

DRGANIA BELKI PRZY STOCHASTYCZNYM WYMUSZENIU IMPULSOWYM

RADOSŁAW IWANKIEWICZ (WROCLAW)

Rozważane są drgania swobodnie podpartej belki o zmiennej masie i sztywności. Proces wymuszenia przyjęto jako serię przypadkowo pojawiających się impulsów o losowych amplitudach i losowym rozkładzie przestrzennym. Przyjęto, że chwile występowania impulsów są opisane procesem Poissona. W celu efektywnego rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę energetyczną. Rozprzeżenia równań ruchu tak sformułowanego układu o skończonej liczbie stopni swobody dokonano za pomocą transformacji własnej. Wyprowadzono oraz przedyskutowano wzory na wartość oczekiwaną i wariancję ugięcia belki w przypadku ogólnym i dla konkretnej postaci procesu wymuszenia. Omówiono wyniki przykładu liczbowego i przedstawiono je graficznie.

1. WSTĘP

Ważnym w dynamice budowlanej zagadnieniem są drgania konstrukcji pod wpływem często powtarzających się, krótkotrwałych obciążeń, które powstają wskutek wstrząsów o charakterze sejsmicznym lub parasejsmicznym. Sejsmiczne wymuszenie drgań jest zwykle opisywane przez niestacjonarny, ciągły proces stochastyczny (np. BOŁOTIN [1], CLOUGH i PENZIEN [2], AHMADI [3], GASPARINI [4]) lub w sposób bardziej adekwatny przez proces o charakterze przypadkowo pojawiających się impulsów o losowych wielkościach, LIN [5]. W przypadku drgań sejsmicznych (wymuszonych kinematycznie przez ruchy podpór) przestrzenny rozkład wymuszenia jest zdeterminowany. Dynamiczne obciążenie konstrukcji może jednak mieć bardziej ogólny charakter, tzn. może być przestrzenno-czasowym polem losowym. Taki charakter ma np. obciążenie wiatrem lub wymuszenie drgań pulsacjami ciśnienia akustycznego (wskazują na to m.in. DAVENPORT [6] oraz RAMA, BHAT i in. [7]).

W niniejszej pracy rozważane są drgania belki pod wpływem przypadkowo pojawiających się impulsów o losowych wielkościach i o losowym rozkładzie przestrzennym. Model ten w sposób przybliżony odzwierciedla równoczesne parasejsmiczne i akustyczne wymuszenie drgań konstrukcji. Sytuacja taka (tzn. działanie na konstrukcję impulsów pochodzenia parasejsmicznego i towarzyszących im pulsacji ciśnienia akustycznego) może mieć miejsce np. przy często powtarzających się naziemnych wybuchach.

2. WYZNACZENIE REAKCJI BELKI NA STOCHASTYCZNE WYMUSZENIE IMPULSOWE

Rozważmy drgania giętne swobodnie podpartej belki o zmiennej sztywności $EI(x)$, masie $m(x)$ i współczynniku tłumienia $c(x)$, przy zerowych warunkach początkowych. Drgania te opisane są równaniem

$$(2.1) \quad [EI(x) w''(x, t)]' + c(x) \dot{w}(x, t) + m(x) \ddot{w}(x, t) = p(x, t).$$

Przyjmijmy, że wymuszenie ma charakter przestrzenno-czasowego pola losowego $p(x, t)$, które można przedstawić w postaci $p(x, t) = s(x)P(t)$, gdzie $s(x)$ jest funkcją losową opisującą przestrzenny rozkład wymuszenia, a $P(t)$ jest procesem stochastycznym opisującym zmienność wymuszenia w czasie (występowanie impulsów). Załóżmy, że przestrzenny rozkład wymuszenia jest niezależny od jego zmienności w czasie, tzn. że $s(x)$ i $P(t)$ są statystycznie niezależnymi funkcjami losowymi.

Proces pojawiania się impulsów można przedstawić [5] w postaci

$$(2.2) \quad P(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} F_i v(t, t_i),$$

gdzie $N(t)$ jest procesem liczącym, podającym liczbę impulsów w przedziale $(0, t]$, F_i oznacza zmienną losową określającą wielkość impulsu pojawiającego się w przypadkowej chwili t_i , $v(t, t_i)$ zaś nielosową funkcją kształtu impulsu. W dalszych rozważaniach przyjmijmy, że impulsy mają kształt delty Diraca, tzn. $v(t, t_i) = \delta(t - t_i)$. Jeśli chwile t_i są niezależne, a prawdopodobieństwo wystąpienia impulsu w przedziale o długości dt jest równe $\lambda(t) dt$ ($\lambda(t) \geq 0$) oraz prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch lub więcej impulsów jest pomijalnie małe, to $N(t)$ jest zwykłym, niejednorodnym procesem Poissona o niestacjonarnych przyrostach. Wielkość $\lambda(t)$ jest średnim natężeniem pojawiania się impulsów (średnią liczbą impulsów w jednostce czasu). Dodatkowo założymy, że zmienne losowe F_i są wzajemnie niezależne i niezależne od rozkładu chwil t_i oraz że mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa równy rozkładowi pewnej zmiennej F . O funkcji $s(x)$ opisującej przestrzenny rozkład impulsu założymy, że jest to jednorodna funkcja losowa o znanej wartości przeciętnej $E[s(x)]$ i funkcji autokowariancji $R_{ss}(x_1, x_2) = R_{ss}(x_1 - x_2)$.

