

NUMERYCZNA ANALIZA NIELINIOWYCH ZAGADNIENÍ UTRAŁY STATECZNOŚCI KRATOWNIC SPRĘŻYSTYCH PRZY OBCIĄŻENIACH WIELOPARAMETROWYCH (*)

ZENON WASZCZYSZYN, BWA PYTEL I NGUYEN-CAO-DUONG
(KRAKÓW)

Wychodząc z funkcjonału energii potencjalnej układu wyprowadzono przyrostowe, nieliniowe równania metody elementów skończonych dla konserwatywnych, wieloparametrowych obciążeń. Podano również kryteria występowania różnych typów punktów krytycznych.

Opracowano element zastępczy dla kratownicy płaskiej, polegający na przyjęciu w środku rozpiętości pręta sprężyny o nieliniowej charakterystyce i parametrach dobranych tak, aby dobrze przybliżyć pozakrytyczne ugięcia pręta.

Algorytm wyznaczania granicy strefy krytycznej na powierzchni równowagi oparto na metodzie opisanej w [18], obliczania ścieżki równowagi w przestrzeni konfiguracyjno-przemieszczeniowej.

Jako przykład liczbowy przeanalizowano kratownicę dwuprętową. W szczególności wyznaczono dla niej strefę krytyczną i krzywe graniczne dla lokalnej i globalnej utrały stateczności.

1. WSTĘP

Rozwój teorii jak też metod obliczeniowych i maszyn cyfrowych umożliwił w ostatnich latach prowadzenie analizy stateczności nie tylko elementów, ale również całych układów konstrukcyjnych. Ze względu na algorytmizację obliczeń ustroje ciągłe zamienia się na układy o skończonej liczbie stopni swobody, stosując najczęściej metodę elementów skończonych (MES). Istotną zaletą tej metody jest unifikacja algorytmów na poziomie układu. Poszczególne typy konstrukcji różnią się doborem i umiejscowieniem uogólnionych stopni swobody oraz aproksymacją pola przemieszczeń wewnątrz elementów skończonych (mamy na myśli wersję przemieszczeniową MES).

W obecnej pracy zajmujemy się najpierw ogólnymi zależnościami a następnie najprostszymi ustrojami, za jakie można uznać kratownice płaskie. Dzięki temu otrzymujemy stosunkowo prosty model do analizy zjawisk zachodzących podczas utrały stateczności konstrukcji. W porównaniu z powszechnie stosowanym modelem kratownic wprowadzamy dodatkowy, wewnętrzny stopień swobody umożliwiający uwzględnienie lokalnej utrały stateczności (wyboczenie prętów) oraz wstępnego wygięcia pręta.

Przyjęty model pręta uogólnia modele stosowane w badaniu zagadnień liniowych utrały stateczności [1 i 5]. W pracy zajmiemy się opisem nieliniowym, umożliwiającym badanie globalnej utrały stateczności kratownic.

(*) Praca została wykonana częściowo w ramach Problemu Węzłowego 05.12.

Główną uwagę poświęcimy działaniu obciążeń wieloparametrowych, w szczególności budowaniu powierzchni granicznych w przestrzeni niezależnych parametrów obciążeń.

W zagadnieniach nieliniowych nie obowiązuje twierdzenie P. F. PĄPKOWICZA [12] o wypukłości powierzchni granicznych. Badania teoretyczne i doświadczalne konstrukcji prętowych [15] i powłokowych [7] wskazują, że powierzchnie te mogą być również wklęsłe. Z licznych prac należy wymienić przede wszystkim monografię K. HUSEYINA [9], w której podano ogólną teorię, a również szereg przypadków szczególnych. Dużo uwagi poświęcono łukom, poddanym działaniu obciążeń dwu [3, 4 i 8] i trójparametrowym [13 i 19].

Skorzystamy z własności funkcjonału energii potencjalnej układu, łącząc je z przyrostowym sformułowaniem MES. Do rozwiązywania układu algebraicznych równań nieliniowych zastosujemy metodę iteracyjną Newtona-Raphsona w przestrzeni przemieszczeniowo-obciążeniowej. W porównaniu z [18] rozszerzymy tę metodę na wyznaczenia strefy krytycznej na powierzchni równowagi.

Analizę numeryczną prowadzimy na przykładzie dwuprętowej kratownicy płaskiej o czterech stopniach swobody, poddanej działaniu obciążenia dwuparametrowego. Dzięki takiemu prostemu modelowi można podać łatwo geometryczne i fizyczne interpretacje uzyskanych wyników.

Oprzemy się na następujących założeniach:

1. Obciążenie wieloparametrowe są typu konserwatywnego, dzięki czemu można posługiwać się tylko funkcjonałem energii potencjalnej układu i statycznym kryterium utraty stateczności.

2. Kratownica, obciążenia i przemieszczenia liniowe są stałe w jednej płaszczyźnie.

3. Element skończony pręta e kratownicy składa się z dwóch prostoliniowych prętów o module sprężystości E_e i powierzchni pola przekroju A_e . Pręty są sztywne na zginanie, połączone przegubem wewnętrznym ze sprężyną spiralną o sztywności k_e . Sztywność tej sprężyny oblicza się tak, aby można było liczyć stan pozakrytyczny jak dla pręta ciągłego o momencie bezwładności przekroju poprzecznego I_e .

4. Przyjmujemy, że w prętach jest jednorodny, jednoosiowy stan naprężeń. Przyjmujemy teorię małych odkształceń lecz skończonych przemieszczeń.

2. PODSTAWOWE POJĘCIA I ZALEŻNOŚCI

Będziemy zajmowali się układem o N stopniach swobody, którym odpowiada ciąg uogólnionych przemieszczeń $\{q_i\}$, które tworzą macierz jednokolumnową (wektor) przemieszczeń ⁽¹⁾:

$$(2.1) \quad \mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_N\} \in R^N.$$

⁽¹⁾ W dalszym ciągu macierz jednokolumnową nazywamy wektorem pisząc jego składowe poziomo i ujmując je w klamry.

Obciążenie zewnętrzne P_i mogą być przykładane jedynie w punktach występowania odpowiadających im przemieszczeń q_i . Obciążenia te są funkcjami M niezależnych parametrów obciążenia λ^k (dla numeracji tych parametrów przyjęto górny indeks tak jak w pracy [9]):

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}(\lambda) \in R^N, \\ \lambda &= \{\lambda^1, \dots, \lambda^M\} \in R^M. \end{aligned}$$

Rozważania będziemy też prowadzili w przestrzeni konfiguracyjno-przemieszczeniowej R^{N+M} o wektorze wodzącym

$$(2.3) \quad \tilde{\mathbf{q}} = \{\mathbf{q}, \lambda\} \equiv \{q_\alpha\} \in R^{N+M}$$

oznaczając składowe literami greckimi, tzn. $\alpha = 1, \dots, N+M$.

