

## UNIMODALNA OPTYMALIZACJA DRGAJĄCYCH I NARAŻONYCH NA UTRATĘ STATECZNOŚCI ŁUKÓW O OSI WYDŁUŻALNEJ(\*)

JAN BŁACHUT (KRAKÓW)

Posługując się zasadą Pontriagina rozważono zagadnienie optymalizacji zmienności przekroju poprzecznego łuku rozciągliwego prowadzącej do minimum objętości materiału przy ustalonych obciążeniach zewnętrznych, częstościach drgań i więzach geometrycznych. Przedstawiono przykład optymalizacji dla obustronnie utwierdzonego łuku kołowego. Rozważono również optymalizację względem obciążenia krytycznego prowadzącego do wyboczenia.

### 1. WSTĘP

Zagadnieniu optymalnego kształtowania łuków poświęca się ostatnio coraz więcej uwagi. Jak dotąd literatura poświęcona temu zagadnieniu nie jest zbyt obszerna, a przy tym rozważa się jedynie łuki o osi niewydłużalnej.

SMIRNOV i TROICKI [10] poszukują metodami rachunku wariacyjnego minimum objętości drgającego łuku przy ustalonej częstości drgań własnych i przyjęciu ograniczeń na kształt poprzeczny. Szczegółowo rozpatrzono optymalizację łuku kołowego obustronnie sztywno utwierdzonego. Stosowana metoda energetyczna daje w tym przypadku takie same wyniki, jakie otrzymano w pracy [2] dla sformułowania unimodalnego. Jednak zapewne dla mało wyniosłych łuków konieczne byłoby sformułowanie bimodalne [2, 3, 5, 8 i 9]. GRINIEV i FILIPPOV [6] dla łuku kołowego poszukują maksimum krytycznej wartości ciśnienia zewnętrznego. Przedyskutowano również sformułowania dualne. Problemowi optymalnego kształtowania łuku kołowego o stałej szerokości ze względu na maksymalną wartość krytyczną obciążenia hydrostatycznego poświęcona jest praca WU [12]. BUDIANSKY, FRAUENTHAL i HUTCHINSON [4] badają maksymalizację krytycznego obciążenia hydrostatycznego dla wyniosłych łuków kołowych. Wychodząc ze sformułowania energetycznego, w dalszym ciągu zastąpiono funkcjonal określający obciążenie krytyczne równaniem różniczkowym czwartego rzędu. TADJBAKHSH i FARSHAD [11] formułują wariacyjnie problem optymalnego

(\*) Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. «Wytrzymałość konstrukcji maszynowych i budowlanych».

kształtowania łuków w stanie bezmomentowym ze względu na stateczność. KĘPKA i WASZCZYŹYŃ [7] rozważają optymalizację powłoki walcowej opartej na żebrach wzdłużnych. Za kryterium optymalności przyjęto minimum objętości powłoki i żeber podtrzymujących ją. Przyjęto następujące warunki ograniczające: geometryczne, wytrzymałościowe i statecznościowe oraz podano analizę form utraty stateczności.

BLACHUT i GAJEWSKI [2] rozpatrywali optymalizację obciążonych i drgających łuków narażonych na utratę stateczności, a będących w stanie bezmomentowym. Okazało się, że podejście unimodalne nie zawsze prowadzi do poprawnych rozwiązań.

Celem tej pracy jest próba unimodalnej optymalizacji łuków o osi wydłużalnej. Chodzić będzie o zbadanie wpływu wydłużalności osi łuku na kształty optymalne oraz wskazanie obszarów, w których rozwiązania unimodalne pozostają poprawne.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA OPTIMALIZACJI

### 2.1. Stan statycznego ugięcia oraz nałożone na niego małe liniowe drgania

Rozpatrywać będziemy łuk z materiału liniowo-sprężystego o dowolnej krzywiznie  $k$ . Równania ruchu opisujące zachowanie się takiego łuku zostały m.in. wyprowadzone w pracy [1] i mają postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \hat{v}' &= -k\hat{w} - (1 - \cos \hat{\psi}) + \varepsilon_0 \cos \hat{\psi}, \\ \hat{w}' &= k\hat{v} - \sin \hat{\psi} - \varepsilon_0 \sin \hat{\psi}, \\ \hat{\psi}' &= -\frac{\hat{M}}{EI_{20}} + k\varepsilon_0, \\ \hat{\mathcal{N}}' &= -k\hat{\mathcal{K}} - (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \rho A \ddot{v}, \\ \hat{\mathcal{K}}' &= k\hat{\mathcal{N}} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + \rho A \ddot{w}, \\ \hat{M}' &= -(1 + \varepsilon_0) (\hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\psi} + \hat{\mathcal{K}} \cos \hat{\psi}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{EA} (\hat{\mathcal{N}} \cos \hat{\psi} - \hat{\mathcal{K}} \sin \hat{\psi} - k\hat{M}),$$

$\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  oznaczają przemieszczenia styczne i normalne,  $\hat{\psi}$  kąt obrotu stycznej do łuku w punkcie  $s$ ,  $\hat{M}$  moment zginający,  $(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau})$ ,  $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})$  składowe styczna i normalna obciążenia zewnętrznego  $\mathbf{f}$ .

$\hat{\mathcal{N}}$  i  $\hat{\mathcal{K}}$  są związane z siłą ściskającą  $\hat{N}$  i ścinającą  $\hat{Q}$  następująco:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \hat{\mathcal{N}} \cos \hat{\psi} + \hat{Q} \sin \hat{\psi} &= \hat{N}, \\ -\hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\psi} + \hat{Q} \cos \hat{\psi} &= \hat{K} \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.3) \quad \begin{aligned} (\hat{M} \delta \hat{\psi})|_0^l &= 0, \\ (\hat{\mathcal{K}} \delta \hat{w})|_0^l &= 0, \\ (\hat{\mathcal{N}} \delta \hat{v})|_0^l &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając do równań (2.1) rozwinięcie zmiennych parametrów, określających odkształcenie osi środkowej łuku, i obciążenie zewnętrzne, pozwalające na zbadanie małych drgań nałożonych na stan giętny lub zbadanie form utraty stateczności, otrzymujemy następujące równania opisujące:

Stan statycznego ugięcia

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \hat{v}'_0 &= k\hat{w}_0 - (1 - \cos \hat{\psi}_0) + \varepsilon_{00} \cos \hat{\psi}_0, \\ \hat{w}'_0 &= k\hat{v}_0 - \sin \hat{\psi}_0 - \varepsilon_{00} \sin \hat{\psi}_0, \\ \hat{\psi}'_0 &= -\frac{\hat{M}_0}{EI_{20}} + k\varepsilon_{00}, \\ \hat{N}'_0 &= -k\hat{K}_0 - \bar{q}_0, \\ \hat{K}'_0 &= k\hat{N}_0 - \bar{p}_0, \\ \hat{M}'_0 &= -(1 + \varepsilon_{00})(\hat{N}_0 \sin \hat{\psi}_0 + \hat{K}_0 \cos \hat{\psi}_0), \end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon_{00} = \frac{1}{EA} (\hat{N}_0 \cos \hat{\psi}_0 - \hat{K}_0 \sin \hat{\psi}_0 - k\hat{M}_0)$$

oraz gdzie  $p_0, q_0$  oznaczają składowe obciążenia.