W wyniku zastosowania do równania (2.1) metody Galerkina lub Ritza otrzymujemy układ n równań

$$(2.3) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{s}P(t),$$

gdzie poszczególne macierze są sformułowane następująco:

$$(2.4) \quad \mathbf{M} = \int_0^l m(x) \mathbf{f}(x) \mathbf{f}^T(x) dx, \quad \mathbf{C} = \int_0^l c(x) \mathbf{f}(x) \mathbf{f}^T(x) dx,$$

$$\mathbf{K} = \int_0^l EI(x) \mathbf{f}''(x) \mathbf{f}''^T(x) dx, \quad \mathbf{s} = \int_0^l s(x) \mathbf{f}(x) dx,$$

gdzie $\mathbf{f}(x)$ jest wektorem n funkcji aproksymacyjnych spełniających odpowiednie warunki brzegowe, $\mathbf{q}(t)$ jest wektorowym procesem stochastycznym (wektorem n współrzędnych uogólnionych), l — długością belki. W przypadku metody Galerkina macierz sztywności ma, jak wiadomo, postać wyjściową $\mathbf{K} = \int_0^l \mathbf{f}(x) [EI(x) \mathbf{f}'^T(x)]'' dx$, skąd po scałkowaniu przez części i uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymuje się wyrażenie (2.4)₃. Rozdzielenie równań (2.3) za pomocą transformacji własnej (tzn. diagonalizacja wszystkich występujących w tych równaniach macierzy) jest możliwa jak wiadomo (CAUGHEY [8]), jedynie w przypadku tzw. proporcjonalnego tłumienia, tzn. gdy macierz tłumienia \mathbf{C} jest proporcjonalna do macierzy sztywności \mathbf{K} , bezwładności \mathbf{M} lub jest liniową kombinacją tych macierzy. Przyjmijmy tutaj hipotezę tłumienia masowego, tzn. $c(x) = \mu m(x)$; a zatem $\mathbf{C} = \mu \mathbf{M}$.

Dokonajmy następnie transformacji własnej równań (2.3) podstawiając $\mathbf{q} = \mathbf{W}\mathbf{y}$, gdzie \mathbf{W} jest macierzą własną układu. Uwzględniając warunki ortogonalności wektorów własnych z wagą mas i sztywności, otrzymujemy układ n równań o postaci

$$(2.5) \quad \ddot{\mathbf{y}} + \{2\alpha_i \omega_i\} \dot{\mathbf{y}} + \{\omega_i^2\} \mathbf{y} = \{m_i^{-1}\} \mathbf{W}^T \mathbf{s} P(t),$$

gdzie α_i oznacza liczbę tłumienia odpowiadającą i -tej formie drgań (wektorowi własnemu), ω_i częstością drgań własnych, m_i — i -tą masą główną, a $\{\cdot\}$ oznacza macierz diagonalną. Ponieważ $\mathbf{C} = \mu \mathbf{M}$, przeto $2\alpha_i \omega_i = \text{const} = \mu$.

Rozwiązanie tego układu otrzymamy, uwzględniając postać wymuszenia, w formie całki stochastycznej względem procesu Poissona,

$$(2.6) \quad \mathbf{y} = \int_0^t \{m_i^{-1} h_i(t-\tau)\} \mathbf{W}^T \mathbf{s} F(\tau) dN(\tau),$$

gdzie $h_i(t-\tau) = \omega_{it}^{-1} \exp[-\alpha_i \omega_i(t-\tau)] \sin \omega_{it}(t-\tau)$ jest impulsową funkcją przejścia (charakterystyką impulsową) oraz gdzie $\omega_{it} = \omega_i \sqrt{1 - \alpha_i^2}$.

Ugięcie belki wyraża się wzorem

$$(2.7) \quad w(x, t) = \mathbf{f}^T(x) \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}^T(x) \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau) \mathbf{s} F(\tau) dN(\tau),$$

gdzie $\mathbf{H}(t-\tau) = \mathbf{W} \{m_i^{-1} h_i(t-\tau)\} \mathbf{W}^T$ jest macierzą charakterystyk impulsowych. Wartość przeciętna ugięcia belki wynosi

$$(2.8) \quad E[w(x, t)] = \mathbf{f}^T(x) \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau) E[\mathbf{s}] E[F] \lambda(\tau) d\tau,$$

gdzie

$$(2.9) \quad E[\mathbf{s}] = \int_0^l E[\mathbf{s}(x)] \mathbf{f}(x) dx.$$

Wykonując stosowane operacje [9] wyznaczamy wariancję ugięcia:

$$(2.10) \quad \sigma_w^2(x, t) = \mathbf{f}^T(x) \mathbf{R}_{qq}(t) \mathbf{f}(x),$$

gdzie macierz wzajemnych kowariancji (w tej samej chwili) współrzędnych uogólnionych wyraża się wzorem

$$(2.11) \quad \mathbf{R}_{qq}(t) = \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau) \mathbf{S} \mathbf{H}^T(t-\tau) E[F^2] \lambda(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau_1) \mathbf{R} \mathbf{H}^T(t-\tau_2) E^2[F] \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

gdzie

$$(2.12) \quad \mathbf{S} = \int_0^l \int_0^l K_{ss}(x_1, x_2) \mathbf{f}(x_1) \mathbf{f}^T(x_2) dx_1 dx_2, \\ \mathbf{R} = \int_0^l \int_0^l R_{ss}(x_1, x_2) \mathbf{f}(x_1) \mathbf{f}^T(x_2) dx_1 dx_2$$

są macierzami o elementach

$$(2.13) \quad s_{ij} = \int_0^l \int_0^l K_{ss}(x_1, x_2) f_i(x_1) f_j(x_2) dx_1 dx_2, \\ r_{ij} = \int_0^l \int_0^l R_{ss}(x_1, x_2) f_i(x_1) f_j(x_2) dx_1 dx_2,$$

$K_{ss}(x_1, x_2)$ zaś jest funkcją autokorelacyjną losowej funkcji $s(x)$.