Energia potencjalna układu wynosi

$$(2.4) \quad V = \sum_{e=1}^m U_{(e)}(\mathbf{q}_{(e)}; \vartheta_{(e)}) - P_i q_i,$$

gdzie $U_{(e)}$ jest energią sprężystą pojedynczego elementu (pręta), a powtarzający się wskaźnik oznacza sumowanie. W energii sprężystej składowymi wektora imperfekcji ϑ są składowe wstępnych niedokładności:

$$(2.5) \quad \vartheta = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_s\} \in R^s.$$

Z warunku stacjonarności otrzymujemy układ N równań równowagi układu

$$(2.6) \quad V_i(\mathbf{q}, \lambda, \vartheta) \equiv \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, N.$$

Układ (2.6) może być silnie nieliniowy, dlatego w obliczeniach posługujemy się częściej równaniami przyrostowymi, liniowymi względem przyrostów przemieszczeń Δq_i . Równania te otrzymujemy przez rozwinięcie funkcji $V_i(\mathbf{q}; \vartheta)$ w otoczeniu znanego punktu o wektorze $\tilde{\mathbf{q}}$ (przyjmujemy ϑ_i za ustalone parametry, nie ulegające zmianie podczas odkształcania się konstrukcji):

$$(2.7) \quad V_i(\tilde{\mathbf{q}} + \Delta \tilde{\mathbf{q}}; \vartheta) = V_i(\tilde{\mathbf{q}}; \vartheta) + V_{i\alpha}(\tilde{\mathbf{q}}; \vartheta) \Delta q_\alpha + \frac{1}{2} V_{i\alpha\beta}(\tilde{\mathbf{q}}) \Delta q_\alpha \Delta q_\beta + \dots$$

Zachowując po prawej stronie wyrazy liniowe względem Δq_α i przyrównując lewą stronę do zera (zakładamy, że w punkcie o wektorze wodzącym $\tilde{\mathbf{q}} + \Delta \tilde{\mathbf{q}}$ konstrukcja ma być w równowadze), otrzymujemy układ równań przyrostowych:

$$(2.8) \quad V_{ij}(\tilde{\mathbf{q}}; \vartheta) \Delta q_j = -V_i^k(\tilde{\mathbf{q}}; \vartheta) \Delta \lambda^k - V_i(\tilde{\mathbf{q}}; \vartheta),$$

gdzie użyto oznaczeń

$$(2.9) \quad \begin{aligned} V_{ij}(\tilde{\mathbf{q}}; \vartheta) &= \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\tilde{\mathbf{q}}}, \\ V_i^k(\tilde{\mathbf{q}}; \vartheta) &= \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \lambda^k} \right|_{\tilde{\mathbf{q}}}. \end{aligned}$$

W równaniach (2.8) celowe zachowano po prawej stronie wyraz $V_i(\tilde{\mathbf{q}}; \vartheta)$, gdyż odpowiada on siłom residualnym, które należy «wyzerować» w procesie ietracyjnym. Układ (2.8) odpowiada równaniom przyrostowym MES, wyprowadzonym najczęściej z zasady prac wirtualnych [18]

3. STAN KRYTYCZNY KONSTRUKCJI

Jeśli rozpatrywana konstrukcja znajduje się w stanie równowagi, to wektor sił residualnych $V_i=0$ i równanie przyrostowe (2.8) przyjmuje postać

$$(3.1) \quad V_{ij} \Delta q_j = -V_i^k \Delta \lambda^k \quad \text{dla} \quad i, j=1, \dots, N; \quad k=1, \dots, M.$$

Korzystając ze wzorów Cramera, układ (3.1) można przekształcić do postaci

$$(3.2) \quad D \Delta q_i = d_i^k \Delta \lambda^k,$$

gdzie przez analogię do [14 i 18] posłużono się oznaczeniami

$$(3.3) \quad d_i^k = -\frac{\partial D}{\partial V_{ji}} V_j^k, \quad D = \det |V_{ij}|.$$

Rozwiązanie (3.2) wyznacza powierzchnię równowagi w przestrzeni R^{N+M} . Powierzchnię tę nazywamy podstawową [15], jeśli przechodzi ona przez punkt $\tilde{\mathbf{q}}=0$ (rys. 1). W przypadku obciążeń jednoparametrowych będziemy mówili o ścieżce równowagi. Na rys. 1a pokazano dla przykładu ścieżkę równowagi w przypadku, gdy parametry obciążeń są funkcjami $\lambda^s(\lambda^1)$ dla $s=2, \dots, M$.

Warunkiem koniecznym osiągnięcia stanu krytycznego jest zerowanie się wyznacznika stateczności

$$(3.4) \quad D \equiv \det |V_{ij}| = 0.$$

Z rozwiązania (3.2) wynikają następujące zależności zachodzące w stanie krytycznym:

$$(3.5) \quad d_i^k \Delta \lambda^k = 0.$$

W przypadku obciążeń jednoparametrowych $\Delta \lambda \equiv \Delta \lambda^1$ w (3.5) występuje macierz jednokolumnowa \mathbf{d} i na podstawowej ścieżce równowagi można wyróżnić dwa typy punktów krytycznych [14]:

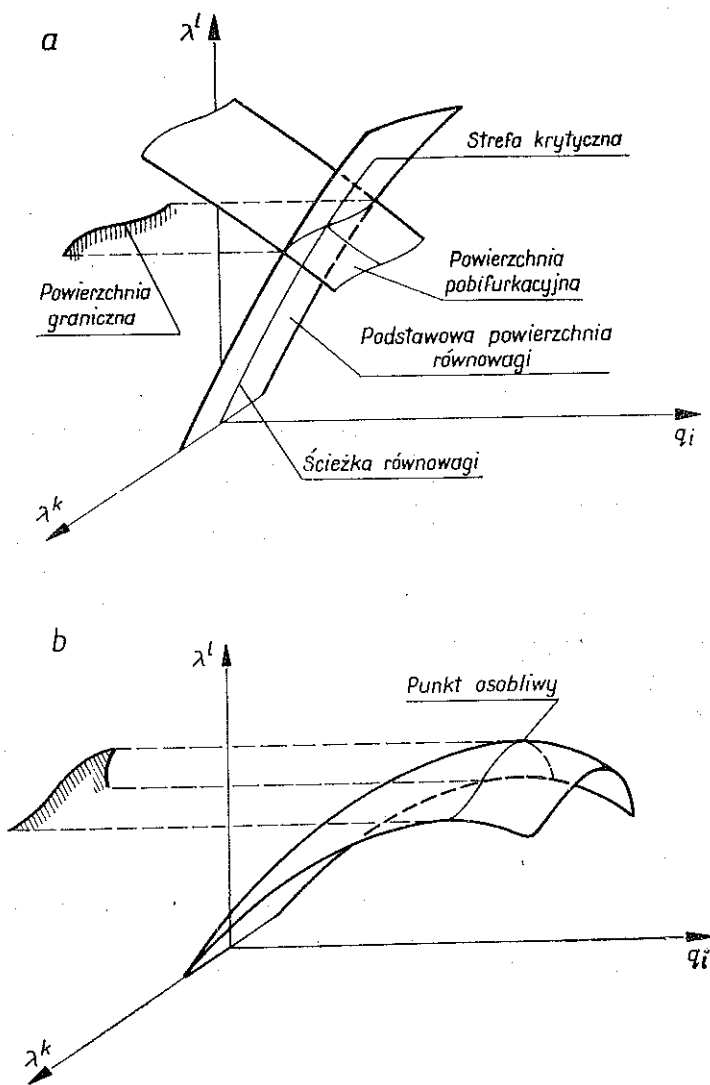
a) punkt bifurkacji

$$(3.6_1) \quad \mathbf{d} = 0, \quad \Delta \lambda \neq 0;$$

b) punkt graniczny

$$(3.6_2) \quad \mathbf{d} \neq 0, \quad \Delta \lambda = 0;$$

Klasyfikacja stanów krytycznych dla obciążeń wieloparametrowych jest znacznie bardziej złożona [9]. W przestrzeni R^{N+M} warunek (3.4) będzie określał strefę krytyczną. Na rys. 1 pokazano przypadek obciążenia dwuparametrowego $M=2$, gdy te strefy są krzywymi (miejsca geometryczne punktów krytycznych).



Rys. 1

Jeśli wszystkie składowe macierzy \mathbf{d} w związku (3.5) zerują się,

$$(3.7_1) \quad \bigwedge_{i,k} d_i^k = 0,$$

to taki punkt strefy krytycznej nazwiemy specjalnym (odpowiednik terminu „special critical point”, stosowanego w [9]). Punkt specjalny odpowiada bifurkacji stanów równowagi (rys. 1a).