Do układu (2.4) dołączymy warunki brzegowe

$$(2.5) \quad (\hat{M}_0 \delta \hat{\psi}_0)|_0^l = 0, \quad (\hat{K}_0 \delta \hat{w}_0)|_0^l = 0, \quad (\hat{N}_0 \delta \hat{v}_0)|_0^l = 0.$$

Po podstawieniu

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \hat{v}_1 &= v_1 \exp(i\omega t), & \hat{w}_1 &= w_1 \exp(i\omega t), \\ \hat{\psi}_1 &= \psi_1 \exp(i\omega t), & \hat{N}_1 &= N_1 \exp(i\omega t), \\ \hat{K}_1 &= K_1 \exp(i\omega t), & \hat{M}_1 &= M_1 \exp(i\omega t). \end{aligned}$$

znajdziemy równania opisujące liniowe drgania wokół stanu statycznego ugięcia

$$\begin{aligned} v'_1 &= -kw_1 - (1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0 \psi_1 + \frac{\cos \psi_0}{EA} [\cos \psi_0 N_1 - \\ &\quad - \sin \psi_0 K_1 - (N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1], \\ w'_1 &= kv_1 - (1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0 \psi_1 - \frac{\sin \psi_0}{EA} [\cos \psi_0 N_1 - \\ &\quad - \sin \psi_0 K_1 - (N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1], \\ \psi'_1 &= -\frac{M_1}{EI_{20}} + \frac{k}{EA} [\cos \psi_0 N_1 - \sin \psi_0 K_1 - \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} & -(N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1], \\ N'_1 &= -kK_1 - \bar{q}_1 - \rho\omega^2 Av_1, \\ K'_1 &= kN_1 - \bar{p}_1 - \rho\omega^2 Aw_1, \\ M'_1 &= -(1 + \varepsilon_{00}) [\cos \psi_0 K_1 + \sin \psi_0 N_1 + (N_0 \cos \psi_0 - \\ & - K_0 \sin \psi_0) \psi_1] - \frac{N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0}{EA} [\cos \psi_0 N_1 - \\ & - \sin \psi_0 K_1 - (N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1] \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.8) \quad \begin{aligned} (M_0 \delta \psi_1 + M_1 \delta \psi_0)'_0 &= 0, \\ (K_0 \delta w_1 + K_1 \delta w_0)'_0 &= 0, \\ (N_0 \delta v_1 + N_1 \delta v_0)'_0 &= 0. \end{aligned}$$

## 2.2. Kryterium optymalności

Jednomodalny problem optymalizacji polega na wyznaczeniu takiej funkcji  $A(s)$ , aby objętość łuku była minimalna, to znaczy, aby funkcjonal

$$(2.9) \quad V = \int_0^l A(s) ds \rightarrow \min$$

przy warunkach ograniczających w postaci następującej:

a) ograniczenia przekroju poprzecznego

$$(2.10) \quad A_1 \leq A(s) \leq A_2;$$

b) ustalenia obciążenia zewnętrznego

$$(2.11) \quad p = \text{const};$$

c) ustalenia częstości drgań

$$(2.12) \quad \omega = \text{const}.$$

Do rozwiązania problemu (2.9)–(2.12) wykorzystamy formalizm zasady maksimum Pontriagina. Hamiltonian w tym przypadku ma postać

$$(2.13) \quad H = \psi_v v'_1 + \psi_w w'_1 + \psi_\psi \psi'_1 + \psi_{N_1} N'_1 + \psi_{K_1} K'_1 + \psi_{M_1} M'_1 + \psi_0 A,$$

równania sprzężone zaś [2] postać

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \bar{N}'_1 &= -\rho\omega^2 A\bar{v}_1 - k\bar{K}_1 - \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial v_1} \bar{w}_1 - \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial v_1} \bar{v}_1, \\ \bar{K}'_1 &= -\rho\omega^2 A\bar{w}_1 + k\bar{N}_1 - \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial w_1} \bar{w}_1 - \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial w_1} \bar{v}_1, \\ \bar{M}'_1 &= -(1 + \varepsilon_{00}) (N_0 \cos \psi_0 - K_0 \sin \psi_0) \bar{\psi}_1 + \\ & + \frac{(N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0)^2}{EA} \bar{\psi}_1 + \frac{k(N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0)}{EA} \bar{M}_1 - \end{aligned}$$

$$-(1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0 \bar{K}_1 + \frac{\sin \psi_0 (N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0)}{EA} \bar{K}_1 -$$

$$-(1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0 \bar{N}_1 - \frac{\cos \psi_0 (N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0)}{EA} \bar{N}_1 + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \psi_1} \bar{w}_1 + \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \psi_1} \bar{v}_1,$$

$$(2.14) \quad \bar{v}'_1 = -(1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0 \bar{\psi}_1 - \frac{(N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0)}{EA} \cos \psi_0 \bar{\psi}_1 +$$

[cd.]

$$-k\bar{w}_1 + \frac{k \cos \psi_0}{EA} \bar{M}_1 - \frac{\sin \psi_0 \cos \psi_0}{EA} \bar{K}_1 + \frac{\cos^2 \psi_0}{EA} \bar{N}_1 + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial N_1} \bar{w}_1 + \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial N_1} \bar{v}_1,$$

$$\bar{w}'_1 = -(1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0 \bar{\psi}_1 + \frac{(N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0)}{EA} \sin \psi_0 \bar{\psi}_1 +$$

$$+k\bar{v}_1 + k \frac{\sin \psi_0}{EA} \bar{M}_1 + \frac{\sin^2 \psi_0}{EA} \bar{K}_1 - \frac{\sin \psi_0 \cos \psi_0}{EA} \bar{N}_1 + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial K_1} \bar{w}_1 + \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial K_1} \bar{v}_1,$$

$$\bar{\psi}'_1 = -\frac{k}{EA} (N_0 \sin \psi_0 + K_0 \cos \psi_0) \bar{\psi}_1 - \frac{\bar{M}_1}{EI_{20}} - \frac{k^2 \bar{M}_1}{EA} +$$

$$-\frac{k \sin \psi_0}{EA} \bar{K}_1 + \frac{k \cos \psi_0}{EA} \bar{N}_1 - \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial M_1} \bar{w}_1 - \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial M_1} \bar{v}_1.$$

Z porównania równań stanu (2.7) i równań sprzężonych (2.14) otrzymuje się wystarczające warunki identyczności tych układów równań

$$\bar{q}_1 = \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial v_1} w_1 + \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial v_1} v_1, \quad p_1 = \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial w_1} v_1,$$

$$(2.15) \quad \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \psi_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \psi_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial K_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial K_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial N_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial N_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial M_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial M_1} = 0.$$

Analizę zachowania się obciążenia zewnętrznego podano w pracy [1]. Ogólnie jednak konieczne jest rozwiązanie następujących równań: równań statycznego ugięcia (2.4), równań stanu (2.7), równań sprzężonych (2.14), z odpowiednimi warunkami brzegowymi i równoczesnym określeniem funkcji sterowania  $A(s)$  z warunku ekstremum Hamiltonianu

$$(2.16) \quad \frac{\partial H}{\partial A} = 0.$$

### 3. PRZYKŁAD. ŁUK KOŁOWY

#### 3.1. Równania stanu, warunek optymalności

Rozpatrywać będziemy sprężysty łuk kołowy o długości  $l$ , promieniu  $R$ , obustronnie sztywnie zamocowany, obciążony stałym ciśnieniem hydrosta-

tycznym  $p_0$  liczonym na jednostkę długości osi nieodkształconej (tzn. ciśnienie pozorne). Przyjęcie takiego ciśnienia podyktowane było względami numerycznymi i jak wynika z pracy [1] nie prowadzi do zasadniczych zmian ilościowych.

