

TRÓJWYMIAROWA ANALIZA MOSTÓW O DŹWIGARACH ZAKRZYWIONYCH W PLANIE

JAN BIENIŃ (WROCLAW)

W pracy przedstawiono trójwymiarowe elementy skończone przydatne do analizy statycznej mostów o dźwigarach zakrzywionych w planie. Konstrukcję analizuje się przy użyciu techniki stanowiącej połączenie szeregów Fouriera i dwuwymiarowych elementów skończonych. Przedstawiono zastosowanie opisanego sposobu obliczeń do analizy zakrzywionych w planie dźwigarów o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. Rozwiązanie obejmuje konstrukcje jednoprzęsłowe oraz ciągłe. Metodę obliczeń ilustruje kilka przykładów numerycznych.

1. WSTĘP

W ostatnich latach znacznie wzrasta zapotrzebowanie w dziedzinie budowy mostów zakrzywionych w planie, związane z koniecznością dostosowywania kształtu konstrukcji mostowej do przebiegu trasy komunikacyjnej. Szczególnie wyraźnie problem ten występuje w obszarach zurbanizowanych, na których liczne przeszkody zmuszają do projektowania tras o skomplikowanej geometrii przy jednoczesnym znacznym nasyceniu obiektami mostowymi. Względy estetyczne powodują, że w większości przypadków obiekty usytuowane na łukach kształtowane są jako zakrzywione, mimo zwiększonego kosztu wykonania w porównaniu z konstrukcjami o zarysie prostokątnym.

Wzrost liczby budowanych mostów zakrzywionych w planie spowodował konieczność opracowania efektywnych metod analizy, prowadzących do racjonalnego i ekonomicznego projektowania tego typu konstrukcji. Większość mostów zakrzywionych ma krzywiznę przestrzenną, ale zakrzywienie w płaszczyźnie pionowej (zwykle niewielkie) nie jest na szczęście uwzględniane w obliczeniach. Ze względu na stosowany model obliczeniowy można wyróżnić trzy grupy rozwiązań: oparte na modelu jednowymiarowym (prętowym), dwuwymiarowym (powierzchniowym) oraz trójwymiarowym (przestrzennym).

W najprostszych modelach jednowymiarowych przeszła zastępowane są pojedynczymi prętami zakrzywionymi w planie. Rozwiązania oparte na powyższym modelu są wystarczające jedynie do wstępnej analizy przeszła o niewielkiej szerokości. Wykorzystuje się najczęściej przygotowane nomogramy (np. [1, 2ⁿ]) lub programy na maszyny cyfrowe [3]. Szersze zastosowanie znalazły rozwiązania modelujące przeszła przy użyciu rusztu prętowego o elementach prostych i zakrzywionych [4, 5]. Ze względu na dużą prostotę oraz znaczną efektywność modele w postaci rusztu

są chętnie stosowane przez projektantów [6], nie umożliwiają one jednak bardziej wnikliwej analizy pracy przęseł ani oceny efektów lokalnych.