W ogólnym punkcie krytycznym (*general critical point*) niektóre ze składowych d_i^k są niezerowe. Jeśli istnieje tylko jeden, różny od zera minor macierzy \mathbf{d} taki, że jej rząd wynosi

$$(3.7_2) \quad rz(\mathbf{d}) = M - 1,$$

to będzie istniało jedno niezerowe rozwiązanie $\Delta\lambda$ w rozpatrywanym punkcie strefy krytycznej (rys. 1b).

Szczególnym przypadkiem ogólnego punktu krytycznego jest punkt osobliwy, w którym istnieje tylko rozwiązanie zerowe:

$$(3.7_3) \quad \Delta\lambda = 0.$$

W [9] wykazano, że dla $N=1$ punkt osobliwy odpowiada symetrycznemu niestatecznemu punktowi bifurkacji. W ogólności (dla $N=1$) punkt osobliwy może również odpowiadać punktowi granicznemu. Taki przypadek pokazano na rys. 1b.

W zastosowaniach inżynierskich szczególnie znaczenie ma obliczanie granic stateczności, tzn. powierzchni granicznych w przestrzeni niezależnych parametrów obciążeń. Są one brzegiem rzutu na podprzestrzeń R^M stref krytycznych obliczanych w R^{N+M} . Okazuje się przy tym, że punktom specjalnym lub osobliwym odpowiadają linie lub punkty nieciągłości (żebra lub naroża) na powierzchniach granicznych (rys. 1b).

Nie będziemy dokładnie badali rodzajów nieciągłości na granicy stateczności, gdyż wymaga to posługiwanie się wyższymi pochodnymi energii potencjalnej. Również ze względów numerycznych nie będziemy dokonywali diagonalizacji macierzy V_{ij} , co jest atrakcyjne w rozważaniach teoretycznych [9 i 15].

4. ZASTOSOWANIE MES DO NIELINIOWEJ ANALIZY STATECZNOŚCI KRATOWNIC PŁASKICH

Przyjmujemy, że kratownica składa się z ciągu m prętów o indeksach $e=1, \dots, m$. Pręty są nieważkie, wstępnie wygięte. Początkowy kształt osi aproksymujemy dwoma liniami prostymi o kącie odchylenia od cięciwy wynoszącym β_{0e} (parametr wstępnej niedokładności). Pręt ma stały przekrój o powierzchni A_e i jest jednorodny o module sprężystości E_e . Własności giętne pręta są modelowane sprężyną o nieliniowej charakterystyce $k_e(q_e)$, gdzie przyjęto oznaczenia

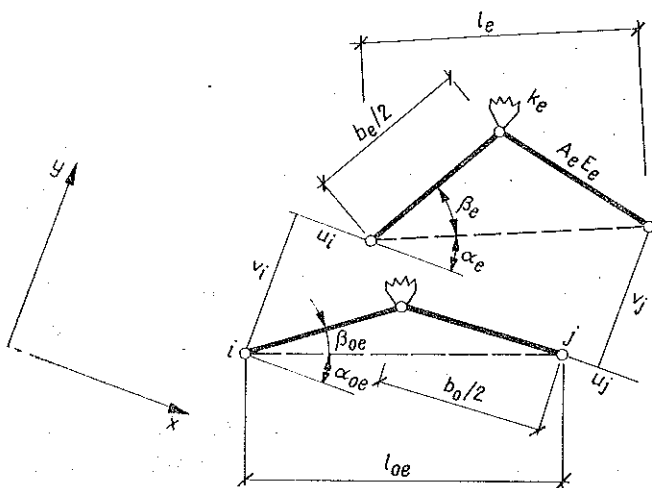
$$(4.1) \quad q_e = \beta_e - \beta_{0e}.$$

Pozostałe oznaczenia pokazano na rys. 2.

Energia sprężysta pojedynczego pręta wynosi

$$(4.2) \quad U_e = \frac{1}{2} E_e A_e b_{0e} (\varepsilon_e)^2 + 2 \int_0^{q_e} k_e(\bar{q}_e) \bar{q}_e d\bar{q}_e \quad \text{dla} \quad 0 \leq \bar{q}_e \leq q_e.$$

W dodatku D.1 obliczono pochodne $V_{ij(e)} = U_{ij(e)}$, stanowiące składowe macierzy sztywności (macierzy stycznej) przyjętego elementu skończonego. Oznaczono je przez $K_{ij(e)} = U_{ij(e)} / (E_0 A_0)$, gdzie $E_0 A_0$ jest porównawczą sztywnością na rozcią-



Rys. 2

ganie. Obliczenia wykonano względem globalnego układu współrzędnych przyjmując następujące uporządkowanie przemieszczeń węzłów:

$$(4.3) \quad \mathbf{q}_e = \{u_i, v_i, u_j, v_j, q_e\}.$$

Zgodnie z założeniami przyjęto, że obciążenie zewnętrzne może być przykładane tylko do węzłów głównych, skąd wynika praca tych obciążeń:

$$(4.4) \quad L = -P_r q_r \quad \text{dla} \quad r=1, \dots, n.$$

Współczynniki V_i^k po prawej stronie równań (2.8) liczymy od razu dla całej kratownicy. Po podzieleniu przez porównawczą sztywność $E_0 A_0$ otrzymujemy:

$$(4.5) \quad -\frac{1}{E_0 A_0} V_r^k = \frac{P_r^k}{E_0 A_0} \equiv p_r^k.$$

Siły residualne V_i są różnicą obciążeń zewnętrznych i sił wewnętrznych (wynikających z energii sprężystej):

$$(4.6) \quad r_i = \frac{P_i}{E_0 A_0} - \frac{U_i}{E_0 A_0} \equiv p_i - f_i.$$

W dodatku D.1 podano wzory na $f_{i(e)}$ dla przyjętego elementu skończonego.

We wzorach na $f_{i(e)}$ występuje bezwymiarowa sztywność sprężyny spiralnej

$$(4.7) \quad \kappa_e(q_e) = \frac{2k_e(q_e)}{E_0 A_0 l_{0e}}.$$

W D.2 wyprowadzono wzór przybliżony dla pręta prostego (dla $\beta_{0e}=0$) na zależność $\kappa_e(\beta_e)$:

$$(4.8) \quad \kappa_e = \kappa_{0e} \left(1 + \frac{1}{12} \beta^2 + \frac{1}{45} \beta^4 \right),$$

gdzie $\kappa_{0e} = s_e \pi^2 I_e / (2l_{0e}^2 A_e)$. Wzór ten dobrano tak, aby pręt zastępczy z rys. 2 dobrze przybliżał w stanie powyboczeniowym pręt ciągły o stałym przekroju i momencie bezwładności I_e (rys. D.1).

Stosując wyprowadzone oznaczenia otrzymujemy po skupieniu elementów układ równań przyrostowych MES równoważny układowi (2.8):

$$(4.9) \quad K_{ij}(\mathbf{q}; \vartheta) \Delta q_j = p_i^k(\boldsymbol{\lambda}) \Delta \lambda_i^k + r_i(\mathbf{q}; \boldsymbol{\lambda}, \vartheta),$$

gdzie zgodnie z (4.6) siły residualne wynoszą $r_i = p_i(\boldsymbol{\lambda}) - f_i(\mathbf{q}; \vartheta)$.