Jeśli funkcje aproksymacyjne są funkcjami własnymi rozpatrywanej belki, to zamiast układu równań (2.3) otrzymujemy układ równań rozdzielonych i odpowiednie wzory przybierają postać

$$(2.14) \quad E[w(x, t)] = \mathbf{f}^T(x) \int_0^t \{m_i^{-1} h_i(t-\tau)\} E[s] E[F] \lambda(\tau) d\tau,$$

$$(2.15) \quad \mathbf{R}_{qq}(t) = \int_0^t \{m_i^{-1} h_i(t-\tau)\} \mathbf{S} \{m_i^{-1} h_i(t-\tau)\} E[F^2] \lambda(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^t \{m_i^{-1} h_i(t-\tau_1)\} \mathbf{R} \{m_i^{-1} h_i(t-\tau_2)\} E^2[F] \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Elementy $\text{cov}_{q_i, q_j}(t)$ macierzy kowariancji wzajemnych $\mathbf{R}_{qq}(t)$ można teraz łatwo przedstawić *explicitie*:

$$(2.16) \quad \text{cov}_{q_i, q_j}(t) = \frac{s_{ij}}{m_i m_j} \int_0^t h_i(t-\tau) h_j(t-\tau) E[F^2] \lambda(\tau) d\tau + \\ + \frac{r_{ij}}{m_i m_j} \int_0^t \int_0^t h_i(t-\tau_1) h_j(t-\tau_2) E^2[F] \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

W przypadku, gdy wielkości impulsów mają wartość przeciętną równą zeru, tzn. $E[F]=0$ i $E[s(x)]=0$, to $E[F^2]=\sigma_F^2$ oraz $K_{ss}(x_1, x_2)=R_{ss}(x_1, x_2)$. a zatem

$S=R$. Ze wzorów (2.8) lub (2.14) otrzymujemy oczywiście $E[w(x, t)] = 0$, natomiast wzory (2.11), (2.15) i (2.16) upraszczają się, odpowiednio do postaci

$$(2.17) \quad R_{aa}(t) = \int_0^t H(t-\tau) R H^T(t-\tau) \sigma_F^2 \lambda(\tau) d\tau,$$

$$(2.18) \quad R_{aa}(t) = \int_0^t \{m_i^{-1} h_i(t-\tau)\} R \{m_i^{-1} h_i(t-\tau)\} \sigma_F^2 \lambda(\tau) d\tau,$$

$$(2.19) \quad \text{cov}_{a_i, a_j}(t) = \frac{r_{ij}}{m_i m_j} \int_0^t h_i(t-\tau) h_j(t-\tau) \sigma_F^2 \lambda(\tau) d\tau.$$

Ze wzoru (2.10) wraz z jednym ze wzorów na $R_{aa}(t)$ (zależnie od przypadku) można wyznaczyć wariancję ugięcia belki w przejściowym stanie drgań. Wariancję ugięcia w stanie ustalonym obliczamy na podstawie tych samych wzorów, przyjmując w odpowiednich całkach jako górną granicę całkowania ∞ co zamiast t (w ogólnym przypadku niestacjonarnego wymuszenia, tzn. gdy $\sigma_F^2(t) \lambda(t) = \text{var.}$, nie można bowiem zastosować klasycznej metody widmowej).

Jeśli wymuszenie działa w czasie o skończonej długości T , to całki z górną granicą t są poprawne dla $t \leq T$. Natomiast dla $t \geq T$ obowiązują całki z górną granicą całkowania T ; opisują one wówczas drgania swobodne układu po zakończeniu procesu wymuszenia.

Z podanych wzorów można skorzystać również w przypadku zdeterminowanego przestrzennego rozkładu impulsu, tzn. gdy $s(x)$ jest nielosową funkcją zmiennej geometrycznej x . Należy wówczas uwzględnić to, że wektor s jest nielosowym wektorem liczbowym ($E[s] = s$), $S = s s^T$ — nielosową macierzą liczbową oraz $R = 0$.

3. ANALIZA DRGAŃ BELKI PRZY KONKRETNEJ POSTACI WYMUSZENIA

Ograniczmy rozważania do przypadku, gdy znane są funkcje własne $f_i(x)$ oraz wartość przeciętna wymuszenia jest równa zero. Przyjmijmy, że $\sigma_F^2(t) = \text{const}$ oraz że średnie natężenie pojawiania się impulsów fluktuuje sinusoidalnie, tj.

$$(3.1) \quad \lambda(t) = A + B \sin pt, \quad B \leq A.$$

Taka postać wymuszenia, jakkolwiek hipotetyczna, jest ważna i warta rozpatrzenia (ROBERTS [10]).

Ze wzoru (2.19) otrzymujemy

$$(3.2) \quad \text{cov}_{a_i, a_j}(t) = \frac{r_{ij}}{m_i m_j} \frac{A \sigma_F^2}{\omega_{it} \omega_{jt}} \left\{ \frac{1}{2} e^{-\mu t} I_1(-\mu, \omega_{it} \omega_{jt}, t) + \frac{2\mu \omega_{it} \omega_{jt}}{[\mu^2 + (\omega_{it} - \omega_{jt})^2][\mu^2 + (\omega_{it} + \omega_{jt})^2]} \right\} + \frac{r_{ij}}{m_i m_j} \frac{B \sigma_F^2}{\omega_{it} \omega_{jt}} \cdot \frac{1}{4} \times \\ \times \left\{ e^{-\mu t} [A_1(\omega_{it} - \omega_{jt}, p) - A_1(\omega_{it} - \omega_{jt}, -p) + A_1(\omega_{it} + \omega_{jt}, -p) - A_1(\omega_{it} + \omega_{jt}, p)] + \right.$$