Wprowadźmy następujące zmienne bezwymiarowe i oznaczenia:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x &= s/l, & v_0^* &= v_0/l, & w_0^* &= w_0/l, & N_0^* &= N_0 l^2/EI_0, \\ K_0^* &= K_0 l^2/EI_0, & M_0^* &= M_0 l/EI_0, & v_1^* &= v_1/l, & w_1^* &= w_1/l, \\ N_1^* &= N_1 l^2/EI_0, & K_1^* &= K_1 l^2/EI_0, & M_1^* &= M_1 l/EI_0, \\ \beta &= \frac{p_0 R^3}{EI_0}, & \Omega &= \varrho \omega^2 \frac{R^4 A_0}{EI_0}, & \alpha &= \frac{I_0}{A_0 I}, & \bar{\varepsilon} &= l/R, \end{aligned}$$

gdzie  $\varrho$  oznacza gęstość materiału,  $\bar{\varepsilon}$  wyniosłość łuku,  $E$  moduł Younga,  $A_0, I_0$  pole powierzchni przekroju poprzecznego oraz jego moment bezwładności w punkcie  $x_0$  zdefiniowanym tak, aby  $A_0 l = V$ .

Równania opisujące statyczne ugięcie łuku mają postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} v_0^{*'} &= \bar{\varepsilon} w_0^* - 1 + (1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0^*, \\ w_0^{*'} &= -\bar{\varepsilon} v_0^* - (1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0^*, \\ \psi_0^{*'} &= -\frac{M_0^*}{f(\Phi)} - \bar{\varepsilon} \varepsilon_{00}, \\ N_0^{*'} &= \bar{\varepsilon} K_0^* - \bar{\varepsilon}^3 \beta \cos \psi_0^*, \\ K_0^{*'} &= -\bar{\varepsilon} N_0^* - \bar{\varepsilon}^3 \beta \cos \psi_0^*, \\ M_0^{*'} &= -(1 + \varepsilon_{00}) (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*), \end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon_{00} = \frac{\alpha}{\Phi} (N_0^* \cos \psi_0^* - K_0^* \sin \psi_0^* + \bar{\varepsilon} M_0^*),$$

$$A = A_0 \Phi(x), \quad I_{20} = I_0 f(\Phi), \quad f(\Phi) = \Phi^v, \quad v = 1, 2, 3$$

oraz gdzie  $\Phi$  oznacza bezwymiarowe pole przekroju poprzecznego łuku.

Do równań (3.2) dołączamy następujące warunki brzegowe wynikłe z obustronnego sztywnego utwierdzenia:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} v_0^*(0) &= 0, & w_0^*(0) &= 0, & \psi_0^*(0) &= 0, \\ v_0^*(1/2) &= 0, & \psi_0^*(1/2) &= 0, & K_0^*(1/2) &= 0. \end{aligned}$$

Warunki te odpowiadają symetrycznej formie ugięcia. Z (3.1) otrzymuje się następujące równania stanu:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} v_{1i}^{*'} &= \bar{\varepsilon} w_{1i}^* - (1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0^* \psi_{1i}^* + \frac{\alpha}{\Phi} \cos \psi_0^* [\cos \psi_0^* N_{1i}^* - \\ &\quad - \sin \psi_0^* K_{1i}^* - (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^* \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*)], \end{aligned}$$

$$w_{1i}^* = -\bar{\varepsilon} v_{1i}^* - (1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0^* \psi_{1i}^* - \frac{\alpha}{\Phi} \sin \psi_0^* [\cos \psi_0^* N_{1i}^* -$$

$$- \sin \psi_0^* K_{1i}^* - (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*],$$

$$\psi_{1i}^* = -\frac{M_{1i}^*}{f(\Phi)} - \bar{\varepsilon} \frac{\alpha}{\Phi} [\cos \psi_0^* N_{1i}^* - \sin \psi_0^* K_{1i}^* - (N_0^* \sin \psi_0^* +$$

$$(3.4) \quad + K_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*],$$

$$(3.4) \quad N_{1i}^* = \bar{\varepsilon} K_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^3 \beta \cos \psi_0^* \psi_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i \Phi v_{1i}^*,$$

$$[cd.] \quad K_{1i}^* = -\bar{\varepsilon} N_{1i}^* + \bar{\varepsilon}^3 \beta \sin \psi_0^* \psi_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i \Phi w_{1i}^*,$$

$$M_{1i}^* = -(1 + \varepsilon_{00}) [\cos \psi_0^* K_{1i}^* + \sin \psi_0^* N_{1i}^* + (N_0^* \cos \psi_0^* - K_0^* \sin \psi_0^*) \times$$

$$\times \psi_{1i}^*] - \frac{\alpha}{\Phi} (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) [\cos \psi_0^* N_{1i}^* - \sin \psi_0^* K_{1i}^* -$$

$$- (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*]$$

z następującymi warunkami brzegowymi:

a) antysymetryczna forma drgań ( $i = 1$ )

$$(3.5) \quad v_{11}^*(0) = 0, \quad w_{11}^*(0) = 0, \quad \psi_{11}^*(0) = 0,$$

$$w_{11}^*(1/2) = 0, \quad N_{11}^*(1/2) = 0, \quad M_{11}^*(1/2) = 0;$$

b) symetryczna forma drgań ( $i = 2$ )

$$(3.6) \quad v_{12}^*(0) = 0, \quad w_{12}^*(0) = 0, \quad \psi_{12}^*(0) = 0,$$

$$v_{12}^*(1/2) = 0, \quad \psi_{12}^*(1/2) = 0, \quad K_{12}^*(1/2) = 0.$$

Należy zaznaczyć, że równania (3.2) i (3.4) przechodzą bezpośrednio w równania opisujące łuk w stanie bezmomentowym [2], jeśli przyjmiemy, że  $\psi_0 = K_0 = M_0 = 0$ ,  $\varepsilon_{00} = 0$ ,  $\alpha = 0$  oraz  $N_0 = -\varepsilon^3 \beta$ .

Przyjęta postać obciążenia nie prowadzi do samosprężenia równań stanu (3.4). Należy zatem rozpatrzyć również równania sprzężone, które dla następującego Hamiltonianu:

$$(3.7) \quad H = \psi_{v_{1i}^*} v_{1i}^* + \psi_{w_{1i}^*} w_{1i}^* + \psi_{\psi_{1i}^*} \psi_{1i}^* + \psi_{M_{1i}^*} M_{1i}^* + \psi_{K_{1i}^*} K_{1i}^* + \psi_{N_{1i}^*} N_{1i}^* + \psi_0 A$$

można napisać w sposób następujący:

$$(3.8) \quad \bar{v}_{1i}^* = -\frac{\partial H}{\partial v_{1i}^*} = \bar{\varepsilon} w_{1i}^* - (1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0^* \bar{\psi}_{1i}^* + \frac{\alpha}{\Phi} \cos \psi_0^* \times$$

$$\times [\cos \psi_0^* \bar{N}_{1i}^* - \sin \psi_0^* \bar{K}_{1i}^* - (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) \bar{\psi}_{1i}^* + \bar{\varepsilon} \bar{M}_{1i}^*],$$

$$\bar{w}_{1i}^* = -\frac{\partial H}{\partial w_{1i}^*} = -\bar{\varepsilon} v_{1i}^* - (1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0^* \bar{\psi}_{1i}^* - \frac{\alpha}{\Phi} \sin \psi_0^* \times$$

$$\times [\cos \psi_0^* \bar{N}_{1i}^* - \sin \psi_0^* \bar{K}_{1i}^* - (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) \bar{\psi}_{1i}^* + \bar{\varepsilon} \bar{M}_{1i}^*],$$

$$\bar{\psi}_{1i}^* = -\frac{\partial H}{\partial \psi_{1i}^*} = -\frac{\bar{M}_{1i}^*}{f(\Phi)} - \bar{\varepsilon} \frac{\alpha}{\Phi} [\cos \psi_0^* \bar{N}_{1i}^* - \sin \psi_0^* \bar{K}_{1i}^* -$$