W porównaniu ze standardowym zastosowaniem MES (wielomianowe aproksymacje pola przemieszczeń w elemencie skończonym) nie rozdziela się macierzy stycznej na składowe macierze [18]. Proponowane przez nas podejście, w którym posługujemy się funkcjami trygonometrycznymi i algebraicznymi przy liczeniu elementów macierzy K_{ij} oraz f_i wymaga dłuższych czasów obliczeń na komputerze. Istotną korzyścią jest możliwość liczenia skończonych przemieszczeń układu kratowego, które dzięki aproksymacji (4.8) bardzo dobrze przybliżają przemieszczenia układu złożonego z prętów ciągłych.

5. OBLICZANIE STREFY KRYTYCZNEJ

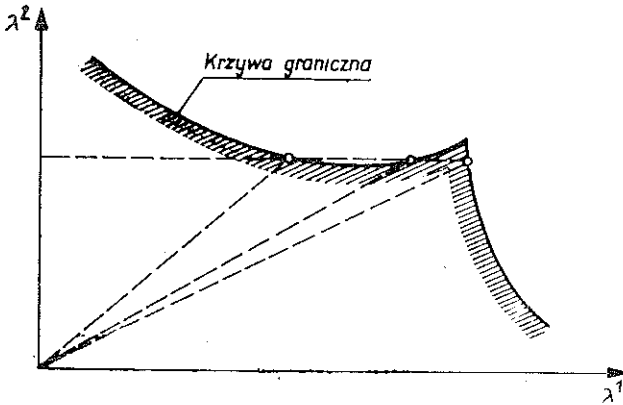
W pracy [18] przedstawiono różne metody iteracyjne obliczania ścieżki równowagi i punktów krytycznych. Metody te można dalej stosować przy ustaleniu wartości parametrów obciążenia (wykonania odpowiednich przekroi w przestrzeni R^{N+M}) z wyjątkiem jednego parametru, np. λ^1 . W ten sposób można stosować metodę obliczania ścieżki równowagi w przestrzeni R^{N+1} posługując się następującym układem równań:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} K_{ij} \Delta q_j - p_i^1 \Delta \lambda^1 &= r_i, \\ t_j \Delta q_j + t_{N+1} \Delta \lambda^1 &= \Delta \tau, \end{aligned}$$

gdzie τ jest parametrem ścieżki równowagi, a t_α składowymi wektora jednostkowego zapewniającego nieosobliwość macierzy głównej układu (5.1). W [18] wykazano, że jeśli wektor jest bliski wektorowi stycznemu do ścieżki równowagi, to dla gładkich ścieżek otrzymuje się szybko zbieżne algorytmy wyznaczania ścieżki, przy czym ilość iteracji nie ulega zmianie w okolicy punktów granicznych.

W porównaniu z [18] modyfikacji ulegają tylko współczynniki p_i^1 oraz r_i w równaniach (5.1), gdyż dla ustalonych wartości $\lambda^l = \text{const}$ dla $l=2, \dots, M$ będzie $p_i(\lambda^1; \lambda^l)$, $p_i^1(\lambda^1; \lambda^l)$.

Przy posługiwaniu się równaniami (5.1) kolejne punkty strefy krytycznej można obliczać jako ciąg punktów krytycznych dla ustalonych wartości przyrostów pa-



Rys. 3

rametru obciążenia $\Delta\lambda^l$. Takie podejście [8] może być trudne do realizacji obliczeniowej. Widać to na rys. 3, gdy granica stateczności jest niejednoznaczna względem osi λ^2 . W takich przypadkach, jak też dla obliczania punktów leżących na liniach nieciągłości, lepiej jest posługiwać się promieniowymi ścieżkami (rys. 3) [9 i 13]:

$$(5.2) \quad p_i = l_i \xi,$$

gdzie l_i są ustalonymi współczynnikami kierunkowymi linii obciążenia w przestrzeni R^M .

Opisana metoda jest uciążliwa, zwłaszcza dla $M > 2$. Pewnym postępowaniem może być obliczanie linii warstwicznych na strefie krytycznej. Metoda polega na przyjęciu dwóch niezależnych parametrów obciążenia np. λ^1 i λ^2 przy ustalonych wartościach pozostałych, tzn. $\lambda^l = \text{const}$ dla $l = 3, \dots, M$ i obliczaniu następującego układu równań w przestrzeni R^{N+2} :

$$(5.3) \quad \begin{aligned} K_{ij} \Delta q_j - p_i^1 \Delta \lambda^1 - p_i^2 \Delta \lambda^2 &= r_i, \\ t_j \Delta q_j + t_{N+1} \Delta \lambda^1 + t_{N+2} \Delta \lambda^2 &= \Delta \tau, \\ D_j \Delta q_j &= -D(\mathbf{q}; \vartheta). \end{aligned}$$

Ostatnie równanie otrzymuje się z rozwinięcia wyznacznika w otoczeniu punktu \mathbf{q} i podobnie jak r_i wyraż $-D(\mathbf{q}; \vartheta)$ po prawej stronie (5.3)₃ pełni funkcję residuum.

Przy analitycznym obliczaniu pochodnych wyznacznika stateczności

$$(5.4) \quad D_j \equiv \frac{\partial D}{\partial q_j} = \frac{\partial D}{\partial K_{rs}} K_{rsj}$$

konieczne jest posługiwanie się trzecimi pochodnymi macierzy sztywności. Z tego względu wzór (5.4) jest przydatny dla kratownic o małej liczbie stopni swobody N . Obliczanie współczynników D_j jest nieco ułatwione przez pasmową budowę macierzy K_{rs} oraz zróżnicowane stopnie swobody przyjętego elementu kratowego.

Równania (5.3) można używać do obliczania ogólnych i osobliwych punktów krytycznych. Do obliczeń można stosować standardową lub zmodyfikowaną metodę Newtona-Raphsona. Otrzymuje się pełne rozwiązanie w postaci wektora

$$(5.5) \quad \tilde{\mathbf{q}}(\tau) = \{\mathbf{q}(\tau), \lambda^1(\tau), \lambda^2(\tau); \lambda^l\},$$

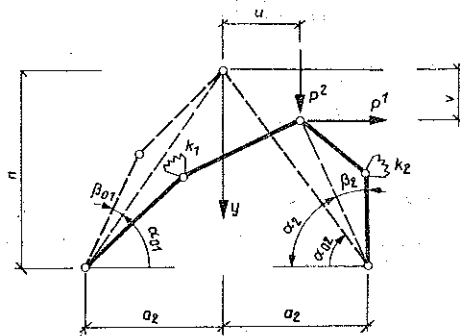
gdzie λ^l dla $l=3, \dots, M$ są ustalonymi wartościami, a τ jest parametrem krzywej na strefie krytycznej. Podzbiór $\{\lambda^1(\tau), \lambda^2(\tau), \lambda^l\}$ wyznacza warstwicę na powierzchni granicznej. Oczywiście, obliczenia można powtórzyć dla innych ustalonych wartości parametrów obciążenia.

Uwzględnienie wstępnych niedokładności ε powoduje znikanie specjalnych punktów krytycznych (jeśli mogą one wystąpić w konstrukcji idealnej); w ten sposób zakres stosowania równań (5.3) powiększa się.

6. ANALIZA KRATOWNICY DWUPRĘTOWEJ

Zastosowanie podanej teorii i metod obliczeniowych pokażemy na przykładzie kratownicy dwuprętowej, nazywanej w literaturze kratą Misesa [5 i 11]. Kratownica służy często do ilustracji utraty stateczności przez przeskok [2 i 5], tzn. przez osiągnięcie punktu granicznego na podstawowej ścieżce równowagi. W pracach [5 i 6] zwrócono uwagę, że dla wysokich kratownic pomimo symetrii konstrukcji i obciążenia może wystąpić niesymetryczna postać utraty stateczności, której odpowiada punkt bifurkacji na podstawowej ścieżce równowagi. Podobne typy utraty stateczności wykazują łuki [16] oraz powłoki kuliste lub panele walcowe [10]. W ten sposób na przykładzie prostej kratownicy można prześledzić zjawiska zachodzące w znacznie bardziej złożonych konstrukcjach.