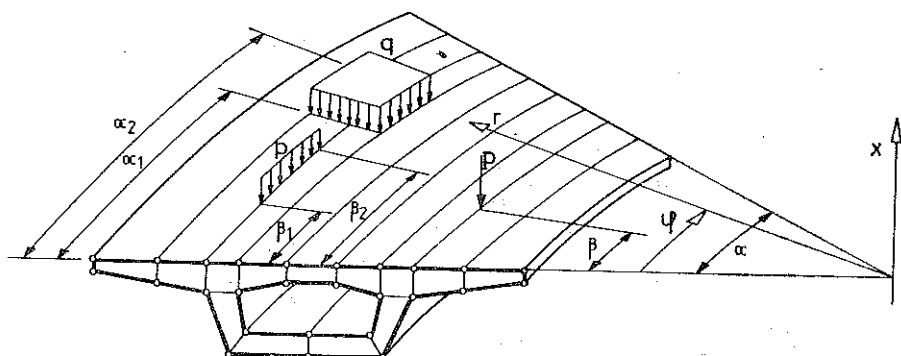
Modele dwuwymiarowe oparte są przeważnie na klasycznej teorii płyt cienkich z uwzględnieniem ich cylindrycznej ortotropii. Pełne rozwiązania analityczne dla takich modeli możliwe są jedynie w szczególnych przypadkach płyt o stałej grubości i nieskomplikowanym obciążeniu [7]. Dla rzeczywistych przekrojów i obciążeń przęseł mostowych stosuje się rozwiązanie numeryczne: metodę różnic skończonych [8, 9], metodę elementów skończonych [10–14] lub jej odmianę — metodę pasm skończonych [15, 16]. Najbardziej uniwersalna jest metoda elementów skończonych umożliwiająca analizę konstrukcji o dowolnym kształcie krzywizny, dowolnych warunkach brzegowych i różnych układach obciążeń. Stosowane są zarówno standardowe elementy płytowe, najczęściej trójkątne lub czworoboczne [10, 11], jak i elementy o kształcie wycinka koła, opracowane specjalnie do analizy konstrukcji zakrzywionych [12, 13]. W przypadku płytowo-belkowych lub skrzynkowych przekrojów przęseł elementy płytowe łączone są często z elementami belkowymi lub tarczowymi. Czynione są także próby zastosowania specjalnych makro-elementów do analizy tego typu konstrukcji [14]. Znaczne uproszczenia można uzyskać w odniesieniu do konstrukcji o stałym promieniu krzywizny i niezmiennym na długości przekroju poprzecznym, stosując metodę pasm skończonych [15, 16]. Podobne rozwiązania oparte także na rozwinięciu funkcji przemieszczeń wzdłuż konstrukcji w szeregi trygonometryczne zaproponowano w pracach [17, 18]. W modelach dwuwymiarowych istotną trudność stanowi właściwy dobór charakterystyk zgięciowych i skrętnych modelu, odpowiadających rzeczywistej konstrukcji. Szerszą analizę różnych typów modeli jedno i dwuwymiarowych zawierają np. prace [19, 20, 21].

Modele trójwymiarowe umożliwiają najwierniejszy opis geometrii konstrukcji, co ma szczególnie istotne znaczenie w przypadku przęseł mostowych o złożonym kształcie przekroju poprzecznego. Praktyczne zastosowanie znajduje tu metoda elementów skończonych. Użycie standardowych elementów 3-wymiarowych dostępnych w większych systemach analizy statycznej [7] prowadzi do znacznej wielkości zadania zarówno w zakresie potrzebnej pamięci, jak i czasu obliczeń. Wysokie koszty takiej analizy skłaniają do poszukiwania modeli trójwymiarowych wymagających mniejszego nakładu pracy obliczeniowej.

W niniejszej pracy przedstawiono zastosowanie 3-wymiarowych pryzmatycznych elementów skończonych [22] do analizy statycznej mostów zakrzywionych w planie. Zmniejszenie rozmiarów zadania osiągnięto przez zastosowanie globalnej aproksymacji podłużnej i zastąpienie zagadnienia trójwymiarowego szeregiem zadań dwuwymiarowych. Uproszczenie zagadnienia uzyskano kosztem ograniczenia zastosowań rozwiązania do konstrukcji o stałym promieniu krzywizny (ok. 60–70% budowanych obecnie mostów zakrzywionych [23]) i stałym na długości przekroju poprzecznym. Mimo powyższych ograniczeń zaproponowany sposób obliczeń znajduje praktyczne zastosowanie do analizy szerokiej klasy swobodnie podpartych i ciągłych mostów zakrzywionych w planie, o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego i dowolnych obciążeniach.

2. SPOSÓB DYSKRETYZACJI KONSTRUKCJI

Analizowana konstrukcja jest dyskretyzowana przez podział wzdłuż na zakrzywione w planie elementy (rys. 1). Poszczególne elementy połączone są ze sobą wzdłuż linii węzłowych, a właściwości materiału w każdym punkcie elementu uważa



Rys. 1. Sposób dyskretyzacji konstrukcji

się za jednakowe natomiast dla poszczególnych elementów mogą być one różne. Elementy podparte są na obu końcach promieniowo w sposób uniemożliwiający przemieszczenia przekroju podporowego w płaszczyźnie prostopadłej do osi elementu.