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & -(N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) \bar{\psi}_{1i}^* + \bar{\varepsilon} \bar{M}_{1i}^*], \\ [\text{cd.}] \quad & \bar{N}_{1i}^{*'} = -\frac{\partial H}{\partial N_{1i}^*} = \bar{\varepsilon} \bar{K}_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i \Phi \bar{v}_{1i}^*, \\ & \bar{K}_{1i}^{*'} = -\frac{\partial H}{\partial K_{1i}^*} = -\bar{\varepsilon} \bar{N}_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i \Phi \bar{w}_{1i}^*, \\ & \bar{M}_{1i}^{*'} = -\frac{\partial H}{\partial M_{1i}^*} = -(1 + \varepsilon_{00}) [\cos \psi_0^* \bar{K}_{1i}^* + \sin \psi_0^* \bar{N}_{1i}^* + \\ & + (N_0 \cos \psi_0^* - K_0^* \sin \psi_0^*) \bar{\psi}_{1i}^*] - \frac{\alpha}{\Phi} (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) [\cos \psi_0^* \bar{N}_{1i}^* - \\ & - \sin \psi_0^* \bar{K}_{1i}^* - (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) \bar{\psi}_{1i}^* + \bar{\varepsilon} \bar{M}_{1i}^*] - \bar{\varepsilon}^3 \beta \sin \psi_0^* \bar{w}_{1i}^* + \\ & + \bar{\varepsilon}^3 \beta \cos \psi_0^* \bar{v}_{1i}^*, \end{aligned}$$

gdzie  $i = 1, 2$ .

Warunki brzegowe dla układu (3.8) pozostają takie same jak dla układu (3.4).

Warunek optymalności  $\partial H / \partial \Phi = 0$  prowadzi do następującego kryterium optymalności:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & \frac{-df/d\Phi}{[f(\Phi)]^2} M_{1i}^* \bar{M}_{1i}^* + \lambda + \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i (v_{1i}^* \bar{v}_{1i}^* + w_{1i}^* \bar{w}_{1i}^*) + \\ & + \frac{\alpha}{\Phi^2} \{ (N_0^* \cos \psi_0^* - K_0^* \sin \psi_0^* + \bar{\varepsilon} M_0^*) [\sin \psi_0^* (\psi_{1i}^* \bar{N}_{1i}^* + \\ & + N_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*) + \cos \psi_0^* (\psi_{1i}^* \bar{K}_{1i}^* + K_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*) + (N_0^* \cos \psi_0^* - \\ & - K_0^* \sin \psi_0^*) \psi_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*] + (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) [\cos \psi_0^* (\psi_{1i}^* \bar{N}_{1i}^* + \\ & + N_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*) - \sin \psi_0^* (\psi_{1i}^* \bar{K}_{1i}^* + K_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*) - (K_0^* \sin \psi_0^* + \\ & + K_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^* + \bar{\varepsilon} (\psi_{1i}^* \bar{M}_{1i}^* + M_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*)] + \sin \psi_0^* \cos \psi_0^* (K_{1i}^* \bar{N}_{1i}^* + \\ & + N_{1i}^* \bar{K}_{1i}^*) - \bar{\varepsilon} \cos \psi_0^* (M_{1i}^* \bar{N}_{1i}^* + N_{1i}^* \bar{M}_{1i}^*) + \bar{\varepsilon} \sin \psi_0^* (M_{1i}^* \bar{K}_{1i}^* + \\ & + K_{1i}^* \bar{M}_{1i}^*) - \cos^2 \psi_0^* N_{1i}^* \bar{N}_{1i}^* - \sin^2 \psi_0^* K_{1i}^* \bar{K}_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^2 M_{1i}^* \bar{M}_{1i}^* \} = 0, \end{aligned}$$

gdzie  $i = 1, 2, \dots$  oraz uogólniony moment bezwładności przekroju poprzecznego jest opisany wzorem  $I_{20} = I_0 f(\Phi)$ , w którym dla przekroju prostokątnego

$$(3.10) \quad f(\Phi) = \sqrt{\frac{\Phi}{\alpha_1}} \left[ \ln \left( \frac{2 + \sqrt{\alpha_1 \Phi}}{2 + \sqrt{\alpha_1 \Phi}} \right) - \Phi \right],$$

$$I_0 = A_0 R^2.$$

W dalszym ciągu przyjmiemy uproszczone wyrażenie określające  $I_{20}$ :

$$(3.11) \quad I_{20} = c A_0 \Phi^v, \quad f(\Phi) = \Phi^v;$$

wynika ono ze wzoru (3.10) dla  $\alpha_1 \Phi \ll 1$ , gdzie  $\alpha_1 = (h^2/R^2)$ .



Przyjęcie dokładnej wartości  $I_{20}$  znacznie utrudniłoby obliczenie kształtu z warunku optymalności, a błąd względny, wynikający z zastąpienia wzoru (3.10) przez (3.11), nie przekracza 1,5% dla  $h/R = 1/4$  i 0,2% dla  $h/R = 1/10$ .

Różnym wartościom parametru  $\nu = 1, 2, 3$  odpowiada następująca wartość

$$(3.12) \quad \alpha = \frac{1}{12} \frac{h_0^2}{l^2}$$

Warunek optymalności (3.9) prowadzi wobec tego do następującego równania na kształt optymalny:

a) Dla  $\nu = 1$

$$(3.13) \quad \Phi = \left[ \frac{M_{1i}^* \bar{M}_{1i}^* - \alpha B}{\lambda + \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i (v_{1i}^* \bar{v}_{1i}^* + w_{1i}^* \bar{w}_{1i}^*)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$(3.14) \quad B = (N_0^* \cos \psi_0^* - K_0^* \sin \psi_0^* + \bar{\varepsilon} M_0^*) [\sin \psi_0^* (\psi_{1i}^* \bar{N}_{1i}^* + N_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*) + \cos \psi_0^* (\psi_{1i}^* \bar{K}_{1i}^* + K_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*) + (N_0^* \cos \psi_0^* - K_0^* \sin \psi_0^*) \psi_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*] + (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) [\cos \psi_0^* (\psi_{1i}^* \bar{N}_{1i}^* + N_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*) - \sin \psi_0^* \times (\psi_{1i}^* \bar{K}_{1i}^* + K_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*) - (N_0^* \sin \psi_0^* + K_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^* + \bar{\varepsilon} (\psi_{1i}^* \bar{M}_{1i}^* + M_{1i}^* \bar{\psi}_{1i}^*)] + \sin \psi_0^* \cos \psi_0^* (K_{1i}^* \bar{N}_{1i}^* + N_{1i}^* \bar{K}_{1i}^*) - \bar{\varepsilon} \cos \psi_0^* (M_{1i}^* \bar{N}_{1i}^* + N_{1i}^* \bar{M}_{1i}^*) + \bar{\varepsilon} \sin \psi_0^* (M_{1i}^* \bar{K}_{1i}^* + K_{1i}^* \bar{M}_{1i}^*) - \cos^2 \psi_0^* N_{1i}^* \bar{N}_{1i}^* - \sin^2 \psi_0^* K_{1i}^* \bar{K}_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^2 M_{1i}^* \bar{M}_{1i}^*.$$