Przyjęcie elementu skończonego opisanego w p. 4 pozwala zbadać wpływ lokalnej utraty stateczności, za jaką można uważać wyboczenie prętów kratownicy⁽²⁾.



Rys. 4

⁽²⁾ W [2] podano uproszczone rozwiązania dla mało wyniosłych kratownic Misesa zakładając $N=N_{kr}$ dla pozakrytycznych odkształceń po wyboczeniu prętów.

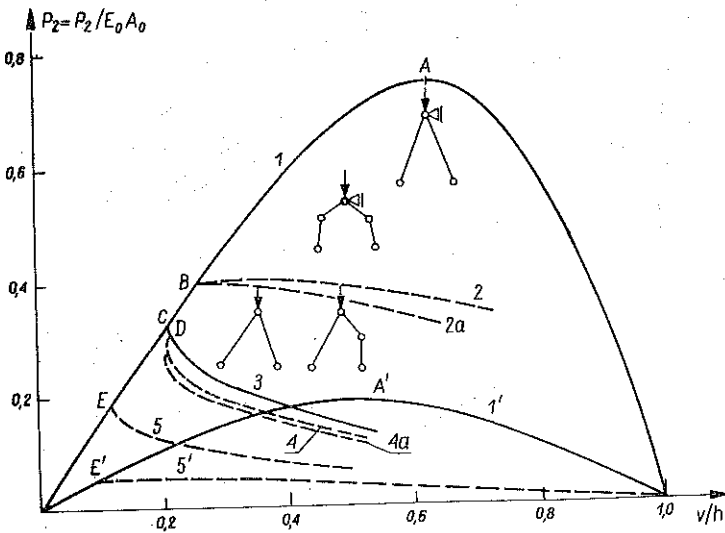
W dalszym ciągu zajmiemy się kratownicą o czterech stopniach swobody pokazaną na rys. 4. Dla zbadania wpływu wstępnych niedokładności przyjęto:

$$(6.1) \quad a_1 - a_2 = \vartheta_0, \quad \beta_{01} = \vartheta_1, \quad \beta_{02} = 0.$$

Pozostałe własności prętów są jednakowe:

$$(6.2) \quad E_1 A_1 = E_2 A_2 = E_0 A_0, \quad \kappa_1 = \kappa_2.$$

Na rys. 5 pokazano ugięcie kratownicy idealnej (bez wstępnych niedokładności, tzn. $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = 0$) i wstępnym kącie nachylenia pręta $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 70^\circ$. Na podstawowej ścieżce równowagi (linia ciągła 1) zaznaczono punkt graniczny A, jaki można osiągnąć przy założeniu dodatkowej podpory zezwalającej na symetryczne odkształcanie się kratownicy. W punkcie B następuje wyoboczenie prętów. Położenie tego punktu zależy od sztywności giętej prętów. Pobifurkacyjną ścieżkę równowagi 2 otrzymano dla zależności (4.8) i $l_0 \kappa_0 = 0,25$. Ścieżka 2a odpowiada uproszczonej zależności $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0$.



Rys. 5

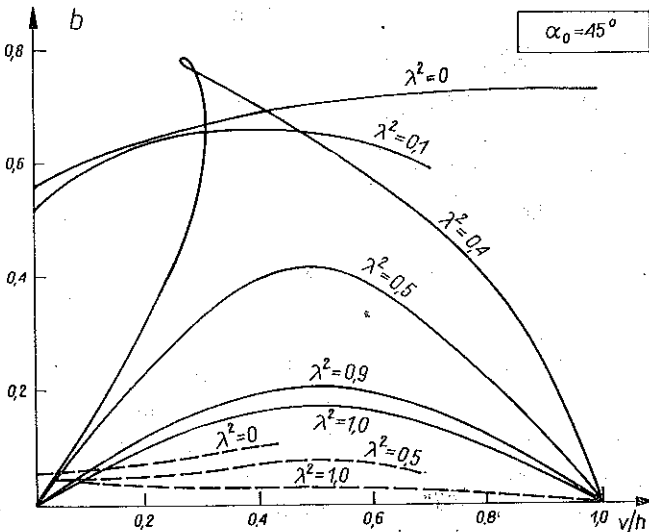
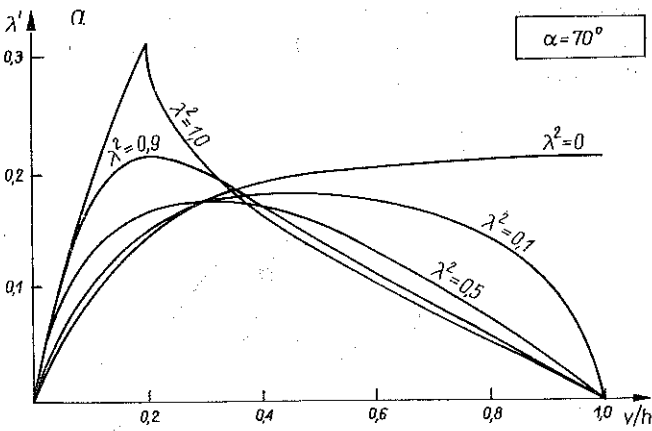
Jeśli usunie się podporę przesuwną w węzle górnym, to przy dostatecznie dużej wartości κ_0 nastąpi globalna, niesymetryczna utrata stateczności w punkcie C. Na pobifurkacyjnej ścieżce równowagi 3 (dokładniej jest to rzut ścieżki na płaszczyznę p_2, v) występuje wtórny punkt równowagi D odpowiadający wyoboczeniu prawego pręta. Linia kreskowane 4 odpowiada przyjęciu $l_0 \kappa_0 = 0,25$ w (4.8), a 4a stałej wartości $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0$. Dla niskiej sztywności giętej prętów κ_0 obciążenie krytyczne kratownicy odpowiada lokalnej utracie stateczności. Punkt bifurkacji E oraz krzywa 5 odpowiadają $l_0 \kappa_0 = 0,1$.

Na tym samym rysunku zaznaczono wykresy $p_2(v)$ dla kratownicy o $\alpha_0=45^\circ$. W tym przypadku punkt bifurkacji może wystąpić wyłącznie w wyniku wybooczenia pręta kratownicy (punkt E' i pobifurkacyjna ścieżka 5').

Znacznie bardziej złożone ścieżki otrzymuje się dla działania dwóch niezależnych obciążeń

$$(6.3) \quad p_1 = (1 - \lambda^2) \lambda^1, \quad p_2 = \lambda^2 \lambda^1.$$

Przyjęta parametryzacja odpowiada (5.2), jeśli założymy $\xi = \lambda^1$, $l_1 = 1 - \lambda^2$, $l_2 = \lambda^2$ i dla $0 \leq \lambda^2 \leq 1$; umożliwia ona rozpatrzenie różnych kierunków działania sił ($\lambda^2 = 0$ tylko obciążenie poziome, $\lambda^2 = 1$ tylko pionowe).