Jako nieznanne parametry węzłowe przyjęto składowe u , v i w przemieszczenia linii węzłowej odpowiednio w kierunkach współrzędnych x , r oraz φ . Funkcja opisująca przemieszczenie dowolnego punktu elementu przyjęta została w postaci szeregu, którego wyrazy są iloczynami funkcji kształtu $N(x, r)$ jak dla elementu dwuwymiarowego oraz funkcji trygonometrycznej aproksymującej zmienność przemieszczeń w kierunku współrzędnej φ :

$$(2.1) \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c [N_i^n] \cdot \{\delta_i^n\},$$

gdzie

$$(2.2) \quad [N_i^n] = \text{diag} \left[N_i \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}, N_i \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}, N_i \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \right],$$

$$(2.3) \quad \{\delta_i^n\} = [u_i^n, v_i^n, w_i^n]^T;$$

h oznacza liczbę wyrazów szeregu, c zaś liczbę linii węzłowych w elemencie.

Do dyskretyzacji konstrukcji w płaszczyźnie xr mogą być stosowane różne typy elementów dwuwymiarowych. W niniejszej pracy zastosowano elementy izoparametryczne o 4 i 8 węzłach [24]. Pozwalają one na dokładne odwzorowanie przekroju o zarysie krzywoliniowym i zapewniają zwiększenie dokładności w porównaniu z elementami prostszymi przy tej samej liczbie stopni swobody.

3. MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU

Wektor odkształceń elementu zakrzywionego ma postać

$$(3.1) \quad \{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \varepsilon_r \varepsilon_\varphi \gamma_{xr} \gamma_{x\varphi} \gamma_{r\varphi}]^T = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c [B_i^n] \cdot \{\delta_i^n\},$$

gdzie

$$(3.2) \quad [B_i^n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \sin \varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} \sin \varphi_n & 0 \\ 0 & \frac{N_i}{r} \sin \varphi_n & -\frac{N_i}{r} \frac{n\pi}{\alpha} \sin \varphi_n \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \sin \varphi_n & \frac{\partial N_i}{\partial x} \sin \varphi_n & 0 \\ \frac{N_i}{r} \frac{n\pi}{\alpha} \cos \varphi_n & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \cos \varphi_n \\ 0 & \frac{N_i}{r} \frac{n\pi}{\alpha} \cos \varphi_n & \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r} \right) \cos \varphi_n \end{bmatrix},$$

$$\varphi_n = \frac{n\pi\varphi}{\alpha}.$$

Wektor naprężeń można natomiast określić następująco:

$$(3.3) \quad \{\sigma\} = [\sigma_x \sigma_r \sigma_\varphi \tau_{xr} \tau_{x\varphi} \tau_{r\varphi}]^T = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c [D] [B_i^n] \{\delta_i^n\}.$$

Macierz sprężystości $[D]$ dla materiału izotropowego ma postać

$$(3.4) \quad [D] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{Symetria} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix},$$

gdzie λ i μ oznaczają stałe Lamégo

$$(3.5) \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Dla innych typów materiału należy przyjąć odpowiednio zmodyfikowaną postać macierzy $[D]$.

Stosując standardowy dla metody elementów skończonych sposób formułowania macierzy sztywności elementu $[k]$ otrzymuje się

$$(3.6) \quad [k_{ij}] = \int \int \int_{V^e} [B_i]^T [D] [B_j] dV^e,$$

gdzie całkowanie odbywa się po całej objętości elementu.

