

PRZYBLIŻONA METODA NIELINIOWEJ ANALIZY RAM SPRĘŻYSTYCH

MICHAŁ KLEIBER i MIECZYŚLAW WIECZOREK (WARSZAWA)

Przedstawiono pewien uproszczony sposób analizy dużych przemieszczeń ram sprężystych metodą elementów skończonych. W trakcie analizy wykorzystuje się znajomość liniowego rozwiązania zagadnienia statyki ramy oraz liniowego zagadnienia własnego charakteryzującego problem bifurkacyjny. Zamieszczone przykłady dowodzą dużej efektywności proponowanej metody.

1. PODSTAWY METODY I WYPROWADZENIE RÓWNAŃ

Przedmiotem pracy jest numeryczna analiza statycznych zagadnień dużych przemieszczeń konstrukcji sprężystych za pomocą metody elementów skończonych. Proponowane podejście ma charakter przybliżony i stosowane może być do pewnej tylko klasy problemów z zakresu nieliniowej mechaniki konstrukcji. Poniżej omówimy zasadniczą ideę analizy, która wykazuje podobieństwo do podejść przedstawionych w pracach [1, 2 i 3]. Omówione w rozdziale 3 przykłady, ilustrujące przedstawioną w pracy teorię, dotyczą sprężystych ram płaskich. Proponowana metoda ma jednakże walor znacznie ogólniejszy i może być z powodzeniem zastosowana do przybliżonej analizy dużych przemieszczeń różnorodnych konstrukcji sprężystych [2 i 4].

W podejściu skończenie elementowym równaniom opisującym nieliniowe zagadnienia statyki układu sprężystego można nadać postać następującą:

$$(1.1) \quad [\mathbf{K}^{(s)} + \mathbf{K}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{r} = \mathbf{R},$$

gdzie $\mathbf{K}^{(s)}$ oznacza stałą w procesie deformacji macierz sztywności sprężystej układu dyskretyzowanego mającą wymiar $n \times n$, gdzie n jest liczbą uogólnionych współrzędnych układu po wprowadzeniu w nim kinematycznych warunków brzegowych, $\mathbf{K}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\sigma})$ jest tzw. macierzą geometryczną o wymiarze $n \times n$.

Argument $\boldsymbol{\sigma}$ w macierzy geometrycznej $\mathbf{K}^{(\sigma)}$ wskazuje symbolicznie na jej zależność od aktualnego tensora naprężenia Cauchy'ego, symbole zaś \mathbf{r} i \mathbf{R} oznaczają odpowiednio n wymiarowe kolumnowe wektory uogólnionych współrzędnych przemieszczeń oraz zewnętrznych obciążeń węzłów.

Równania (1.1) mają charakter przybliżony nawet w ramach już obarczonego błędem dyskretyzacji modelu metody elementów skończonych. Pełna postać równań (1.1) zawiera bowiem dodatkowo tzw. macierz dużych przemieszczeń (zależną od \mathbf{r}),

za argument zaś funkcji macierzowej $\mathbf{K}^{(\sigma)}$ należałoby uważać składowe II-go tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa. Uproszczoną postać równań (1.1) można uważać za dostatecznie dokładną jedynie dla zagadnień dotyczących stosunkowo niedużych deformacji rozpatrywanych układów.

Rozpatrzmy jednoparametrową rodzinę obciążeń zewnętrznych

$$(1.2) \quad \mathbf{R} = \lambda \mathbf{R}^*,$$

gdzie \mathbf{R}^* oznacza wektor pewnego obciążenia porównawczego, a λ mnożnik obciążenia. Zakładamy, że z liniowym wzrostem obciążenia zewnętrznego (1.2) stowarzyszona jest liniowa zmienność naprężeń w konstrukcji

$$(1.3) \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \boldsymbol{\sigma}^*,$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}^*$ charakteryzuje stan naprężenia w konstrukcji odpowiadający obciążeniu porównawczemu \mathbf{R}^* . W zagadnieniach tzw. stateczności początkowej przyjmujemy dalej, że pewnej wartości obciążenia zewnętrznego odpowiadają dwa lub więcej rozwiązania równania (1.1) względem niewiadomego wektora uogólnionych przemieszczeń \mathbf{r} . Zachodzi więc

$$(1.4) \quad \begin{aligned} [\mathbf{K}^{(s)} + \lambda \mathbf{K}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\sigma}^*)] \mathbf{r}_1(\lambda) &= \mathbf{R}^* \lambda, \\ [\mathbf{K}^{(s)} + \lambda \mathbf{K}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\sigma}^*)] \mathbf{r}_2(\lambda) &= \mathbf{R}^* \lambda; \end{aligned}$$

stąd po odjęciu stronami i wprowadzeniu wektora kolumnowego $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ otrzymamy równanie

$$(1.5) \quad [\mathbf{K}^{(s)} + \lambda \mathbf{K}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\sigma}^*)] \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Równanie powyższe definiuje tzw. uogólnione zagadnienie własne, którego rozwiązaniem jest układ n par typu wartość własna-vektor własny o postaci

$$(1.6) \quad (\lambda_1, \mathbf{v}_1), (\lambda_2, \mathbf{v}_2), \dots, (\lambda_n, \mathbf{v}_n).$$