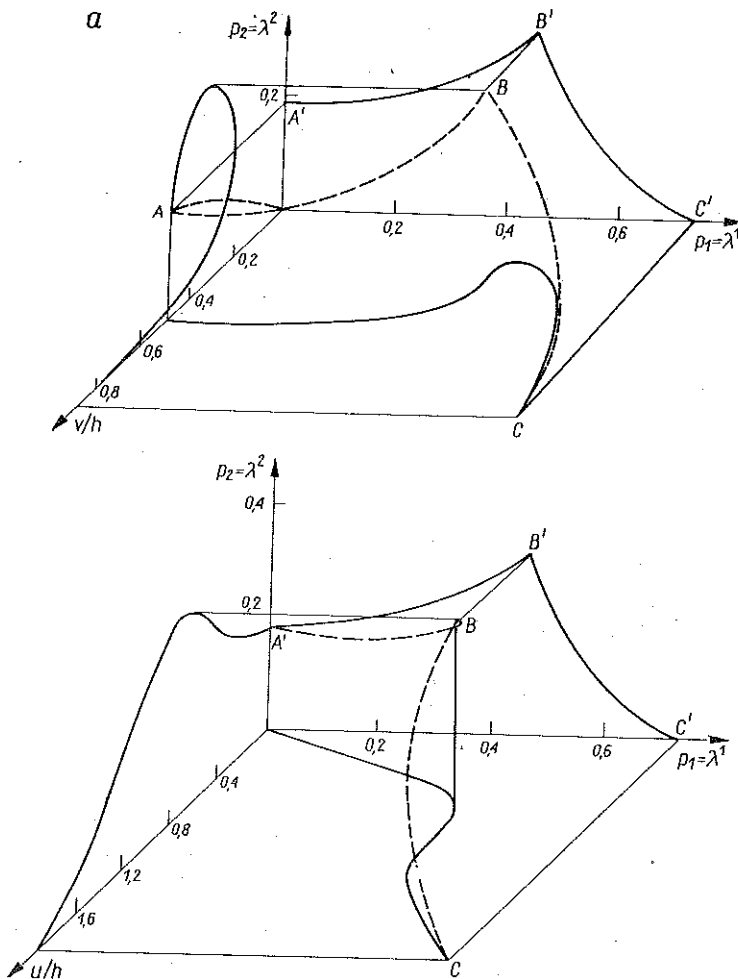


Rys. 6

Wyniki obliczeń wykonanych dla ustalonych wartości $\lambda^2 = \text{const}$ pokazano na rys. 6a, b dla kątów $\alpha_{01} = 70^\circ, 45^\circ$. Dla kratownicy o mniejszej wyniosłości i $\lambda^2 = 0,4$ złożony kształt krzywej $\lambda^1(v)$ jest wynikiem rzutowania ścieżki równowagi na płaszczyznę (λ^1, v) . Na rys. 6b liniami przerywanymi zaznaczono krzywe pobifurkacyjne dla $l_0 \kappa_0 = 0,05$. Obliczenia wskazują, że dla $\lambda^2 = 0$ występuje stacyczny punkt bifurkacji. Dla $\lambda^2 = 0,5$ na ścieżce pobifurkacyjnej zostaje osiągnięty punkt graniczny G .

Celem dalszych obliczeń było wyznaczenie strefy krytycznej i krzywych granicznych dla obciążeń dwuparametrowych. Na rys. 7 grubą linią zaznaczono strefę krytyczną przy założeniu, że pręty pierwotne prostoliniowe nie mogą ulec wyboczeniu. Obliczenia wykonano dla

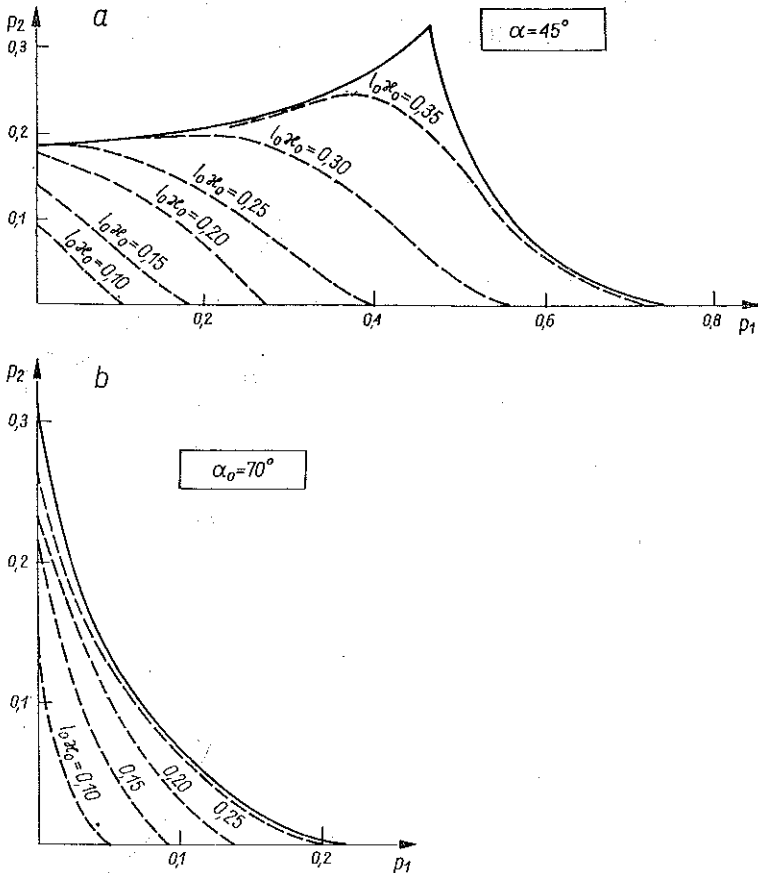
$$(6.4) \quad p_1 = \lambda^1, \quad p_2 = \lambda^2.$$



Rys. 7

Obliczenia wykonano najpierw dla $\lambda^1=0$, wyznaczając za pomocą równań (5.1) na płaszczyźnie (λ^2, v) ścieżkę równowagi aż do osiągnięcia punktu granicznego A. Następnie korzystając z równań (5.3) i z zależności (5.4), wyznaczono strefę krytyczną A-B-C.

Ny rys. 7 pokazano też rzuty strefy krytycznej na różne płaszczyzny. Rzut na płaszczyznę (λ^1, λ^2) daje krzywą graniczną A'-B'-C', przy czym otrzymuje się naroże B' odpowiadające osobliwemu punktowi krytycznemu B na strefie krytycznej. Pozostała część strefy jest miejscem geometrycznym ogólnych punktów krytycznych.

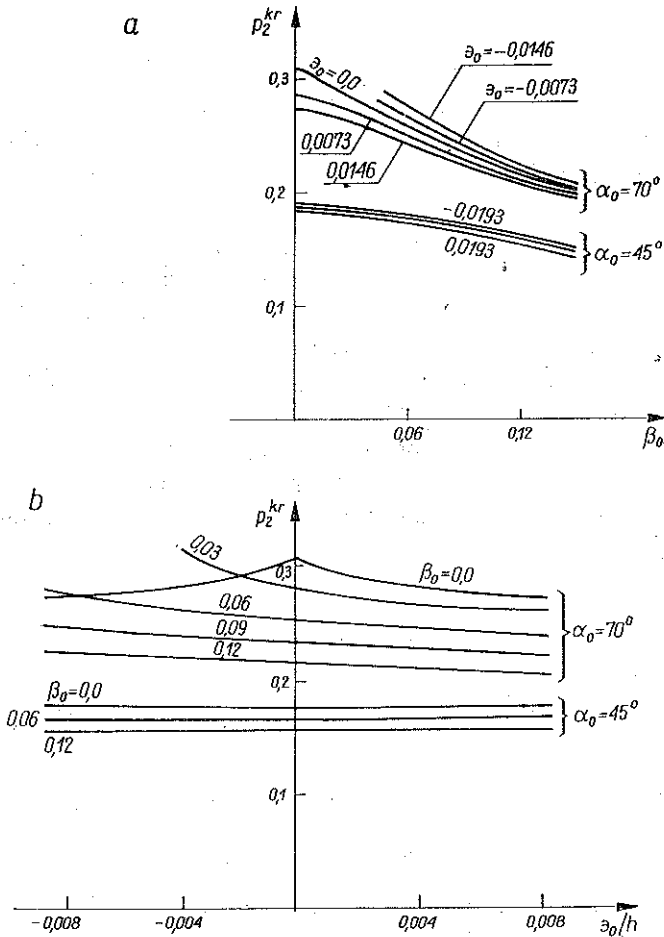


Rys. 8

Na rys. 8 narysowano krzywe graniczne dla kratownic o różnych wyniosłościach. Liniami przerywanymi zaznaczono krzywe graniczne, odpowiadające utracie stateczności układu przez lokalne wyobczenie (pojedynczego pręta).