Wykorzystując ortogonalność szeregów trygonometrycznych (2.1) zagadnienie trójwymiarowe zredukowane do szeregu zadań dwuwymiarowych, odpowiadających kolejnym harmonicznym. Elementy macierzy sztywności dla n -tej harmonicznej można zdefiniować jako

$$(3.7) \quad [k_{ij}^{nn}] = \alpha/2 \int \int_{A^e} [B_i^n]^T [D] [B_j^n] dx dr.$$

Ogólną postać podmacierzy $[k_{ij}^{nn}]$ przedstawiono poniżej

$$(3.8) \quad [k_{ij}^{nn}] = \begin{bmatrix} \gamma C_1 + \mu C_4 + & \lambda C_2 + \lambda C_5 + \mu C_3 & \mu t_n C_6 - \lambda t_n C_5 \\ \mu t_n^2 C_9 & & \\ \lambda C_3 + \lambda C_6 + & \gamma (C_4 + C_9) + \lambda (C_7 + C_8) + & \mu t_n (C_8 - C_9) - \\ + \mu C_2 & + \mu (C_1 + t_n^2 C_9) & - \lambda t_n C_7 - \gamma t_n C_9 \\ \mu t_n C_5 - & \mu t_n (C_7 - C_9) - & \gamma t_n^2 C_9 + \mu (C_1 + \\ - \lambda t_n C_6 & - \lambda t_n C_8 - \gamma C_9 & + C_4 - C_7 - C_8 + C_9) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(3.9) \quad c_l = \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 A_l(\xi, \eta), \det [J] d\xi d\eta, \quad l=1, \dots, 9,$$

natomiast

$$A_1 = \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x}, \quad A_2 = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial r},$$

$$A_3 = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial x}, \quad A_4 = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r},$$

$$A_5 = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{N_j}{r}, \quad A_6 = \frac{N_i}{r} \frac{\partial N_j}{\partial x},$$

$$A_7 = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{N_j}{r}, \quad A_8 = \frac{N_i}{r} \frac{\partial N_j}{\partial r},$$

$$A_9 = \frac{N_i}{r} \frac{N_j}{r}, \quad \gamma = 2\mu + \lambda,$$

$$t_n = \frac{n\pi}{\alpha},$$

N_i, N_j oznaczają funkcje kształtu w lokalnym układzie współrzędnych ξ, η .

Całki typu (3.9) wymagają całkowania numerycznego ze względu na skomplikowaną postać funkcji podcałkowych.

Szczegółowy opis sposobu budowy macierzy sztywności zakrzywionych elementów podano w pracy [25].

4. MACIERZ SZTYWNOŚCI KONSTRUKCJI

Macierz sztywności całej konstrukcji $[K]$ tworzy się przez specyficzne dla MES sumowanie macierzy sztywności elementów. Macierz ta ma budowę blokowo-diagonalną

$$(4.1) \quad [K] = \begin{bmatrix} [K^{11}] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & [K^{hh}] \end{bmatrix}$$

a równania odpowiadające poszczególnym harmonicznym nie są ze sobą sprzężone i zamiast dużego układu równań

$$(4.2) \quad [K] \{\delta\} = \{F\}$$

należy rozwiązać h układów równań typu

$$(4.3) \quad [K^{nn}] \{\delta^n\} = \{F^n\},$$

gdzie $\{F^n\}$ oznacza wektor sił węzłowych.

Znając wektory przemieszczeń węzłowych $\{\delta^n\}$ wyznacza się na podstawie wzołów (2.1), (3.1), (3.3), przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia, sumując rozwiązania uzyskane dla kolejnych harmonicznych.

5. OBCIĄŻENIA

Obciążenia działające na konstrukcję przedstawiono w postaci szeregów trygonometrycznych w kierunku współrzędnej φ , podobnie jak przemieszczenia (2.1). W opracowanym programie uwzględniono trzy podstawowe typy obciążeń (rys. 1): obciążenie rozłożone na powierzchni elementu $\{q\}$, obciążenie rozłożone wzdłuż linii węzłowej $\{p\}$ i obciążenie siłą skupioną $\{P\}$ przyłożoną na linii węzłowej. Z tych elementarnych sił buduje się model rzeczywistych obciążeń działających na przeszło.