b) Dla  $\nu = 2$  w celu otrzymania  $\Phi(x)$  konieczne jest rozwiązanie następującego równania algebraicznego:

$$(3.15) \quad A\Phi^3 + \alpha B\Phi - C = 0,$$

gdzie

$$A = \lambda + \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i (v_{1i}^* \bar{v}_{1i}^* + w_{1i}^* \bar{w}_{1i}^*),$$

$$C = 2M_{1i}^* \bar{M}_{1i}^*.$$

Jeśli

$$D = 1/4 \left( C^2/A^2 + \frac{4}{27} \alpha^3 \frac{B^3}{A^3} \right) \geq 0,$$

to

$$(3.16) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left[ \sqrt[3]{\frac{C}{A} + \sqrt{\frac{C^2}{A^2} + \frac{4}{27} \alpha^3 \frac{B^3}{A^3}}} + \sqrt[3]{\frac{C}{A} - \sqrt{\frac{C^2}{A^2} + \frac{4}{27} \alpha^3 \frac{B^3}{A^3}}} \right].$$

c) Dla  $\nu = 3$  kształt  $\Phi(x)$  należy wyznaczyć z równania

$$(3.17) \quad A\Phi^4 + \alpha B\Phi^2 - 3M_{1i}^* \bar{M}_{1i}^* = 0.$$

Stosując tę samą metodę iteracyjną co w pracy [2], poszukiwać będziemy takiego rozkładu  $\Phi(x)$  przy ograniczeniach

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &\leq \Phi(x) \leq \Phi_2, \\ \int_0^1 \Phi(x) dx &= 1, \\ \beta &= \text{const}, \end{aligned}$$

który spełnia równocześnie z odpowiednimi warunkami brzegowymi równania statycznego ugięcia (3.2), równania stanu (3.4) oraz równania sprzężone (3.8) i równocześnie maksymalizację pierwszą częstości drgań

$$(3.19) \quad \Omega_1 \rightarrow \max.$$

Będzie również możliwe sformułowanie

$$(3.20) \quad \beta \rightarrow \max$$

przy ograniczeniach (3.18) oraz  $\Omega_1 = \text{const}$  z równoczesnym spełnieniem równań różniczkowych (3.2), (3.4) i (3.8) z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

### 3.2. Maksymalizacja pierwszej częstości drgań

Przeprowadzono maksymalizację pierwszej, antysymetrycznej częstości drgań ( $i = 1$ ) oraz oddzielnie pierwszej symetrycznej częstości drgań ( $i = 2$ ) dla ustalonej wartości  $\beta$  i  $\nu = 2$ .

Kształty optymalne otrzymano stosując taką samą jak w pracy [2] numeryczną metodę iteracyjną. Przyjmując w pierwszej iteracji  $\Phi(x) = 1,0$  całkuje się równania (3.2) z warunkami brzegowymi (3.3), następnie równania stanu (3.4) z warunkami brzegowymi (3.5). Otrzymane rozwiązania podstawimy do warunku optymalności (3.13), stąd określamy równanie «poprawionego» kształtu (spełniając warunek unormowania (3.18) i ograniczenia (3.18)), które wykorzystujemy zamiast poprzedniego równania kształtu, rozpoczynając następną iterację. Proces iteracyjny powtarzany jest do chwili spełnienia warunków

$$(3.21) \quad |\Omega_{1\max}^1(j) - \Omega_{1\max}^1(j-1)| < \delta,$$

gdzie  $\delta$  oznacza dowolną, małą stałą,  $j$  numer iteracji. Spełnienie warunku (3.21) kończy tę część procesu iteracyjnego, w której dla ustalonego  $\Phi_1$  otrzymujemy równanie kształtu optymalnego oraz odpowiadającą mu maksymalną częstość drgań  $\Omega_{1\max}^1$ . Kolejną fazą obliczeń jest obliczenie dla tak otrzymanego równania kształtu optymalnego częstości symetrycznej  $\Omega_2^1$ , którą otrzymujemy rozwiązując równania (3.4) z warunkami brzegowymi (3.6). Całość tych obliczeń zostaje powtórzona dla różnych ograniczeń  $\Phi_1$ . Dla parametru  $h_0/l = 1/100$  przy  $\beta = 10, 20, 30$  otrzymane wyniki pokazano na rysunkach 1, 2, 3, a dla  $h_0/l = 1/20$ ,  $\beta = 10, 20$  uzyskane zależności przedstawiają rysunki 4 i 5.

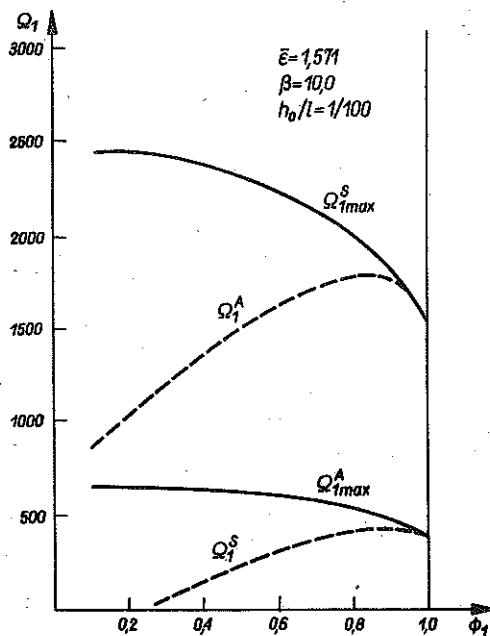
Linie ciągle oznaczone  $\Omega_{1\max}^I$  na rys. 1, 2, 3, 4, 5 i 12 oznaczają rozwiązania dla drgań antysymetrycznych;  $\Omega_{1\max}^S$  rozwiązania optymalne dla drgań symetrycznych. Natomiast linie przerywane  $\Omega_1^A$  podają częstotliwości drgań symetrycznych, jakie otrzymano dla kształtów optymalnych maksymalizujących częstość drgań antysymetrycznych. Analogicznie linie przerywane  $\Omega_1^S$  odpowiadają kształtom optymalnym maksymalizującym częstość drgań symetrycznych.

Według podobnego schematu przeprowadzono obliczenia dla drgań odpowiadających symetrycznej linii ugięcia  $\Omega_{1\max}^S$ . Wyniki odpowiadające maksymalizacji symetrycznej częstości drgań pokazano również na rys. 1, 2, 3 i 4.