Linia ciągła zaznaczona na rys. 8a jest podobna do krzywej granicznej łuku bezprzegubowego, obciążona dwoma niezależnie działającymi siłami skupionymi [9].

Nieliniowy stan przedbifurkacyjny powoduje, że krzywe graniczne mogą być wklęsłe (rys. 8b) lub wypukłe (np. dla $l_0 \kappa_0=0,25$ na rys. 8a).



Rys. 9

Obliczenia wykonano również dla kratownicy z imperfekcjami typu (6.1). Na rys. 9 pokazano wyniki obliczeń przy obciążeniu tylko siłą pionową. Widać, że w zależności od wyniosłości i znaku niedokładności podstawowe obciążenie krytyczne może maleć lub wzrastać. Przy ustalonej wartości globalnej imperfekcji ϵ_0 zmiana „wewnętrznej” imperfekcji powoduje zmniejszenie się obciążenia p_2^{kr} , przy czym kratownica bardziej wyniosła ($\alpha_0 = 70^\circ$) jest czulsza na niedokładności (rys. 9a). Dla ustalonych wartości β_0 istotna jest zarówno wyniosłość kratownicy, jak też znak imperfekcji globalnej ϵ_0 (rys. 9b). Na rys. 9a dla $\epsilon_0 < 0$ i małych wartości β_0 obciążenie osiąga tak duże wartości, że nie naniesiono ich na wykresach.

Wszystkie obliczenia wykonano metodą Newtona-Raphsona na maszynie CDC CYBER 72 w firmie CYFRONET—Kraków.

7. UWAGI KOŃCOWE

W pracy podaliśmy podstawowe koncepcje numerycznej analizy nieliniowych zagadnień stateczności kratownic płaskich za pomocą metody elementów skończonych. Opracowany element pozwala uwzględnić wyboczenia i pozakrytyczną pracę prętów kratownicy. Dzięki temu można analizować interakcję globalnej i lokalnej utraty stateczności.

Celowo ograniczono się do obliczenia prostego przykładu kratownicy dwuprętowej, gdyż daje on możliwość stosunkowo prostej interpretacji mechanicznej otrzymanych rozwiązań. Przykład wskazuje, jakie aspekty zjawiska utraty stateczności można badać za pomocą proponowanej metody.

Nie przytoczyliśmy szczegółów algorytmów ani możliwości zbudowanego programu na komputerze. Te zagadnienia jak też przykłady obliczeń bardziej złożonych kratownic będą przedmiotem następnej pracy.

Na koniec warto zwrócić uwagę, że proponowana metoda może być stosowana również do innych konstrukcji pod warunkiem zbudowania odpowiednich elementów skończonych.

DODATEK

D.1. Macierz sztywności i sił węzłowych elementu zastępczego

Dla skrócenia zapisu pominięto indeks e oznaczający numer elementu i przyjęto kolejną numerację stopni swobody w wektorze przemieszczeń węzłów elementu (4.3):

$$(D.1.1) \quad \mathbf{q} = \{u_i, v_i, u_j, v_j, \beta - \beta_0\} = \{q_1, \dots, q_5\}.$$

Odształcenie ε występujące w energii potencjalnej (4.2) liczymy zgodnie z przyjętym założeniem małych odształceń:

$$(D.1.2) \quad \varepsilon = \frac{b}{b_0} - 1,$$

gdzie należy podstawić liczby:

$$(D.1.3) \quad b = \frac{l}{\cos \beta}, \quad b_0 = \frac{l_0}{\cos \beta_0},$$

$$l_0 = [(l_0 \cos \beta_0 + q_1 - q_3)^2 + (l_0 \sin \beta_0 + q_2 - q_4)^2]^{1/2}.$$

Przy liczeniu pochodnych energii sprężystej przyjęto oznaczenia stosowane w p. 4:

$$(D.1.4) \quad f_i = \frac{1}{E_0 A_0} \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad K_{ij} = \frac{1}{E_0 A_0} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$$

$$s = \frac{EA}{E_0 A_0}, \quad \kappa(q_5) = \frac{2k(q_5)}{E_0 A_0 l_0}.$$

Pierwsze pochodne f_i występujące w wektorze sił residualnych (4.6) wynoszą

$$(D.1.5) \quad \begin{aligned} f_1 = -f_3 = f \cos \alpha, \quad f_2 = -f_4 = f \sin \alpha, \\ f_5 = -f l \operatorname{tg} \beta + \kappa(q_5). \end{aligned}$$

Drugie pochodne odpowiadają składowym macierzy sztywności K_{ij} :

$$(D.1.6) \quad \begin{aligned} K_{11} = K_{33} = -K_{13} = K(g - \sin^2 \alpha), \\ K_{22} = K_{44} = -K_{42} = K(g - \cos^2 \alpha), \\ K_{12} = K_{34} = -K_{14} = -K_{23} = K \sin \alpha \cos \alpha, \\ K_{55} = L_1 + \frac{\partial \kappa}{\partial q_5}, \\ K_{51} = -K_{53} = L_2 \cos \alpha, \\ K_{52} = -K_{54} = L_2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Dla skrócenia zapisu posłużono się w podanych wzorach następującymi oznaczeniami:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{s \varepsilon}{\cos \beta} = \frac{s}{\cos \beta} \left(\frac{l}{l_0} \frac{\cos \beta_0}{\cos \beta} - 1 \right), \\ g &= 1 + \varepsilon = \frac{l}{l_0} \frac{\cos \beta_0}{\cos \beta}, \\ K &= \frac{s}{l \cos \beta}, \\ L_1 &= \frac{s l}{\cos^2 \beta} \left(\frac{l}{l_0 \cos \beta_0} - \frac{1 + \sin^2 \beta}{\cos \beta} \right), \\ L_2 &= \frac{s}{\cos \beta} \left(\operatorname{tg} \beta - 2 \frac{l}{l_0} \frac{\sin \beta}{\cos \beta_0} \right). \end{aligned}$$

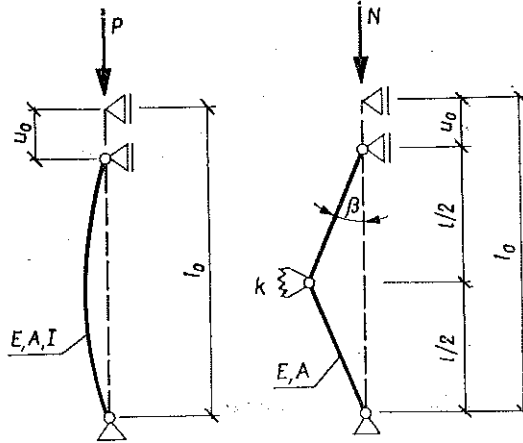
Składowe macierzy podano od razu w układzie globalnym x, y —(rys. 2).