W przypadku obciążenia powierzchniowego $\{q\}$ wektor sił węzłowych występujący po prawej stronie równania (4.3) przybiera postać

$$(5.1) \quad \{F_i^n\}_a = \frac{\alpha}{2} \{q^n\} \sum_e \int_{\omega^e} N_i^e(\xi, \eta) \det [J] d\omega^e,$$

gdzie ω^e oznacza należącą do elementu e część pola na jakim rozłożone jest obciążenie, a sumowanie obejmuje wszystkie elementy na których znajduje się obciążenie. Całka w równaniu (5.1) obliczana jest numerycznie dla każdego elementu w lokal-

nym układzie współrzędnych. Dla obciążenia równomiernie rozłożonego od $\varphi = \alpha_1$ do $\varphi = \alpha_2$ otrzymuje się

$$(5.2) \quad \{q^n\} = \frac{2}{n\pi} \begin{Bmatrix} q_x \left(\cos \frac{n\pi\alpha_1}{\alpha} - \cos \frac{n\pi\alpha_2}{\alpha} \right) \\ q_r \left(\cos \frac{n\pi\alpha_1}{\alpha} - \cos \frac{n\pi\alpha_2}{\alpha} \right) \\ q_\varphi \left(\sin \frac{n\pi\alpha_2}{\alpha} - \sin \frac{n\pi\alpha_1}{\alpha} \right) \end{Bmatrix}.$$

Podobnie dla obciążenia równomiernie rozłożonego od $\varphi = \beta_1$ do $\varphi = \beta_2$ wzdłuż linii węzłowej (rys. 1) wektor sił węzłowych ma postać

$$(5.3) \quad \{F^n\}_p = \frac{\alpha}{2} \{p^n\} = \frac{\alpha}{n\pi} \begin{Bmatrix} p_x \left(\cos \frac{n\pi\beta_1}{\alpha} - \cos \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} \right) \\ p_r \left(\cos \frac{n\pi\beta_1}{\alpha} - \cos \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} \right) \\ p_\varphi \left(\sin \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} - \sin \frac{n\pi\beta_1}{\alpha} \right) \end{Bmatrix}.$$

Przy obciążeniu siłą skupioną wektor sił węzłowych można pisać jako

$$(5.4) \quad \{F^n\}_p = \frac{1}{R} \begin{Bmatrix} P_x \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha} \\ P_r \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha} \\ P \cos \frac{n\pi\beta}{\alpha} \end{Bmatrix},$$

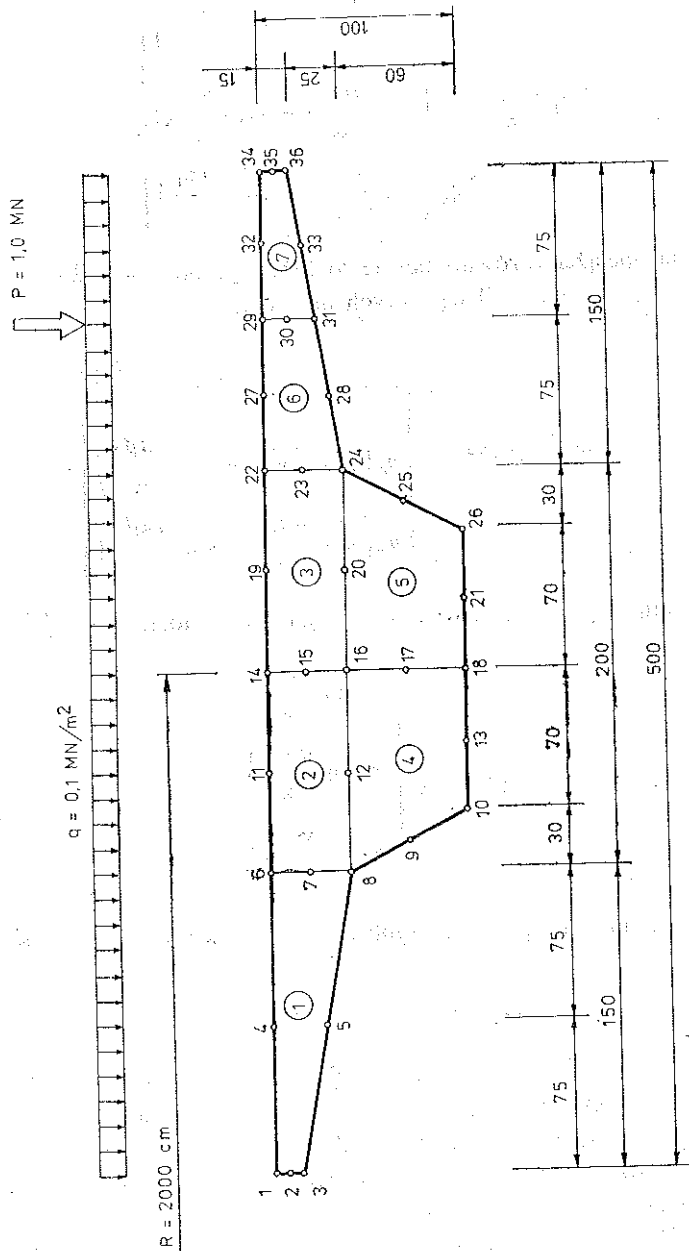
gdzie R oznacza współrzędną r , a β współrzędną φ punktu przyłożenia siły.