$$(3.2) \quad \left. \begin{aligned} & + \frac{-A_3 + (\omega_{it} - \omega_{jt}) \cdot A_2}{[\mu^2 + (\omega_{it} - \omega_{jt} - p)^2] (\omega_{it} - \omega_{jt})} + \frac{A_3 + (\omega_{it} - \omega_{jt}) \cdot A_2}{[\mu^2 + (\omega_{it} - \omega_{jt} + p)^2] (\omega_{it} - \omega_{jt})} + \\ & + \frac{A_3 - (\omega_{it} + \omega_{jt}) \cdot A_2}{[\mu^2 + (\omega_{it} + \omega_{jt} - p)^2] (\omega_{it} + \omega_{jt})} - \frac{A_3 + (\omega_{it} + \omega_{jt}) \cdot A_2}{[\mu^2 + (\omega_{it} + \omega_{jt} + p)^2] (\omega_{it} + \omega_{jt})} \end{aligned} \right\},$$

gdzie

$$I_1(x, y, z, t) = 2e^{-xt} \int e^{xt} \sin yt \sin zt dt$$

$$(3.3) \quad A_1(x, y) = \frac{ux \sin xt - [\mu^2 + y(x+y)] \cos xt}{[\mu^2 + (x+y)^2] x},$$

$$A_2 = \mu \sin pt + p \cos pt,$$

$$A_3 = (\mu^2 + p^2) \cos pt;$$

$$(3.4) \quad \sigma_{q_i}^2(t) = \frac{r_{ii}}{m_i^2} \frac{A\sigma_F^2}{2\omega_i \omega_{it}^2} \left[\frac{\omega_{it}^2}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) - e^{-\mu t} \sin \omega_{it} t \left(\frac{u}{2} \sin \omega_{it} t + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_{it} \cos \omega_{it} t \right) \right] + \frac{r_{ii}}{m_i^2} \frac{B\sigma_F^2}{\omega_{it}^2} \frac{1}{4} \left\{ e^{-\mu t} \left[\frac{\mu \sin \sqrt{2} \omega_{it} t + (2\omega_{it} - p) \cos 2\omega_{it} t}{\mu^2 + (2\omega_{it} - p)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\mu \sin 2\omega_{it} t + (2\omega_{it} + p) \cos 2\omega_{it} t}{\mu^2 + (2\omega_{it} + p)^2} + \frac{2p}{\mu^2 + p^2} \right] + \frac{2\mu \sin pt - 2p \cos pt}{\mu^2 + p^2} - \right. \\ \left. - \frac{\mu \sin pt - (p - 2\omega_{it}) \cos pt}{\mu^2 + (p - 2\omega_{it})^2} - \frac{\mu \sin pt - (p + 2\omega_{it}) \cos pt}{\mu^2 + (p + 2\omega_{it})^2} \right\}.$$

Widoczne jest, że wariancja i -tej współrzędnej uogólnionej wzrasta, gdy $p \rightarrow 2\omega_{it}$. Wielkość wzajemnej kowariancji współrzędnych uogólnionych q_i i q_j zależy od $|\omega_{it} - \omega_{jt}|$, a także od relacji między częstością fluktuacji p a $|\omega_{it} - \omega_{jt}|$ oraz $\omega_{it} + \omega_{jt}$. Wielkość ta wzrasta, gdy $p \rightarrow |\omega_{it} - \omega_{jt}|$ lub $p \rightarrow \omega_{it} + \omega_{jt}$.

W przypadku układu nietłumionego ($\mu \rightarrow 0$) otrzymujemy

$$(3.5) \quad \text{cov}_{q_i, q_j}(t) = \frac{r_{ij}}{m_i m_j} \frac{A\sigma_F^2}{\omega_i \omega_j} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\omega_i - \omega_j)t}{\omega_i - \omega_j} - \frac{\sin(\omega_i + \omega_j)t}{\omega_i + \omega_j} \right] + \\ + \frac{r_{ij}}{m_i m_j} \frac{B\sigma_F^2 p}{2\omega_i \omega_j} \left[\frac{\cos(\omega_i + \omega_j)t}{(\omega_i + \omega_j - p)(\omega_i + \omega_j + p)} - \frac{\cos(\omega_i - \omega_j)t}{(\omega_i - \omega_j - p)(\omega_i - \omega_j + p)} + \right. \\ \left. + \frac{4\omega_i \omega_j \cos pt}{(\omega_i - \omega_j - p)(\omega_i - \omega_j + p)(\omega_i + \omega_j - p)(\omega_i + \omega_j + p)} \right],$$

$$(3.6) \quad \sigma_{q_i}^2(t) = \frac{r_{ii}}{m_i^2} \frac{A\sigma_F^2}{4\omega_i^3} (2\omega_i t - \sin 2\omega_i t) + \\ + \frac{r_{ii}}{m_i^2} \frac{B\sigma_F^2}{\omega_i^2 p (p - 2\omega_i)(p + 2\omega_i)} [2\omega_i^2 (\cos pt - 1) + p^2 \sin^2 \omega_i t].$$