D.2. Zastępcza sztywność na zginanie

Celem obliczania przemieszczeń pozakrytycznych układu złożonego z pierwotnie prostoliniowych prętów zastępczych obliczono sztywność sprężyny w przegubie środkowym pręta z rys. 2. Sztywność tę dobrano tak, aby przemieszczenie u_0 końca pręta wywołane zginaniem było jednakowe (lub niewiele się różniło) dla pręta rzeczywistego i zastępczego (rys. D.1), a siła krytyczna była równa sile eulerowskiej

$$(D.2.1) \quad P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} = N_{\text{kr}},$$

gdzie I jest momentem bezwładności pola przekroju pręta rzeczywistego. Dalej przyjmuje się, że moduł sprężystości E i powierzchnie pola przekroju są jednakowe dla pręta rzeczywistego i zastępczego.



Rys. D.1

Przemieszczenia u_0 pręta rzeczywistego oblicza się wzorem [17]:

$$(D.2.2) \quad \frac{u_0}{l_0} = 2 \left(1 - \frac{E(\sin^2 \vartheta)}{K(\sin^2 \vartheta)} \right),$$

gdzie $K(\sin^2 \vartheta)$, $E(\sin^2 \vartheta)$ są całkami eliptycznymi zupełnymi odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju, a ponadto $K(\sin^2 \vartheta) = \pi/2 \cdot \sqrt{P/P_{kr}}$.

Dla pręta zastępczego zachodzą związki:

$$(D.2.3) \quad \frac{u_0}{l_0} = \cos \beta, \quad \frac{N}{N_{kr}} = \frac{2}{s} \left(\frac{A}{\pi} \right)^2 \cdot \kappa \frac{\beta}{\sin \beta},$$

gdzie przez $A = l_0 \sqrt{A/I}$ oznaczono smukłość pręta, a bezwymiarowa sztywność $\kappa = 2k/(l_0 E_0 A_0)$.

Funkcję $\kappa(\beta)$ przyjęto w postaci wielomianu parzystego stopnia (funkcję symetryczną):

$$(D.2.4) \quad \kappa(\beta) = \kappa_0 (1 + C_1 \beta^2 + C_2 \beta^4).$$

Po podstawieniu tej funkcji do (D.2.3) dla $\beta=0$ otrzymujemy $N=N_{kr}$ skąd wynika że:

$$(D.2.5) \quad \kappa_0 = \frac{s}{2} \left(\frac{\pi}{A} \right)^2.$$

Współczynniki C_1 i C_2 obliczono tak, aby wartości funkcji $P(u_0)$ i $N(u_0)$ różniły się możliwie mało. W tym celu zastosowano najpierw w przedziale $0 \leq u_0/l \leq 0.8$ metodę najmniejszych kwadratów, a następnie obliczone wartości tych współczynników zaokrąglono:

$$(D.2.6) \quad C_1 = \frac{1}{12}, \quad C_2 = \frac{1}{45}.$$

Tablica 1

P/P_{kr}	u_0/l_0	N/N_{kr}	ε w %
1,06	0,112044	1,060039	0,00
1,10	0,179704	1,100707	0,00
1,20	0,326088	1,201933	0,16
1,30	0,461541	1,315530	1,19
1,40	0,549470	1,402110	0,15
1,50	0,636421	1,499847	0,01
1,60	0,711313	1,595524	0,28
1,70	0,776446	1,688932	0,65
1,80	0,833603	1,779952	1,12

W tablicy 1 zestawiono błędy jakie występują dla przyjętych współczynników (D.2.6). Błąd względny obliczono dla siły N :

$$\varepsilon = \left| \frac{N-P}{N} \right| 100\%$$

Widać, że dla przedziału $0 \leq u_0/l_0 \leq 0,834$ maksymalny błąd wynosi ok. 1%.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Н. И. Безухов, О. В. Лужин, *Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах*, Гостройиздат, Москва 1963.
2. D. O. BRUSH, B. O. ALMROTH, *Buckling of bars, plates and shells*, Mc Graw-Hill, 1975.
3. D. A. DEPPO, R. SCHMIDT, *Stability of two-hinged circular arches under independent loading parameters*, AIAA J., 12, 3, pp. 385-386, 1974.
4. D. A. DEPPO, R. SCHMIDT, *Large deflections and stability of hingeless circular arches under interacting loads*, J. Appl. Mech., 41, 4, 989-994, 1974.
5. В. И. Феодосьев, *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*, 3, Наука, Москва 1967.
6. Е. А. Гопуляк, В. И. Гуляев, *Ветвление решений нелинейных уравнений механических систем*, Сопр. Матер. и Теория Сооруж., 31, 16-22, 1977.
7. Е. И. Григолюк, В. В. Кабанов, *Устойчивость оболочек*, Наука, Москва 1978.
8. K. HUSEYIN, *The stability boundary of systems with one degree of freedom*, Mecanica, 4, 5 306-316, 1970.
9. K. HUSEYIN, *Nonlinear theory of elastic stability*, Noordhoff Int. Publ., Leyden 1975.
10. М. С. Корнищин, Ф. С. Исанбаева, *Гибкие пластины и панели*, Наука, Москва 1968.
11. И. Г. Пановко, И. И. Губанова, *Устойчивость и колебания упругих систем*, 3, Изд. Наука, Москва 1979.
12. П. Ф. Папкович, *Труды по строительной механике корабля*, 4, 4, Изд. Судостроение, Ленинград 1963.

13. R. H. PLANT, *Stability of shallow arches under multiple loads*, J. Eng. Mech. Div., ASCE EM5, **104**, 1015-1026, 1978.
14. E. RIKS, *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, Int. J. Solids Structures, **15**, 529-551, 1979.
15. J. ROORDA, *Concepts in elastic structural stability*, Mech. Today 1, 322-372, Pergamon 1972.
16. H. L. SCHREYER, E. F. MASUR, *Buckling of shallow arches*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, EM4, **92**, 1-17, 1966.
17. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
18. Z. WASZCZYSZYN, *Problemy numeryczne nieliniowej analizy konstrukcji sprężystych., Nowoczesne problemy stateczności konstrukcji*, Ossolineum 1981 341-380.
19. R. H. B. WELTON, II, *Snap-through of arch model under multiple loads*, J. Eng. Mech. Div. ASCE, EM4, **104**, 964-967, 1978.

Резюме

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ФЕРМ ПРИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Исходя из функционала потенциальной энергии системы, выведены в приростах нелинейные уравнения метода конечных элементов для консервативных, многопараметрических нагрузок. Приведены тоже критерия выступления разных типов критических точек.

Разработан эквивалентный элемент для плоской фермы, заключающийся в принятии в центре пролета стержня пружины с нелинейной характеристикой с так подобранными параметрами, чтобы хорошо приблизить внекритические прогибы стержня.

Алгоритм определения границы критической зоны на поверхности равновесия опирается на метод описанный в [18] расчета дорожки равновесия в пространстве конфигураций и перемещений.

Как числовой пример проанализирована двухстержневая ферма. В частности определены для ней критическая зона и предельные кривые для локальной и глобальной потерь устойчивости.

SUMMARY

NUMERICAL ANALYSIS OF NONLINEAR INSTABILITY PROBLEMS OF ELASTIC TRUSSES SUBJECT TO MULTI-PARAMETER LOADS

Starting from the potential energy functional, the nonlinear FEM equations for conservative multi-parameter loads are derived. Criteria are also given concerning various types of critical points. A model of an equivalent element of a truss is introduced according to which a spring of nonlinear characteristics is placed at the middle of the rod, its parameters representing the post-critical behaviour of the rod. The algorithm of computation of the critical zone at the equilibrium surface is based on the method described in [18] concerning the evaluation of the equilibrium path in the configuration-displacement space. A two-rod truss is numerically examined as an example; in particular, the critical zone and the limiting curves of local and global instabilities are determined.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 marca 1981 r.