Zakładamy, że

$$(1.7) \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Utwórzmy macierze o wymiarze $n \times n$:

$$(1.8) \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda_n \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix},$$

które pozwalają napisać wszystkie rozwiązania problemu własnego w postaci

$$(1.9) \quad \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{X} = -\mathbf{K}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\sigma}^*) \mathbf{X} \Lambda.$$

Zauważmy, że wektory własne \mathbf{v}_i można wyznaczyć z równania (1.5) lub (1.9) jedynie z dokładnością do pewnych skalarnych mnożników. Łatwo wykazać, że

wektory te spełniają ponadto własności tzw. $\mathbf{K}^{(s)}$ -ortogonalności oraz $\mathbf{K}^{(\sigma)}$ -ortogonalności, co po dokonaniu równoczesnego ich unormowania napiszemy w postaci

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{X} &= \mathbf{\Lambda}, & \mathbf{v}_\alpha^T \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{v}_\alpha &= \lambda_\alpha & \text{dla } \alpha &= 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{X}^T \mathbf{K}^{(\sigma)} \mathbf{X} &= -\mathbf{I}, & \mathbf{v}_\alpha^T \mathbf{K}^{(\sigma)} \mathbf{v}_\alpha &= -1 & \text{dla } \alpha &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{I} jest n wymiarową macierzą jednostkową. Z równań (1.10) wynika, że

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}^{(s)} &= \mathbf{X}^{-T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1}, \\ \mathbf{K}^{(\sigma)} &= -\mathbf{X}^{-T} \mathbf{X}^{-1}. \end{aligned}$$

Napiszmy wyjściowe równanie (1.1) w postaci

$$(1.12) \quad [\mathbf{K}^{(s)} + \lambda \mathbf{K}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\sigma}^*)] \mathbf{r}(\lambda) = \lambda \mathbf{R}^*.$$

Rozwiązanie tego równania w obszarze przedkrytycznym, w którym obowiązuje warunek $\det(\mathbf{K}^{(s)} + \lambda \mathbf{K}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\sigma}^*)) \neq 0$ napisać można w następującej postaci symbolicznej:

$$(1.13) \quad \mathbf{r}(\lambda) = [\mathbf{K}^{(s)} + \lambda \mathbf{K}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\sigma}^*)]^{-1} \lambda \mathbf{R}^*.$$

Podstawiając do wzoru (1.13) wielkości (1.11) otrzymamy

$$(1.14) \quad \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{X} [\mathbf{\Lambda} - \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{X}^T \lambda \mathbf{R}^*$$

lub

$$(1.15) \quad \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{X} [\mathbf{\Lambda} \lambda^{-1} - \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{R}^*.$$

Przyjrzyjmy się bliżej powyższym równaniom. Występują w nich macierze $\mathbf{\Lambda}$ i \mathbf{X} , które możemy zbudować dopiero po rozwiązaniu problemu własnego (1.9). Do poprawnego zdefiniowania problemu własnego niezbędna jest natomiast znajomość rozkładu naprężeń $\boldsymbol{\sigma}^*$ występującego jako argument funkcji macierzowej $\mathbf{K}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\sigma}^*)$. Zgodnie z wprowadzonymi na wstępie uproszczeniami rozkład naprężeń $\boldsymbol{\sigma}^*$ znaleźć można na podstawie problemu liniowego

$$(1.16) \quad \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{r}^* = \mathbf{R}^*,$$

w którym \mathbf{r}^* jest wektorem przemieszczenia, odpowiadającym w problemie zlinearyzowanym obciążeniu porównawczemu \mathbf{R}^* . Naprężenie $\boldsymbol{\sigma}^*$ oblicza się na podstawie znanych uogólnionych przemieszczeń \mathbf{r}^* w sposób standardowy. W tym celu wykorzystujemy znane równania liniowej teorii sprężystości uwzględniając jednocześnie funkcje kształtu związane z zastosowanymi elementami skończonymi. Widzimy więc, że do utworzenia macierzowych współczynników równania (1.15) niezbędne jest rozwiązanie następujących zagadnień: a) liniowego zagadnienia statyki (1.16), b) liniowego zagadnienia bifurkacyjnego (1.5).