Odpowiedź przejściowa układu nietłumionego wzrasta liniowo z czasem (wzór (3.6)). We wzorze (3.5) nie ma osobliwości dla $p=\omega_i-\omega_j$, i dla $p=\omega_i+\omega_j$. W pierwszym przypadku otrzymujemy przy przejściu granicznym

$$(3.7) \quad \lim_{p \rightarrow \omega_i - \omega_j} \text{cov}_{q_i, q_j}(t) = \frac{r_{ij}}{m_i m_j} \frac{A\sigma_F^2}{\omega_i \omega_j} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin pt}{p} - \frac{\sin(\omega_i + \omega_j)t}{\omega_i + \omega_j} \right] + \\ + \frac{r_{ij}}{m_i m_j} \frac{B\sigma_F^2}{\omega_i \omega_j} \frac{p}{2} \left[\frac{[\cos(\omega_i + \omega_j)t + \frac{t \sin pt}{p}]}{4\omega_i \omega_j +} \right],$$

w drugim zaś przypadku

$$(3.8) \quad \lim_{p \downarrow \omega_i + \omega_j} \text{cov}_{q_i, q_j}(t) = \frac{r_{ij}}{m_i m_j} \frac{A\sigma_F^2}{\omega_i \omega_j} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\omega - \omega_j)t}{\omega_i - \omega_j} - \frac{t \sin pt}{p} \right] + \\ + \frac{r_j}{m m_j} \frac{B\sigma_F^2}{\omega_i \omega_j} \frac{p}{2} \left[\frac{\cos(\omega - \omega_j)t}{4\omega_i \omega_j} - \frac{t \sin pt}{t} \right].$$

Również we wzorze (3.6) dla $p=2\omega_i$ nie występuje osobliwość. W granicy otrzymujemy

$$(3.9) \quad \lim_{p \rightarrow 2\omega_i} \sigma_{q_i}^2(t) = \frac{r_{ii}}{m_i^2} \frac{A\sigma_F^2}{4\omega_i^3} (pt - \sin pt) + \frac{r_{ii}}{m_i^2} \frac{B\sigma_F^2}{2\omega_i^3} \times \\ \times \left(\sin^2 \omega_i t + \frac{1}{8} \cos pt - \frac{\omega_i t}{2} \sin pt \right).$$

Widoczne jest, że w przypadku układu nietłumionego dla $p=2\omega_i$ również składnik odpowiadający niestacjonarnej części wymuszenia wzrasta liniowo z czasem (analogicznie do zjawiska rezonansu przy deterministycznym wymuszeniu harmonicznym, tzn. gdy $p=\omega_i$).

Odpowiednie wzory na $\text{cov}_{q_i, q_j}(t)$ oraz $\sigma_{q_i}^2(t)$ dla ustalonego stanu drgań ($t \rightarrow \infty$) można łatwo otrzymać z (3.2) i (3.4), gdzie widoczne są składniki eksponencjalnie zanikające z czasem. Należy przy tym zauważyć, że układ pozbawiony tłumienia nie osiąga ustalonego stanu drgań; wariancja odpowiedzi tego układu dąży do nieskończoności (wzór (3.6)).

Przyjmijmy funkcję autokowariancji przestrzennego rozkładu impulsu w postaci $R_{ss}(x_1, x_2) = \sigma_s^2 \exp(-b|x_1 - x_2|)$. Jest to naturalna postać tej funkcji, gdyż w takim przypadku przestrzenna korelacja wymuszenia w punktach x_1 i x_2 maleje wraz ze wzrostem odległości tych punktów.

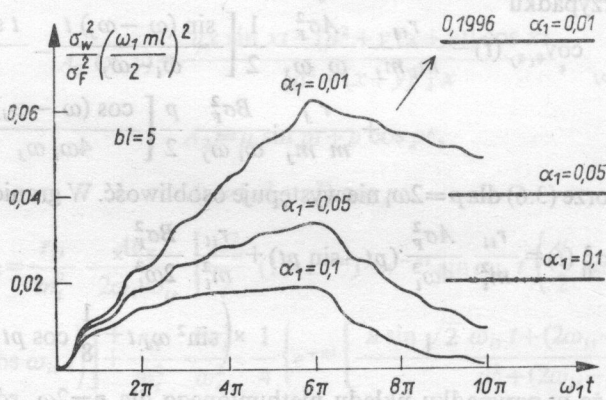
W najprostszym przypadku belki swobodnie podpartej o równomiernym rozkładzie masy i sztywności ($f_i(x) = \sin \pi x/l$, $m_i = ml/2$) na podstawie (2.13) otrzymujemy

$$(3.10) \quad r_{ij} = \sigma_s^2 l^2 \left\{ \frac{i/2}{b^2 l^2 + i^2 \pi^2} \left[\frac{\cos(i+j)\pi - 1}{i+j} - \frac{\cos(i-j)\pi - 1}{i-j} \right] + \right. \\ \left. + \frac{j/2}{b^2 l^2 + j^2 \pi^2} \left[\frac{\cos(i+j)\pi - 1}{i+j} + \frac{\cos(i-j)\pi - 1}{i-j} \right] + \right. \\ \left. + \frac{ij \pi^2}{(b^2 l^2 + i^2 \pi^2)(b^2 l^2 + j^2 \pi^2)} [e^{-bl}(\cos i\pi + \cos j\pi) + 2] \right\},$$

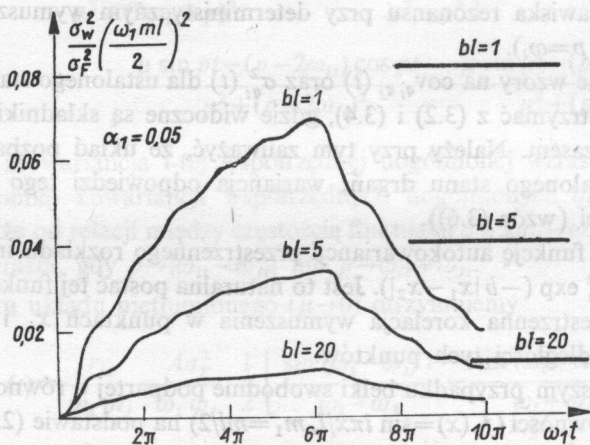
$$(3.11) \quad r_{ii} = \frac{2\sigma_s^2 l^2}{b^2 l^2 + i^2 \pi^2} \left[\frac{bl}{2} + \frac{i^2 \pi^2}{b^2 l^2 + i^2 \pi^2} (1 - e^{-bl} \cos i\pi) \right].$$

4. PRZYKŁAD

Przykładowo wyznaczono wariancję ugięcia w środku rozpiętości belki swobodnie podpartej o równomiernym rozkładzie masy i sztywności. W obliczeniach uwzględniono pierwsze dwie symetryczne formy drgań, tj. $f_1 = \sin \pi x/l$, $f_3 = \sin 3\pi x/l$ oraz przyjęto: $\sigma_F^2 = \text{const}$, $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$, $\sigma_s^2 l^2 = 0,1$, $A = 5 \text{ s}^{-1}$. Na wykresach jest przedstawiona proporcjonalna do wariancji ugięcia wielkość bezwymiarowa $\frac{\sigma_w^2 \omega_1^2 m^2 l^2}{\sigma_F^2}$.



