s_d^*} \right)^2 = 1.$$

Dla $\chi_2, \chi_3 > 0,5$ równanie (5.18) znacznie ogranicza obszar stateczności. Równanie (5.18) zgodne jest z równaniem podanym dla obciążeń złożonych przez E. I. GRIGOLJUKA [9]. Równanie to jest również przyjmowane dla powłok jednowarstwowych [10]. Przyjęcie innej postaci równań (5.17) i (5.18), opisujących powierzchnię ograniczającą obszar stateczności trójwarstwowych powłok walcowych w sposób bardziej precyzyjny, wymaga dodatkowych obliczeń i stanowić może ciekawy temat do dalszych rozważań.

6. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona w niniejszej pracy analiza stateczności trójwarstwowej powłoki walcowej pozwala na określenie obciążeń krytycznych dla prostych przypadków obciążenia oraz dla obciążeń złożonych. Otrzymane zależności po pewnych uprosz-

Tablica 2

| Obciążenie | λ | Wg [9] | Różnica % | Wg [8] | Różnica % |
|---|-----------|--------|-----------|--------|-----------|
| Ściskanie p_0 [MN/m ²] | 2 | 104,9 | 0,00 | 104,5 | 0,38 |
| | 4 | 116,8 | 0,00 | 116,3 | 0,43 |
| Ciśnienie λ_0 [MN/m ²] | 2 | 0,095 | 0,00 | 0,091 | 4,21 |
| | 4 | 0,051 | 0,00 | 0,049 | 3,92 |
| Skrećanie q [MN/m ²] | 2 | 25,8 | 0,39 | 27,5 | 7,00 |
| | 4 | 21,9 | 2,34 | 21,9 | 2,34 |

czenia mogą być stosowane dla powłok jednowarstwowych. Wyniki obliczeń numerycznych wykazują dobrą zgodność z innymi pracami. W tablicy 2 przedstawiono porównanie górnych obciążeń krytycznych otrzymanych w niniejszej pracy z pracami innych autorów. Praktyczne znaczenie posiada analiza różnych przypadków obciążeń złożonych, gdyż pozwala ona na określenie obszarów stateczności powłoki, tj. tego zakresu obciążeń, przy których powłoka nie ulega wyboczeniu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. О. И. Теребушко, *Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении, внешнем давлении и сжатии*, Расч. пространственных конструкций, 5, Москва 1959.
2. C. T. WANG, D. D. SULLIVAN, *Buckling of sandwich cylinder under bending and combined bending and axial compression*, J. Aero. Sci., 7, 1952.
3. C. T. WANG, R. J. VACCARO, D. F. DE SANTO, *Buckling of sandwich cylinders under combined compression, torsion and bending loads*, J. Appl. Mech., 22, 3, 1955.
4. E. H. BAKER, *Stability of circumferentially corrugated sandwich cylinders under combined loads*, AIAA Journal, 2, 1964.
5. Л. М. Куршин, *Устойчивость трехслойных цилиндрических оболочек при сжатии, давлении и совместном действии давления и сжатия*, Расч. элем. авиац. констр., 4, 1965.
6. Л. М. Куршин, *Устойчивость трехслойных цилиндрических оболочек при изгибе и совместном действии изгиба и сжатия*, Расч. элем. авиац. констр., 4, 1965.
7. A. HOLSTON, A. FELDMAN, D. A. STANG, *Stability of filament wound cylinders under combined loading*, Air Force Flight Dyn. Lab., 55, 1967.
8. F. J. PLANTEMA, *Sandwich construction. The bending and buckling of sandwich beams, plates and shells*, Wiley, New York 1966.
9. Э. И. Григорюк, Ц. П. Чужков, *Устойчивость и колебания трехслойных оболочек*, Машиностроение, Москва 1973.
10. А. С. Волмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, Москва 1967.
11. M. OSTWALD, *Pewien problem stateczności trójwarstwowej powłoki walcowej poddanej skrećaniu*, Arch. Budowy Maszyn, 1, 1979.

Резюме

НЕЛИНЕЙНАЯ ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

В работе рассматривается нелинейная проблема устойчивости замкнутой, тонкостенной трехслойной, цилиндрической оболочки при сжатии, внешнем давлении и кручении. Уравнения устойчивости выведены из условия минимума потенциальной энергии системы.

Перемещения произвольных точек оболочки определены с учетом гипотезы „ломаной линии”. Решение уравнений устойчивости осуществляется на основе метода Бубнова-Галеркина. Получена система трех нелинейных алгебраических уравнений, которая позволяет определить критические нагрузки в зависимости от прогиба. Результаты численных расчетов для разных комбинаций нагрузок представлены в виде графиков.

SUMMARY

THE NONLINEAR PROBLEM OF STABILITY OF SANDWICH CYLINDRICAL SHELLS
UNDER COMBINED LOADING

In the paper the nonlinear problem of an elastic, thin-walled sandwich cylindrical shells buckling under the simultaneous action of compressive load, external pressure and torsion is solved. The equation of the equilibrium are obtained on the basis of the hypothesis of a “broken line”, assuming the condition of minimum of shell potential energy. The problem of stability is solved out in an approximate manner by means of the Bubnov-Galerkin method. The system of three algebraic equations is obtained, which allows to find the interrelations between the critical loads and the deflections. The results of numerical analysis for the different combined loading are presented in the form of diagrams.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 maja 1979 r.