Przejdźmy teraz do analizy równania (1.15). Równanie to opisuje nieliniową zależność wektora uogólnionych przemieszczeń układu od narastającego monotonicznie parametru obciążenia zewnętrznego λ . Zależność ta jest ponadto bardzo prosta pod względem analitycznym, jeśli oczywiście znane są macierze $\mathbf{\Lambda}$, \mathbf{X} i dlatego może być bardzo efektywnie wykorzystana. Zauważmy ponadto, że związek (1.15)

ma sens jedynie dla $\lambda < \lambda_1$, gdzie λ_1 oznacza najniższą wartość własną. Dla $\lambda = \lambda_1$ macierz $(\lambda_1^{-1} \Lambda - \mathbf{I})$ staje się bowiem osobliwa. Zachodzi mianowicie

$$(1.17) \quad \det(\lambda_1^{-1} \Lambda - \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1} - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n}{\lambda_1} - 1 \end{bmatrix} = \\ = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n}{\lambda_1} - 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Rozważania powyższe prowadzą do następującego wniosku: nieliniowe zachowanie się konstrukcji w początkowym przedkrytycznym stanie deformacji można analizować na podstawie rozwiązań dwóch standardowych problemów liniowych, opisanych równaniami (1.16) i (1.5).

Tak postawiony problem nie miałby zbyt wielkiego znaczenia praktycznego, gdyby nie fakt, że do efektywnego wykorzystania otrzymanego równania (1.15) potrzebna jest zazwyczaj bardzo mała liczba pierwszych wartości i wektorów własnych problemu bifurkacyjnego (1.5). Fakt ten ma zasadnicze znaczenie przy rozpatrywaniu efektywności proponowanej metody. Jest on jednocześnie uzasadniony intuicyjnie, jest bowiem rzeczą oczywistą, że konstrukcja ma tendencję do silnego odkształcenia się (tj. do generowania znacznych przemieszczeń) w sposób zgodny z postaciami paru tylko pierwszych postaci wyboczenia.

Zakładając, że istotny wpływ na tworzenie się dużych przemieszczeń ma tylko m pierwszych postaci wyboczenia $m \ll n$, zdefiniujemy macierze następujące:

$$(1.18) \quad \Lambda_{n \times m}^{(m)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda_m \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_{n \times m}^{(m)} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m].$$

Równanie (1.15) przyjmie wówczas postać

$$(1.19) \quad \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{X}^{(m)} [\lambda^{-1} \Lambda^{(m)} - \mathbf{I}^{(m)}]^{-1} \mathbf{X}^{(m)T} \mathbf{R}^*$$

Równanie to można również napisać w sposób wyraźniejszy:

$$(1.20) \quad \mathbf{r}(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^m \lambda (\lambda_{\alpha} - \lambda)^{-1} \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^T \mathbf{R}^*.$$

Zgodnie z powyższym wzorem do zdefiniowania nieliniowej zależności uogólnionych przemieszczeń $\mathbf{r}(\lambda)$ jako funkcji parametru obciążenia λ trzeba:

- 1) znaleźć rozwiązanie \mathbf{r}^* problemu nieliniowego (1.16) dla porównawczej wartości wektora obciążenia \mathbf{R}^* ;
- 2) na podstawie znanego wektora uogólnionych przemieszczeń \mathbf{r}^* określić stan naprężeń porównawczych $\boldsymbol{\sigma}^*$;
- 3) przyjąć liczbę m (znacznie mniejszą od liczby stopni swobody układu) postaci własnych, uwzględnianych w dalszej analizie;
- 4) znaleźć m pierwszych wartości własnych i wektorów własnych rozszerzonego problemu własnego (1.5), w którym za argument macierzy geometrycznej przyjmuje się obliczone uprzednio naprężenia porównawcze $\boldsymbol{\sigma}^*$.

Pewne metody racjonalnego doboru liczby m przeanalizujemy w pracy [4]. Dotychczasowe doświadczenie wskazuje, że już dla $m=3$ do 5 otrzymuje się wyniki o bardzo dużej dokładności.

W rozdziale 3 niniejszej pracy omówimy otrzymane wyniki testów numerycznych. Wszystkie one będą dotyczyły analizy ram płaskich. Dlatego w rozdziale 2 podano jawne postaci macierzy sztywności $\mathbf{K}^{(s)e}$ i $\mathbf{K}^{(\sigma)e}$ charakteryzujących uwzględniony w analizie belkowy element skończony. W przypadku analizy ram wektor naprężeń porównawczych $\boldsymbol{\sigma}^*$ traktować należy jako wektor uogólnionych sił wewnętrznych.