6. PODPORY POŚREDNIE

Zastosowana w niniejszej pracy koncepcja polega na wyznaczaniu wektora reakcji podporowych $\{R\}$ przy zastosowaniu sił przy wykorzystaniu warunków zgodności przemieszczeń w miejscu połączenia podpór z konstrukcją nośną. W analizie wuzględniana jest odkształcalność podpór pośrednich. W procesie obliczeń można wyróżnić następujące etapy:

a) dla konstrukcji swobodnie podpartej na obu końcach wyznacza się w miejscach podpór pośrednich przemieszczenia $\{d\}$ wywołane obciążeniem zewnętrznym.

b) konstrukcja o schemacie jak wyżej obciążana jest kolejno siłami jednostkowymi odpowiadającymi składowym sił R i budowana jest macierz odkształcalności konstrukcji $[C]$,



Rys. 2. Wymiary przekroju poprzecznego przęśia [cm] i sposób podziału na elementy

c) analogicznymi siłami jednostkowymi obciążane są podpory pośrednie i tworzona jest macierz odkształcalności podpór $[S]$,

d) z warunku geometryczne zgodności przemieszczeń w miejscach podpór pośrednich.

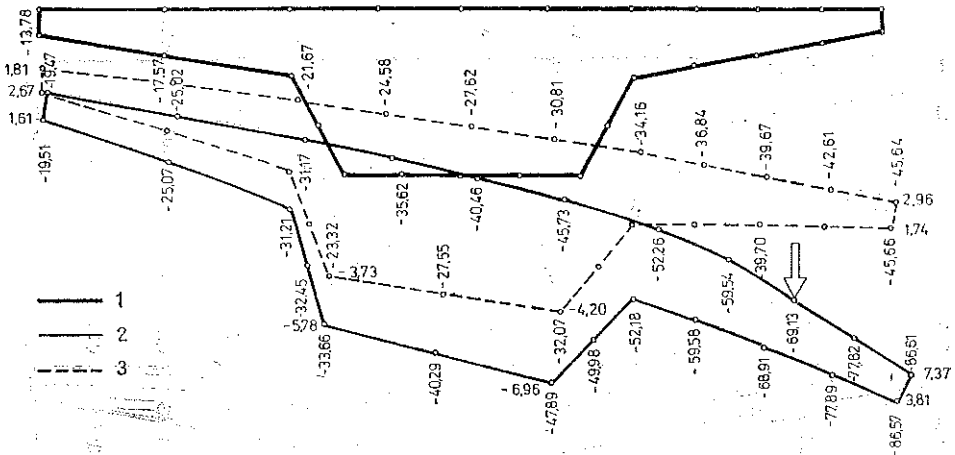
$$(6.1) \quad \{d\} + [C] \cdot \{R\} + [S] \cdot \{R\} = 0$$

wyznaczane są reakcje podporowe $\{R\}$, traktowane w dalszej analizie jako dodatkowe obciążenia zewnętrzne.

Opracowany program obliczeń umożliwia analizę konstrukcji opartych na układzie dowolnie usytuowanych niezależnych podpór słupowych.