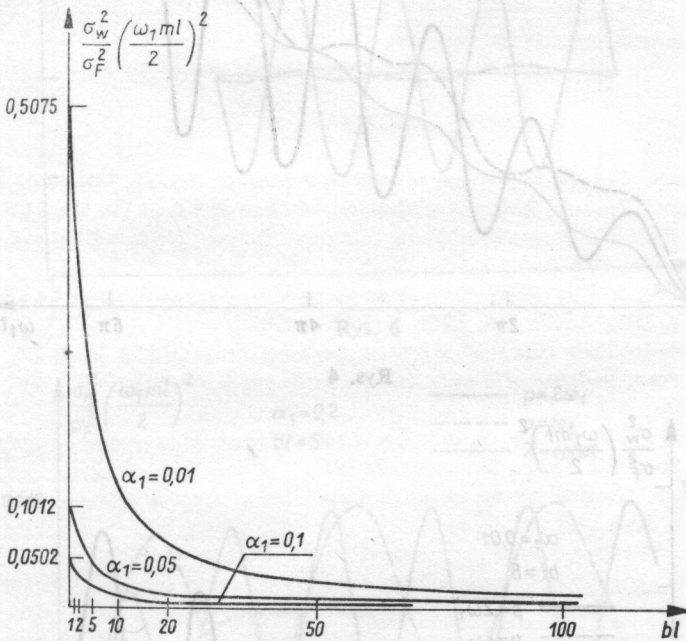
Rys. 1



Rys. 2

Wykresy na rys. 1 i 2 obrazują zmienność w czasie wariancji ugięcia w przejściowym stanie drgań dla przypadku stacjonarnego ($\lambda(t) = A$), przy czasie działania wymuszenia $T = 6\pi/\omega_1$ oraz po zakończeniu procesu wymuszenia. Linie poziome oznaczają asymptoty, do których dąży wariancja ugięcia, gdy czas działania wymuszenia $T \rightarrow \infty$, czyli przedstawiają wariancję w ustalonym stanie drgań. Jak widać na rys. 1, wielkość tłumienia ma istotny wpływ na wariancję ugięcia belki. Wyniki przedstawione na rys. 2 świadczą o tym, że wariancja ugięcia rośnie wraz

ze wzrostem przestrzennej korelacji wymuszenia (zmniejszanie się parametru b oznacza wzrost korelacji). Wpływ tej korelacji na wielkość wariancji ugięcia w ustalonym stanie drgań zilustrowany jest w pełni na rys. 3. Przypadek $b=0$ oznacza nieskończenie silną przestrzenną korelację wymuszenia; odpowiada to więc zdeeterminowanemu przestrzennemu rozkładowi impulsu. Należy jednak zauważyć, że w przypadku zupełnego braku omawianej korelacji ($b \rightarrow \infty$) wariancja ugięcia nie jest równa zero, gdyż wówczas losową funkcję $s(x)$ należy traktować jako przestrzenny „biały szum”, a zatem $\sigma_s^2 \rightarrow \infty$. Aby wyznaczyć wariancję ugięcia belki należy więc we wzorze (2.13) podstawić $R_{ss}(x_1, x_2) = 2\pi\Phi_{ss}\delta(x_1 - x_2)$, gdzie Φ_{ss} jest stałą gęstością widmową losowej funkcji $s(x)$. W rezultacie otrzymujemy $\bar{r} = \pi l\Phi_{ss}$, $r_{ij} = 0$. W takim przypadku współrzędne uogólnione są więc nieskorelowane ($\text{cov}_{q_i, q_j}(t) = 0$) lub inaczej mówiąc znika sprzężenie form.