2. MODEL OBLICZENIOWY

Zakłada się, że model obliczeniowy ramy płaskiej zbudowany jest z belkowych elementów skończonych. W węzłach modelu wprowadza się trzy stopnie swobody: dwa przemieszczenia liniowe u, v oraz kąt obrotu φ . Na warunki brzegowe nie narzuca się żadnych ograniczeń. W węzłach mogą występować dowolne nieciągłości przemieszczeń (np. przeguby). Obciążeniami są uogólnione siły zredukowane do węzłów. Stosowane są trzy układy odniesienia: globalny X, Y , lokalny x, y oraz węzłowy U, V . W układzie globalnym podaje się współrzędne węzłów, w lokalnym oblicza się macierze sztywności elementów $\mathbf{K}^{(s)e}$ i macierze geometryczne $\bar{\mathbf{K}}^{(\sigma)e}$, w układzie węzłowym zaś definiuje się stopnie swobody, warunki brzegowe, wektor obciążenia zewnętrznego oraz równania równowagi. Wzajemną orientację powyższych układów jak również zasady budowy i opisu modelu obliczeniowego przyjęto identycznie jak w pracy [5].

Za skończony element belkowy przyjęto prosty, pryzmatyczny fragment konstrukcji ograniczony dwoma przekrojami nazywanymi węzłami. Wzdłuż osi elementu belkowego pole przekroju poprzecznego $A=\text{const}$, główny centralny moment bezwładności $I=\text{const}$, moduł odkształcenia podłużnego $E=\text{const}$ oraz współczynnik Poissona $\nu=\text{const}$.

W układzie węzłowym macierz sztywności elementu $\mathbf{K}^{(s)e}$ oraz macierz geometryczną elementu $\mathbf{K}^{(\sigma)e}$ oblicza się ze wzorów

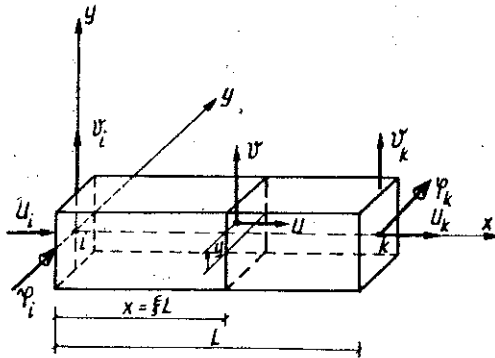
$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}^{(s)e} &= \mathbf{G}\mathbf{C}^T \bar{\mathbf{K}}^{(s)e} \mathbf{C}\mathbf{G}^T, \\ \mathbf{K}^{(\sigma)e} &= \mathbf{G}\mathbf{C}^T \bar{\mathbf{K}}^{(\sigma)e} \mathbf{C}\mathbf{G}^T, \end{aligned}$$

gdzie C i G są odpowiednio macierzami transformacji układu globalnego w układ lokalny oraz układu globalnego w układ węzłowy. Macierz sztywności struktury $K^{(s)}$ oraz macierz geometryczną struktury $K^{(\sigma)}$ otrzymuje się po dokonaniu agregacji odpowiednich macierzy elementów;

$$(2.2) \quad K^{(s)} = \sum_{e=1}^N K^{(s)e}, \quad K^{(\sigma)} = \sum_{e=1}^N K^{(\sigma)e},$$

gdzie N jest liczbą elementów.

Macierz sztywności $\bar{K}^{(s)e}$ i macierz geometryczną $\bar{K}^{(\sigma)e}$ elementu wyznaczono na drodze energetycznej, analogicznie jak w pracy [6].



Rys. 1

Niech odkształcenie podłużne dowolnego włókna (rys. 1) wynosi

$$(2.3) \quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2, \quad E_0 = \frac{du}{dx}$$

naprężenie normalne

$$(2.4) \quad \sigma_x = E\varepsilon_x,$$

siła podłużna

$$(2.5) \quad N = EA \frac{du}{dx}$$

oraz

$$(2.6) \quad \int_A dA = A, \quad \int_A y dA = 0, \quad \int_A y^2 dA = I.$$

Jeśli zaniedbamy wyrazy zawierające czwarte potęgi pochodnych przemieszczeń oraz iloczyny kwadratów, to energia sprężysta wynosi

$$(2.7) \quad U^e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E\varepsilon_x dx dA = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \right. \\ \left. + EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L N \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx.$$