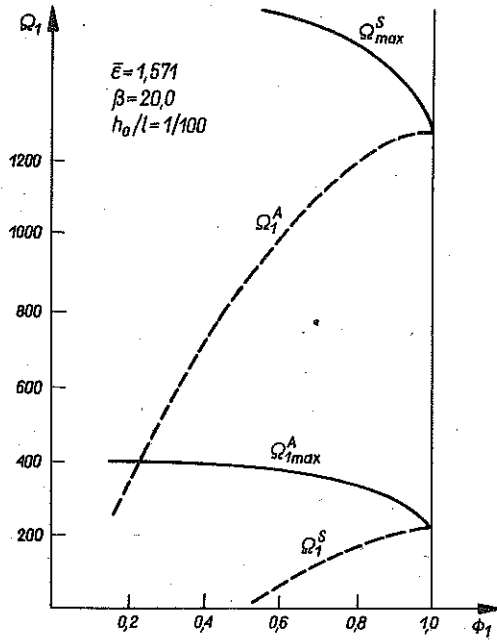
Na rys. 6, 7 i 8 przedstawiono dla  $h_0/l = 1/100$  i  $\beta = 10, 20, 30$  kształty optymalne przy ograniczeniu  $\Phi_1 = 0,6$ . A dla  $h_0/l = 1/20$   $\beta = 10$  odpowiedni kształt odpowiadający optymalizacji unimodalnej zamieszczono na rys. 9.

Należy zaznaczyć, że sformułowanie unimodalne nie prowadzi tu do poprawnych wyników w pełnym zakresie ograniczeń  $\Phi_1$ . I tak np. dla  $h_0/l = 1/100$ ,  $\beta = 30$ ,  $\Phi_1 < 0,39$  optymalnie ukształtowany łuk ze względu na  $\Omega_{1\max}^I$  posiada niższą częstość drgań przeciwnej symetrii, to jest  $\Omega^A$  (rys. 3). Tak więc w tym przypadku optymalizacja unimodalna pozostaje poprawna dla  $0,39 \leq \Phi_1 \leq 1,0$ .

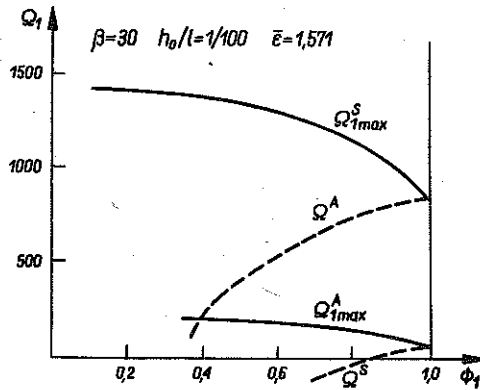
Również dla innych parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  spotykamy podobną sytuację (rys. 4 i 5).



Rys. 1



Rys. 2

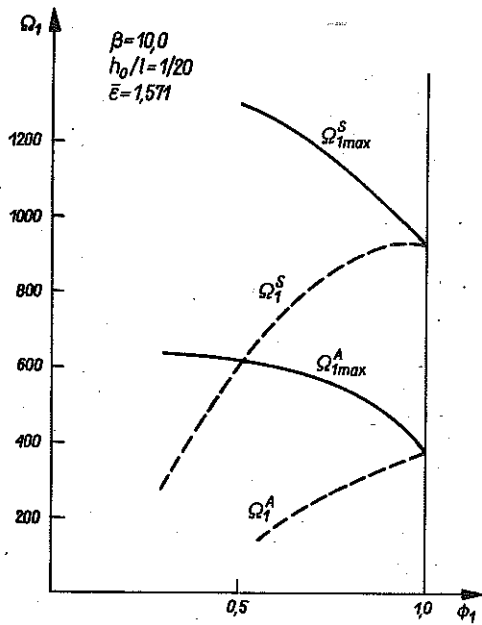


Rys. 3

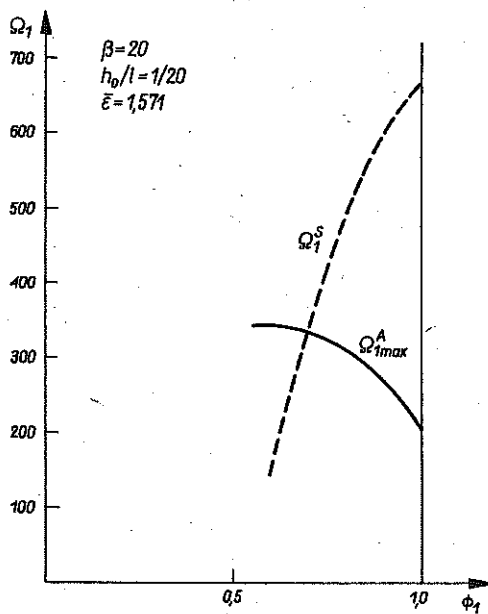
### 3.3. Maksymalizacja obciążenia krytycznego

Rozważono również zagadnienie maksymalizacji obciążenia krytycznego dla  $\Omega = 0$ .

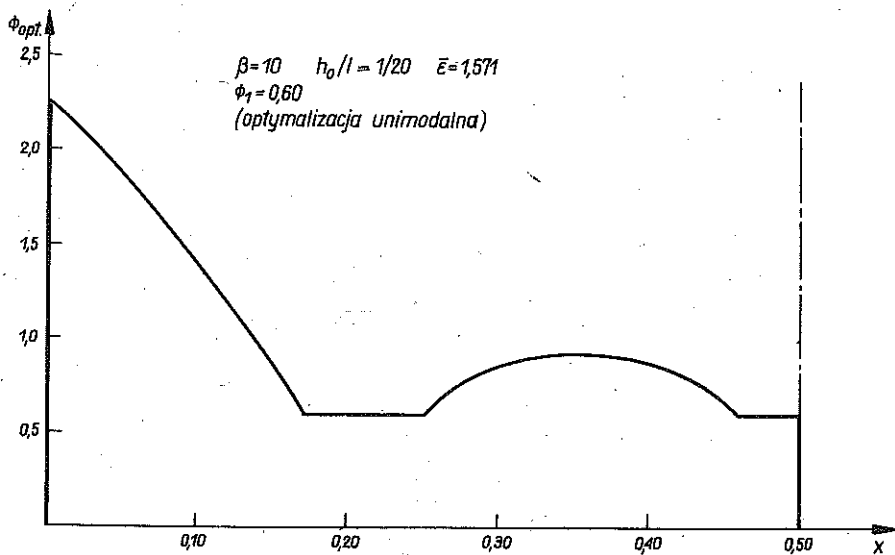
Problem ten nastęrcza wiele trudności numerycznych, głównie przy numerycznym całkowaniu równań statycznego ugięcia (3.2) i równań stanu (3.4). Wydłuża się też znacznie czas obliczeń. Warunki brzegowe równań stanu (3.5) lub (3.6) można spełnić dobierając swobodne parametry w wa-