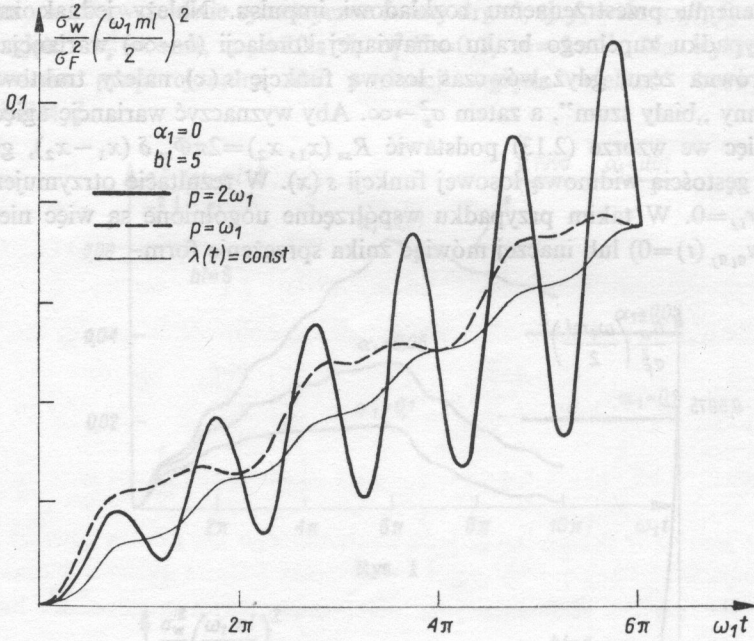


Rys. 3

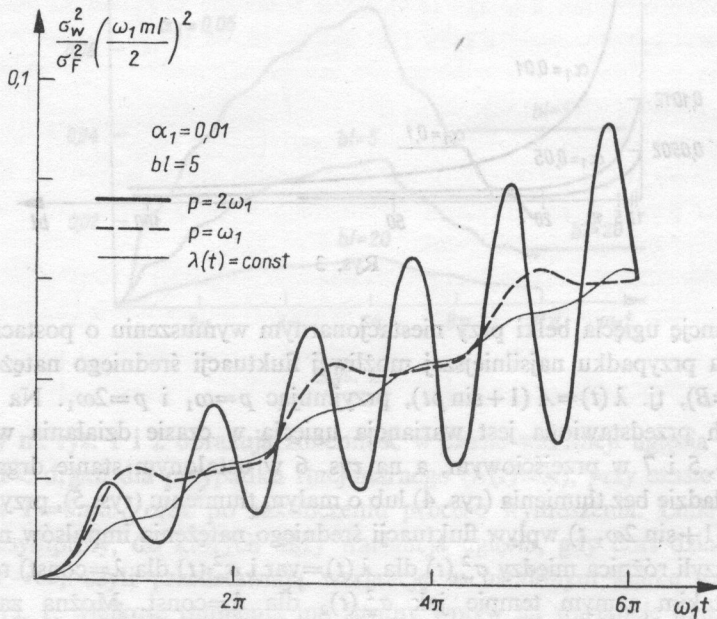
Wariancję ugięcia belki przy niestacjonarnym wymuszeniu o postaci (3.1) obliczono dla przypadku najsilniejszej możliwej fluktuacji średniego natężenia impulsów ($A=B$), tj. $\lambda(t) = A(1 + \sin pt)$, przyjmując $p = \omega_1$ i $p = 2\omega_1$. Na następnych rysunkach przedstawiona jest wariancja ugięcia w czasie działania wymuszenia; na rys. 4, 5 i 7 w przejściowym, a na rys. 6 w ustalonym stanie drgań.

W układzie bez tłumienia (rys. 4) lub o małym tłumieniu (rys. 5), przy zmienności $\lambda(t) = A(1 + \sin 2\omega_1 t)$ wpływ fluktuacji średniego natężenia impulsów na wariancję ugięcia (czyli różnica między $\sigma_w^2(t)$ dla $\lambda(t) = \text{var}$ i $\sigma_w^2(t)$ dla $\lambda = \text{const}$) rośnie z czasem w takim samym tempie jak $\sigma_w^2(t)_2$ dla $\lambda = \text{const}$. Można zauważyć, że $\max \sigma_w^2(t)|_{\lambda = \text{var}} \approx 1,5 \sigma_w^2(t)|_{\lambda = \text{const}}$ zarówno w przejściowym (rys. 4 i 5) jak w usta-

lonym (rys. 6) stanie drgań. W przypadku $\lambda(t) = A(1 + \sin \omega_1 t)$ wpływ omawianej fluktuacji na wariancję ugięcia maleje z czasem i w stanie ustalonym jest już nieznaczny (rys. 6).



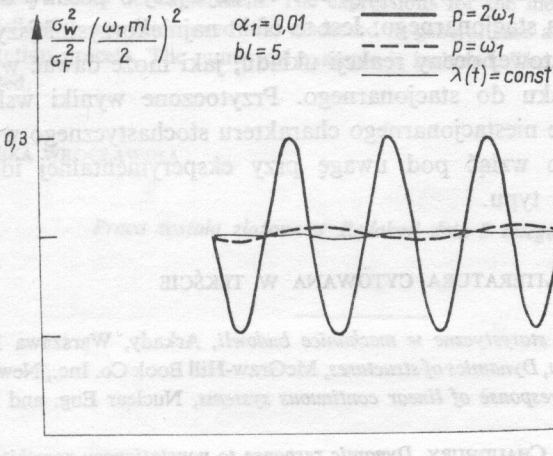
Rys. 4



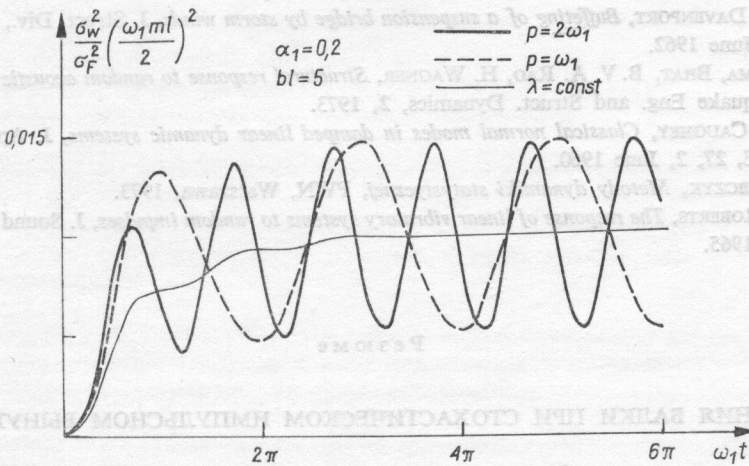
Rys. 5

Przy słabszej fluktuacji $\lambda(t)$ (tzn. $B < A$) zjawisko będzie przebiegać podobnie, przy czym wariancja osiągnie mniejsze wartości.