Wyrażenie powyższe można także napisać w postaci

$$(2.8) \quad U^e = \frac{1}{2} (\delta^e)^T \left(\int_0^L \bar{\Phi}^T \mathbf{D} \bar{\Phi} dx \right) \delta^e + \frac{1}{2} (\delta^e)^T \left(\int_0^L \bar{\Phi}^T \bar{\mathbf{N}} \bar{\Phi} dx \right) \delta^e,$$

gdzie

$$(2.9) \quad \delta^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},$$

$$(2.10) \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{1,x} & 0 & 0 & \Phi_{4,x} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{2,xx} & \Phi_{3,xx} & 0 & \Phi_{5,xx} & \Phi_{6,xx} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{2,x} & \Phi_{3,x} & 0 & \Phi_{5,x} & \Phi_{6,x} \end{bmatrix},$$

$$(2.11) \quad \Phi_1 = 1 - \frac{x}{L}, \quad \Phi_2 = 1 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3, \quad \Phi_3 = -x + 2 \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2},$$

$$\Phi_4 = \frac{x}{L}, \quad \Phi_5 = 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3, \quad \Phi_6 = \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}.$$

Pierwsza całka w wyrażeniu (2.8) jest macierzą sztywności elementu

$$(2.12) \quad \bar{\mathbf{K}}^{(s)e} = \int_0^L \bar{\Phi}^T \mathbf{D} \bar{\Phi} dx = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Druga natomiast całka w wyrażeniu (2.8) jest macierzą geometryczną elementu

$$(2.13) \quad \bar{\mathbf{K}}^{(e)} = \int_0^L \bar{\Phi}^T \bar{\mathbf{N}} \bar{\Phi} dx = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -3L & 0 & -36 & -3L \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 3L & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 36 & 3L \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

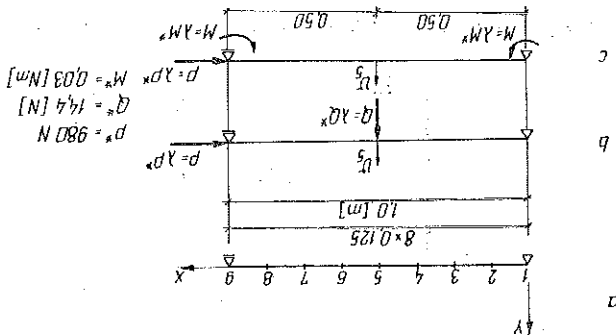
3. PRZYKŁADY

Przedstawioną w pracy metodę zilustrujemy poniżej przykładami obliczeń wykonanych na maszynie cyfrowej RIAD-32. Cały proces obliczeniowy podzielono na trzy etapy:

1. Problem liniowy (1.16) rozwiązano standardowym programem [7].
2. Uogólnione zadanie na wartości własne (1.5) rozwiązano programem omówionym w pracy [8].
3. Rozwiązania zadania nieliniowego (1.19) poszukiwano programem opracowanym przez autorów.

We wszystkich wyżej wymienionych programach posługiwano się modelem obliczeniowym przedstawionym w rozdziale 2.

PRZYKŁAD 1. Rozważmy jednoprzęślową liniowo sprężystą belkę (rys. 2a), dla której przyjęto $L=1,0$ [m], $I=10^8$ [m⁴], $A=10^{-4}$ [m²] oraz $E=10^5$ [MN/m²]. Belkę podzielono na 8 elementów skończonych. Analizowano nieliniowe zachowa-



Rys. 2

nie się konstrukcji dla dwóch przypadków obciążeń, mianowicie dla $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ (rys. 2b) oraz dla $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{P}, \mathbf{M})$ (rys. 2c). Wartości przemieszczenia pionowego v_5 węzła 5 zestawiono odpowiednio w tablicach 1 i 2. W wierszach od 1 do 6 tablicy 1 podane są wartości przemieszczenia v_5 jako funkcji λ mnożnika obciążenia porównawczego \mathbf{R}^* oraz liczby postaci wybożenia m uwzględnionych w zależności (1.19);

Tablica 1

Lp.	Numery postaci wyboczenia uwzględnione w równaniu (1.19)	Przemieszczenia pionowego węzła nr 5 w [cm] wywołane obciążeniem R_1					
		$\lambda=2$	$\lambda=4$	$\lambda=6$	$\lambda=8$	$\lambda=10$	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0,074653	0,197919	0,441439	1,15355	41,7350	
2	1, 2	0,074653	0,197919	0,441439	1,15355	41,7350	
3	1, 2, 3	0,074669	0,197986	0,441594	1,15383	41,7355	
4	1, 2, 3, 4	0,074669	0,197986	0,441594	1,15383	41,7355	
5	1, 2, 3, 4, 5	0,074670	0,197989	0,441601	1,15384	41,7355	
6	1, 2, 3, 4, 5, 6	0,074670	0,197989	0,441601	1,15384	41,7355	
7	Obliczenia wykonane wg wzoru (3.1)	0,074670	0,197991	0,441615	1,15396	41,9282	