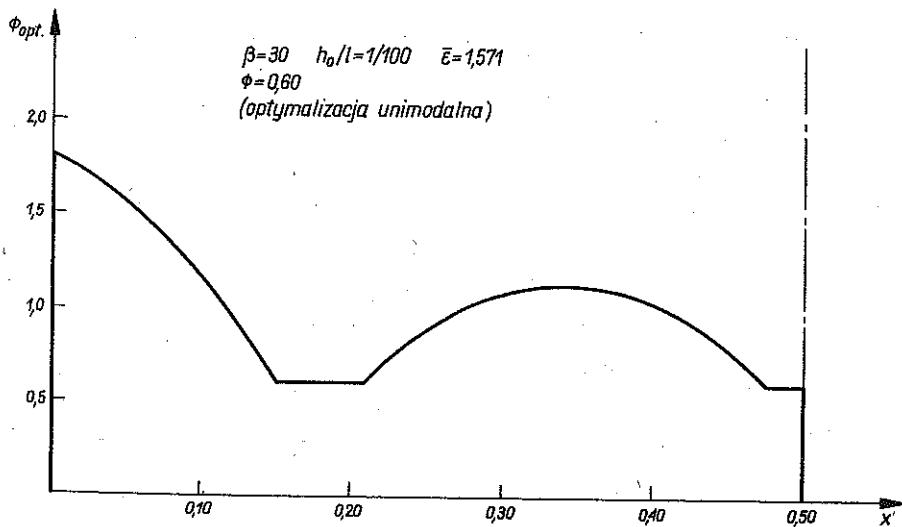
Rys. 4



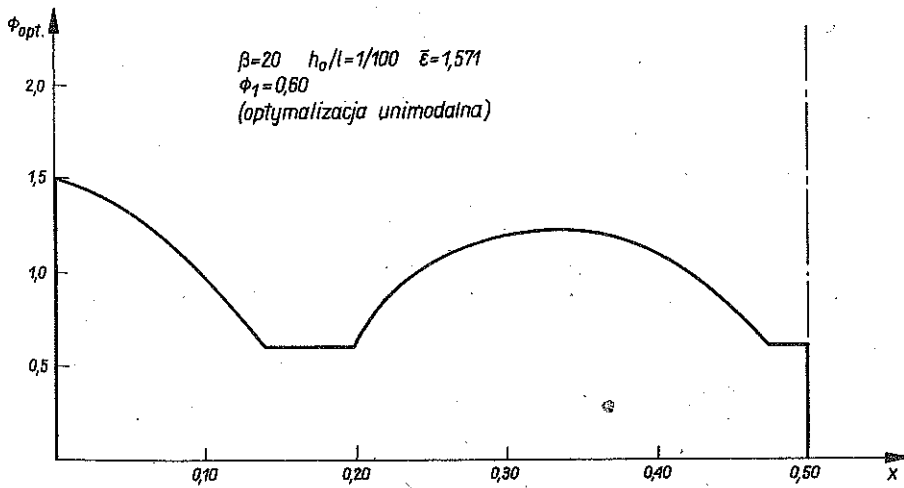
Rys. 5



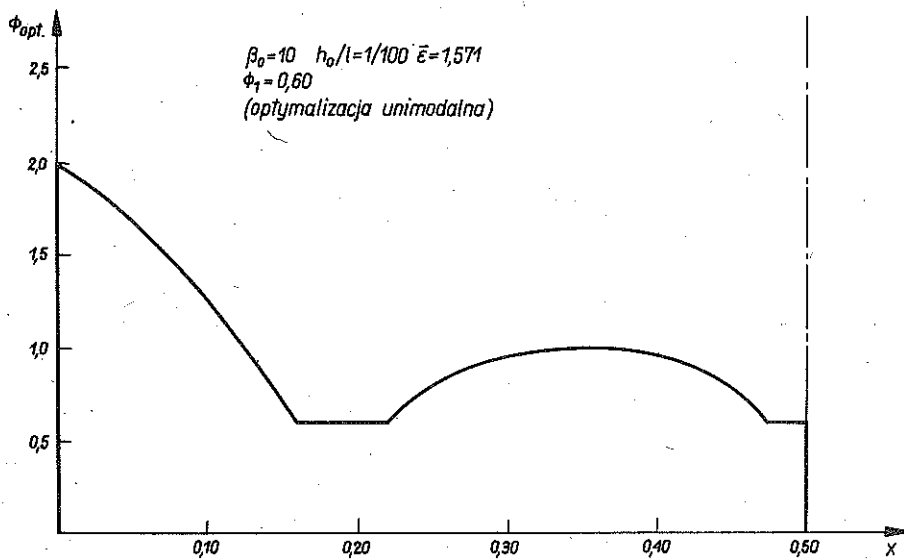
Rys. 6



Rys. 7



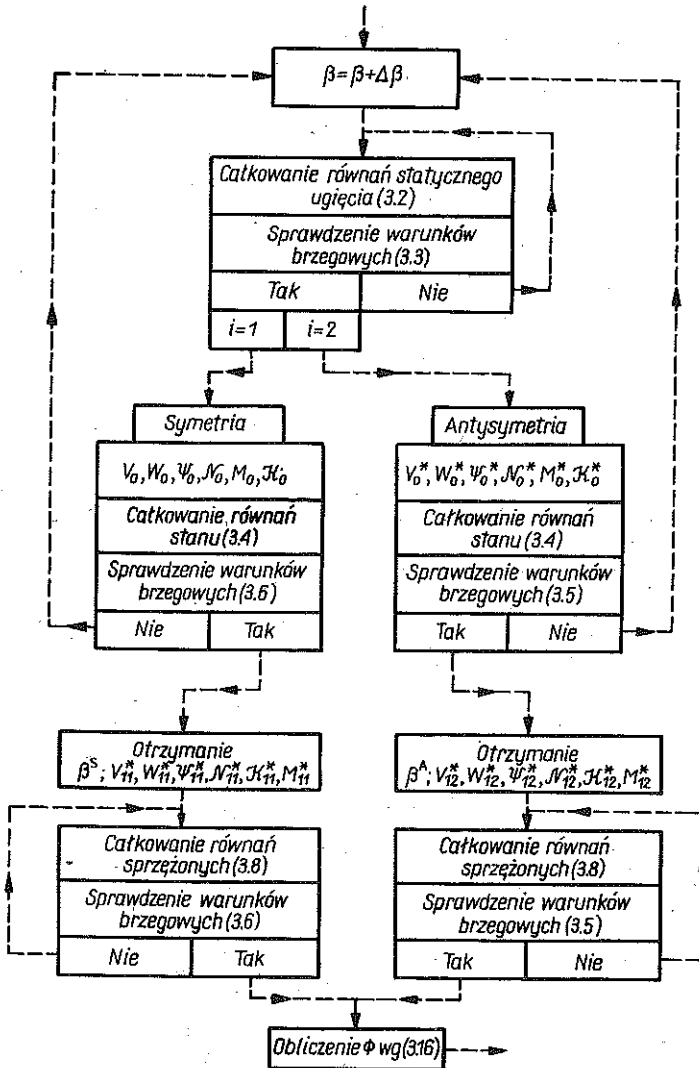
Rys. 8



Rys. 9

runkach brzegowych układów (3.5) lub (3.6) oraz wartość obciążenia  $\beta$ . Zmiana obciążenia  $\beta$  powoduje jednak każdorazowo konieczność rozwiązania równań statycznego ugięcia (3.2) z warunkami brzegowymi (3.3). Tak więc mamy tutaj do czynienia z «wstrzeliwaniem» przez dwa układy równań (3.2) i (3.5) (niesymetryczna linia ugięcia) lub (3.2) i (3.6) (symetryczna linia ugięcia), co pokazano na schemacie blokowym (rys. 10).