W układzie o większym tłumieniu wariancja ugięcia, ogólnie mniejsza, inaczej kształtuje się w zależności od częstości p fluktuacji średniego natężenia impulsów. Na przykład przy tłumieniu $\alpha_1 = 0,2$ (rys. 7) maksymalne wartości wariancji dla przypadków $p = \omega_1$ i $p = 2\omega_1$ są bardzo do siebie zbliżone. Również tu jest spełniona relacja $\max \sigma_w^2(t)|_{\lambda = \text{var}} \approx 1,5 \sigma_w^2(t)|_{\lambda = \text{const}}$.



Rys. 6



Rys. 7

Ze struktury widma częstości drgań własnych belki swobodnie podpartej $\left(\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \right)$ wynika, że udział kolejnych wyższych form drgań w kształtowaniu wariancji ugięcia szybko maleje (wzór (3.4)). W przypadku gdy częstość p fluktuacji średniego natężenia impulsów $\lambda(t)$ wynosi $p = 2\omega_{it}$, wpływ i -tej formy

drgań ulega wzmocnieniu (1,5 raza). Wpływ ten jest jednak nadal bardzo mały; dominująca pozostaje forma podstawowa. W przytoczonym przykładzie udział $\sigma_{a_3}^2$ i cov_{a_1, a_3} w kształtowaniu wariancji ugięcia w środku rozpiętości belki okazał się pomijalnie mały (co jest uzasadnione znacznym rozsunieniem częstości: $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$, $\omega_3 = 90 \text{ s}^{-1}$).

W przypadku działania na belkę niestacjonarnego stochastycznego wymuszenia impulsowego o fluktuującym sinusoidalnie średnim natężeniu pojawiania się impulsów, wariancja ugięcia belki może więc być co najwyżej o połowę większa niż w przypadku wymuszenia stacjonarnego. Jest to efekt najniekorzystniejszy z punktu widzenia średnio kwadratowej oceny reakcji układu, jaki może dawać wymuszenie niestacjonarne w stosunku do stacjonarnego. Przytoczone wyniki wskazują, że istotne jest uwzględnienie niestacjonarnego charakteru stochastycznego wymuszenia impulsowego. Należy to wziąć pod uwagę przy eksperymentalnej identyfikacji realnych wymuszeń tego typu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. W. BOŁOTIN, *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Arkady, Warszawa 1968.
2. R. W. CLOUGH, J. PENZIEN, *Dynamics of structures*, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York 1975.
3. G. AHMADI, *Earthquake response of linear continuous systems*, Nuclear Eng. and Design, 50, 2, 1978.
4. D. A. GASPARINI, A. DEB CHAUDHURY, *Dynamic response to nonstationary nonwhite excitation*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, 106, EM6, December 1980.
5. Y. K. LIN, *Probabilistic theory of structural dynamics*, McGraw-Hill Book Co. Inc., 1967.
6. A. G. DAVENPORT, *Buffeting of a suspension bridge by storm winds*, J. Struct. Div., ASCE, 88, ST3, June 1962.
7. B. RAMA, BHAT, B. V. A. RAO, H. WAGNER, *Structural response to random acoustic excitation*, Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, 2, 1973.
8. T. K. CAUGHEY, *Classical normal modes in damped linear dynamic systems*, J. Appl. Mech., ASME, 27, 2, June 1960.
9. K. SOBczyk, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa, 1973.
10. J. B. ROBERTS, *The response of linear vibratory systems to random impulses*, J. Sound and Vibr., 2, 4, 1965.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ИМПУЛЬСНОМ ВЫНУЖДЕНИИ

Рассматриваются колебания свободно подпертой балки с переменной массой и жесткостью. Процесс вынуждения принят как серия случайно появляющихся импульсов со случайными амплитудами и случайным пространственным распределением. Принято, что моменты выступления импульсов описаны процессом Пуассона. С целью эффективного решения проблемы применен энергетический метод. Распряжение уравнений движения, так сформулированной системы с конечным количеством степеней свободы проведено при помощи собственного преобразования. Выведены и обсуждены формулы для математического ожидания и варiances прогиба балки в общем случае и для конкретного вида процесса вынуждения. Представлены графически и обсуждены результаты числового примера.

SUMMARY

VIBRATION OF A BEAM UNDER STOCHASTIC IMPULSIVE EXCITATION

Random vibrations of simply supported beam with non-uniformly distributed mass and stiffness are considered. The excitation is assumed as the train of randomly occurring impulses with random amplitudes and spatial distribution. The impulses arrival times are assumed to be described by Poisson process. Energy balance method is used to formulate the equations of motion and model transformation and to decouple them. The expressions for the mean value and the variance of the beam deflection are determined and discussed in general case and also for the specified form of the excitation process. The numerical example is included. The results are shown graphically and discussed.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lutego 1982 r.

Technika dużych przemieszczeń w analizie elasto-plastycznej

Technique for large deformations in the elasto-plastic analysis

Wibracje losowe płyty anizotropowej o brzożach swobodnych i symetrii regularnej

Random vibrations of anisotropic plate with free edges and regular symmetry

Wyznaczenie krytycznej grubości i grubości krytycznych dla płyt

Determination of quenching limit and critical plate thickness

Drucie o kształcie koła i cylindra oscylujące w osiowej płaszczyźnie

Oscillations of a circular and cylindrical wire in the axial plane

Analiza dynamiczna odpowiedzi niejednorodnej powłoki cylindrycznej

Dynamic analysis of response of a shallow cylindrical shell

Na bliźniowym określeniu współczynnika sztywności w ośrodkach sprężystych

On the approximate evaluation of interaction of cracks in elastic media

Osymulacja dynamiczna powłoki cylindrycznej o niejednorodnościach

Dynamic simulation of a shallow cylindrical shell with inhomogeneities

Analiza dynamiczna powłoki cylindrycznej o niejednorodnościach

Dynamic analysis of a shallow cylindrical shell with inhomogeneities