Tablica 2

Lp.	Numery postaci wyboczenia uwzględniane w obliczeniach wykonanych wg (1.19)	Przemieszczenia pionowego węzła nr 5 w [cm] wywołane obciążeniem R_2					
		$\lambda=2$	$\lambda=4$	$\lambda=6$	$\lambda=8$	$\lambda=10$	
1	2	3	4	5	6	7 _z	
1	1, 2, 3, 4, 5, 6	$0,941206 \cdot 10^{-3}$	$0,251750 \cdot 10^{-2}$	$0,566658 \cdot 10^{-2}$	$0,149480 \cdot 10^{-1}$	$0,546116$	
2	Obliczenia wykonane wg wzoru (3.2)	$0,941202 \cdot 10^{-3}$	$0,251750 \cdot 10^{-2}$	$0,566669 \cdot 10^{-2}$	$0,149495 \cdot 10^{-1}$	$0,548640$	

w wierszu siódmym zaś zamieszczono przemieszczenia v_5 wyznaczone na podstawie wzoru wyprowadzonego w [9]:

$$(3.1) \quad v_5 = \frac{QL^3}{48EI} \left[\frac{3(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)}{\alpha^3} \right] = \frac{\lambda Q^* L^3}{48EI} \left[\frac{3(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)}{\alpha^3} \right],$$

gdzie

$$\alpha = 0,5L \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0,5L \sqrt{\frac{\lambda P^*}{EI}}.$$

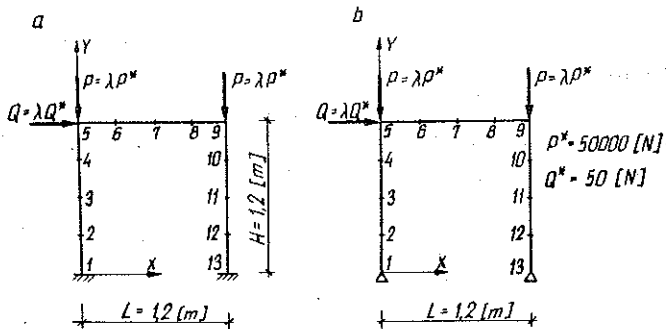
Zauważmy, że dla obciążenia $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ przemieszczenie v_5 nie zależy od antysymetrycznych postaci wybożenia (tj. postaci nr 2, 4 i 6). Fakt ten można wyjaśnić tym, że siła pionowa \mathbf{Q} działa w punkcie, w którym występuje węzeł we wszystkich antysymetrycznych postaciach wybożenia. A zatem we wzorze (1.19) czynnik $\mathbf{v}_j^T \mathbf{R}_1^* = 0$ dla $j=2, 4, \dots, m$. Analogiczna sytuacja występuje dla obciążenia $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{P}, \mathbf{M})$. W tym przypadku iloczyn skalarny $\mathbf{v}_j^T \mathbf{R}_2^*$ również jest równy zeru dla $j=2, 4, \dots, m$, ponieważ wyraża on pracę jaką wykonuje symetryczne obciążenie \mathbf{R}_2 na antysymetrycznych przemieszczeniach \mathbf{v}_j postaci wybożenia. Wartości przemieszczenia v_5 podane w wierszu drugim tablicy 2 obliczono ze wzoru zamieszczonego w pracy [9]

$$(3.2) \quad v_5 = \frac{ML^2}{8EI} \left[\frac{2(1 - \cos \alpha)}{\alpha^2 \cos \alpha} \right] = \frac{\lambda M^* L^2}{8EJ} \left[\frac{2(1 - \cos \alpha)}{\alpha^2 \cos \alpha} \right],$$