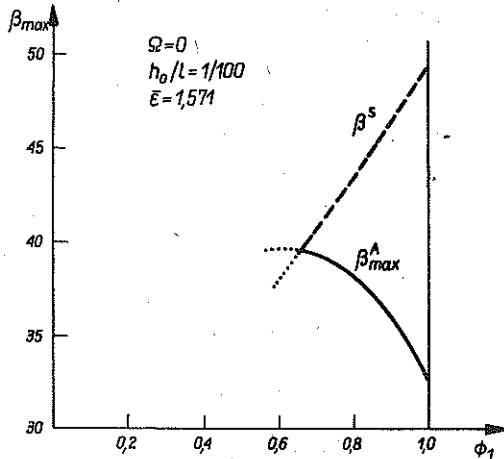
Nie można tu tak, jak poprzednio, oddzielić całkowania układów (3.2) i (3.4). Dodatkową trudność stanowi niemożliwość scałkowania równań statycznego ugięcia (3.2) dla  $\beta > \beta_{kr}$ , które może pojawić się w pośrednich krokach, przy rozwiązywaniu zagadnienia brzegowego.



Rys. 10



Otrzymany rezultat dla  $h_0/l = 1/100$  pokazano na rys. 11. Dla  $\Phi_1 < 0,65$  sformułowanie unimodalne nie prowadzi do otrzymania wyników, gdyż uzyskanemu kształtowi odpowiada mniejsza siła odpowiadająca przeskokowi (wyboczenie symetryczne), niż siła odpowiadająca bifurkacji (wyboczenie niesymetryczne); stąd też nie jest możliwe scałkowanie równań statycznego ugięcia (3.2).



Rys. 11

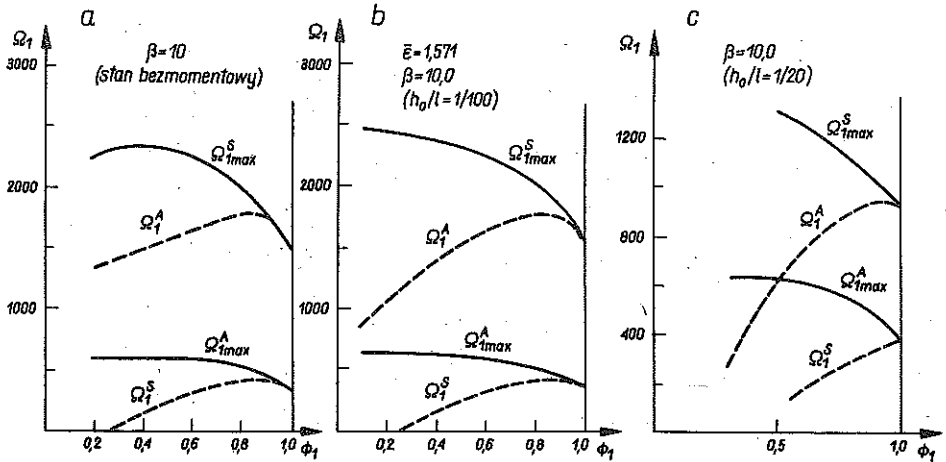
Dla  $h_0/l = 1/20$  sytuacja taka pojawia się dla  $\Phi_1 \leq 0,95$ . Uzyskany kształt nie jest ostateczny. Dla niższych wartości  $\Phi_1$  można będzie, stosując sformułowanie bimodalne, uzyskać taki rozkład  $\Phi(x)$ , który zwiększy obciążenie krytyczne.

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione w pracy wyniki wskazują, że dla pewnych obciążeń zewnętrznych wyniosłość łuku i wydłużalności osi rozwiązania unimodalne są poprawne (rys. 1), dla innych zaś (rys. 2, 3, 4, i 11) rozwiązania unimodalne pozostają poprawne w ograniczonym przedziale zmienności dolnego ograniczenia  $\Phi_1$  na przekrój poprzeczny. Stąd też wynika potrzeba postawienia w tych przypadkach sformułowania bimodalnego, co będzie przedmiotem oddzielnej pracy.

W zakończeniu zestawiono również wpływ wydłużalności osi łuku na rozwiązania optymalne (rys. 12). Jeśli w stanie bezmomentowym (rys. 12a) i dla «małej» wyniosłości  $h_0/l = 1/100$  podejście unimodalne można uznać za wystarczające, to dla  $h_0/l = 1/20$  (rys. 12c) podejście to jest ograniczone do przedziału  $0,49 \leq \Phi_1 \leq 1,0$ .

Na zakończenie pragnę wyrazić wdzięczność Doc. dr hab. inż. Antoniemu GAJEWSKIEMU za pomoc w wykonaniu tej pracy.



Rys. 12

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BLACHUT, *Analiza stateczności pryzmatycznych luków o osi odkształcalnej*, (w druku).
2. J. BLACHUT, A. GAJEWSKI, *On unimodal and bimodal optimal design of funicular arches*, *Int. J. Solids Struct.*, (w druku).
3. B. BOCHENEK, A. GAJEWSKI, *Jednomodalna i dwumodalna optymalizacja ramy portalowej*, (w druku).
4. B. BUDIANSKY, J. C. FRAUENTHAL, J. C. HUTCHINSON, *On optimal arches*, *J. Appl. Mech.*, **36**, 880–882, 1969.
5. A. GAJEWSKI, *A note on unimodal and bimodal optimal design of vibrating compressed columns*, *Int. J. Mech. Sci.*, (w druku).
6. W. B. GRINIEV, A. P. FILIPPOV, *Optimizacja sterżniej po spektrum sobstviennykh značenij*, Kijów 1979.
7. Z. KĘPKA, Z. WASZCZYŻYN, *Optymalizacja powłoki wymiennika ciepła jako paneli walcowej pod ciśnieniem zewnętrznym*, *Arch. Bud. Masz.*, **25**, 55–65, 1979.
8. E. F. MASUR, Z. MRÓZ, *Nonstationary conditions in structural design*, *Int. J. Solids Struct.*, **15**, 503–512, 1979.
9. N. OLSHOFF, H. RASMUSSEN, *On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns*, *Int. J. Solids Struct.*, **13**, 605–614, 1977.
10. A. D. SMIRNOV, W. A. TROICKI, *Optimizacja sobstviennykh častot tonkich uprugich sterżniej*, *Mech. Tverd. Tela*, **5**, 162–168, 1979.
11. I. TADJBAKĤSH, M. FARSHAD, *On conservatively loaded funicular arches and their optimal design*, IUTAM Symposium on Optimization in Structural Design, Warszawa 1973, Springer-Verlag 1975.
12. C. H. WU, *The strongest circular arch—a perturbation solution*, *J. Appl. Mech.*, **35**, 476–480, 1968.

## РЕЗЮМЕ

ОДНОМОДАЛЬНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ  
КОЛЕБЛЮЩИХСЯ АРОК С УЧЕТОМ РАСТЯЖИВАЕМОСТИ ОСИ

В работе рассматривается проблема оптимального расположения массы на растяжимой арке, так, чтобы, при фиксированных объеме, давлении и геометрических ограничениях, получить максимальную частоту. При решении этой задачи использован принцип Понтрягина. Точные результаты приведены для круглой арки. Рассматривается тоже задача оптимизации при устойчивости.

## SUMMARY

UNIMODAL OPTIMAL DESIGN OF EXTENSIBLE ARCHES WITH RESPECT TO  
BUCKLING AND VIBRATIONS

The problem of determining the optimal cross-sectional area function along an extensible arch, which minimizes total volume under given external pressure, fixed frequency and geometrical constraints, is investigated by means of the Pontryagin maximum principle. The optimal design of clamped-clamped circular arch is presented. Optimization with respect to buckling load is also considered.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
INSTYTUT FIZYKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 stycznia 1981 r.*

---