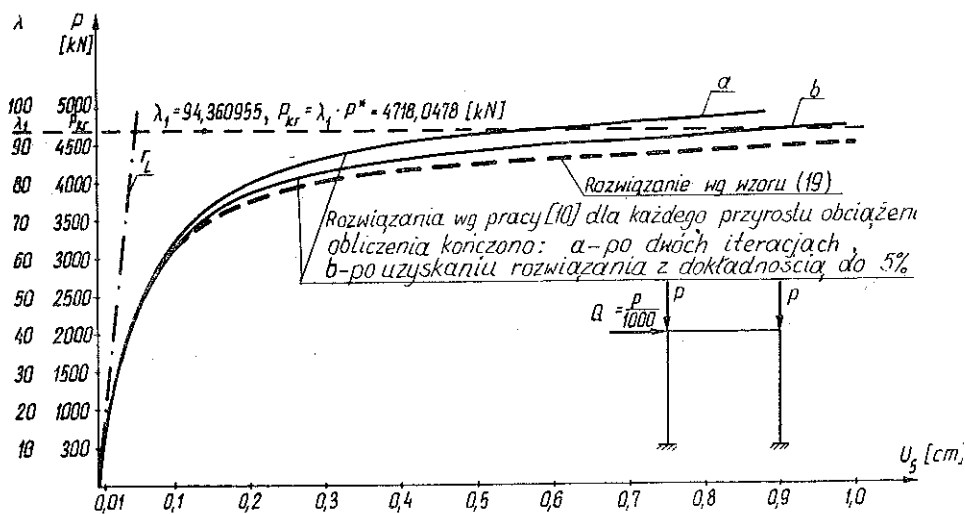
gdzie α ma taką samą postać jak we wzorze (3.1). Zauważmy, że zadowalającą dokładność obliczeń nieliniowego zachowania się konstrukcji uzyskuje się już dla trzech aktywnych w zależności (1.19) postaci wybożenia.

Ponieważ obciążenia \mathbf{R}_1 i \mathbf{R}_2 wywołują identyczny rozkład sił podłużnych, przeto rozwiązania równania (1.5) pokrywają się dla obu rodzajów obciążeń. Wartość pierwszego mnożnika obciążenia $\lambda_1 = 10,0713$, a najniższej siły krytycznej $P_{kr} = \lambda_1 P^* = 9869,87$ [N]. Siła krytyczna wyznaczona ze wzoru Eulera $P_{kr}^E = 9869,60$ [N]. A zatem opierając się na wzorze (1.19) możemy prowadzić analizę tylko dla $\lambda < \lambda_1$. Ograniczenie na λ wynika bezpośrednio z zależności (1.17).

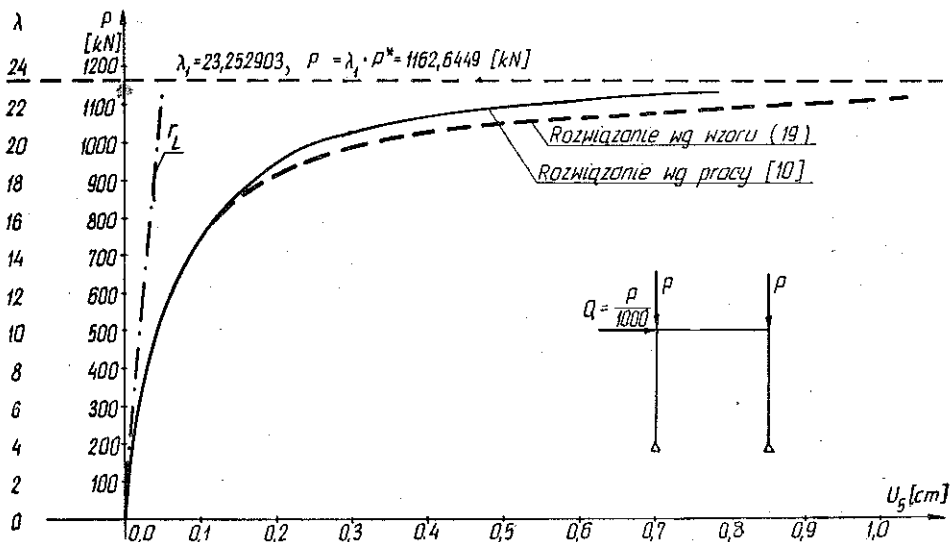
PRZYKŁAD 2. Rozważmy z kolei płaską ramę zbudowaną z trzech identycznych prętów. Niech $E = 3 \cdot 10^5$ [MN/m²], $A = 11,77 \cdot 10^{-4}$ [m²], $I = 310,1 \cdot 10^{-8}$ [m⁴], $L = H = 1,20$ [m]. Analizę nieliniowego zachowania się ramy pod działaniem obciążenia $\mathbf{R} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ przeprowadzono dla dwóch rodzajów podpór, przy czym w obu przypadkach ramę podzielono na 12 elementów (rys. 3). Za charakterystyczne dla tej konstrukcji przemieszczenie przyjęto przemieszczenie poziome U_5 węzła 5. Zmianę tego przemieszczenia jako funkcję mnożnika obciążenia porównawczego λ przedstawiono odpowiednio na rys. 4 dla pełnego zamocowania oraz na rys. 5 dla podpór przegubowych. Na obu rysunkach ciągłą linią zaznaczono rozwiązanie wzięte z pracy [10], linią kropka-kreska rozwiązanie problemu liniowego, cienką linią przerywaną poziom pierwszej wartości własnej λ_1 , co w skali sił odpowiada poziomowi najniższej siły krytycznej, a pogrubioną linią przerywaną zmianę przemieszczenia U_5 obliczoną wg wzoru (1.19). We wzorze tym uwzględniono jedynie



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Uwaga: wzór (19) na rysunkach odpowiada wzorowi (1.19) w pracy.

cztery pierwsze postacie wyboczenia, przy czym aktywnymi były tu tylko antysymetryczne postaci wyboczenia (tj. pierwsza i trzecia).

W przypadku rozważanej ramy stwierdzono, że kolejne postacie wyboczenia mają coraz mniejszy wpływ na wartość przemieszczeń obliczanych ze wzoru (1.19). Ponieważ udział trzeciej postaci wyboczenia powodował nieznaczną zmianę wartości przemieszczeń U_5 , przeto uwzględnienie w obliczeniach większej liczby postaci wyboczenia nie przyczyniłoby się do wyraźnego zwiększenia dokładności obliczeń.

Na rys. 4 i 5 podano również wartości: pierwszego mnożnika obciążenia porównawczego oraz najniższej siły krytycznej wyznaczonej z problemu (1.5). Według [10] dla pełnego zamocowania $P_{kr} = 4750$ [kN], a dla podpór przegubowych $P_{kr} = 1170$ [kN]. g

Występowanie nieco mniejszych odpowiednich sił krytycznych jest spowodowane tym, że w równaniu (1.5) posłużono się macierzami sztywności, w których uwzględniono wpływ sił podłużnych. Porównując rozwiązanie nieliniowego zadania uzyskane na podstawie wzoru (1.19) z rozwiązaniem wziętym z pracy [10], widzimy zadowalającą ich zgodność dla $\lambda < 0,7\lambda_1$, a nieco gorszą w pozostałym zakresie.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. F. BESSELING, *Non-linear analysis of structures by the finite element method as a supplement to a linear analysis*, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 3, 173-185, 1974.
2. D. A. NAGY, M. KONIG, *Geometrically nonlinear finite element behaviour using buckling mode superposition*, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 19, 447-484, 1979.
3. D. A. NAGY, *Modal representation of geometrically nonlinear behaviour*, Comp. Struct., 10, 683-688, 1979.
4. M. KLEIBER, M. WIECZOREK, *Przybliżona metoda analizy dużych przemieszczeń konstrukcji sprężystych dopuszczających stany bifurkacji równowagi* [w przygotowaniu].
5. J. SZMELTER, M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK, *Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji*, Arkady, Warszawa 1979.
6. R. M. GALLAGHER, *Finite element analysis fundamentals*, Prencite-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 379-390, 1975.
7. J. SZMELTER, M. DACKO, Z. KUROWSKI, M. WIECZOREK, *System WAT-KM, T. 9. Analiza statyczna konstrukcji powłokowo-prętowych*, WAT, Warszawa 1979.
8. M. WIECZOREK, *Obciążenie obciążeń krytycznych w liniowo sprężystych konstrukcjach prętowych*, Materiały V Konferencji, Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji, T. 2. 261-265.
9. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, 17-27, 1962.
10. J. J. CONNOR, R. D. LOGCHER, SING-CHING CHAN, *Nonlinear analysis of elastic framed structures*, J. Struct. Division, Proc. of the American Society of Civil Engineers, 1526-1547, June 1968.

Резюме

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА УПРУГИХ РАМ

Представлен некоторый, упрощенный способ анализа больших перемещений упругих рам методом конечных элементов. В ходе анализа используется знание линейного решения задач задачи рамы и линейной собственной задачи, характеризующей бифуркационную задачу. Помещенные примеры доказывают большой эффективности предлагаемого метода.

SUMMARY

APPROXIMATE METHOD OF NONLINEAR ANALYSIS OF ELASTIC FRAMES

A certain simplified FEM method of analysis is presented concerning large deflections of elastic frameworks. In the analysis use is made of the knowledge of the linear statical solution of the frame, and of the eigenproblem characterizing the bifurcation phenomena. The examples given prove the method to be very effective.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
oraz
WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 sierpnia 1981 r.