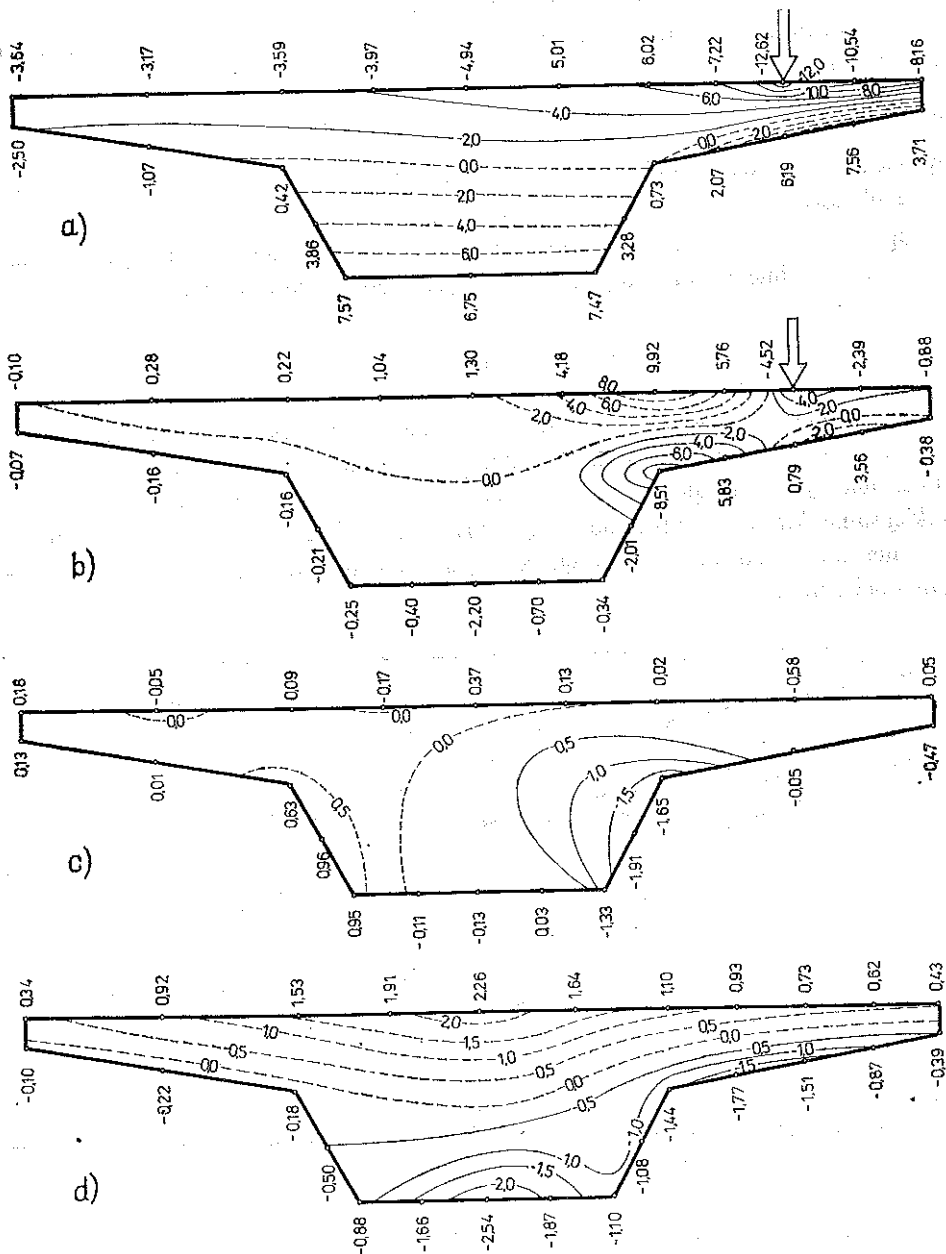
7. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Możliwości zaproponowanego sposobu analizy przedstawiono na przykładzie przęsła mostowego ze wspornikami podchodnikowymi o znacznym wysięgu (rys. 2). Obliczenia wykonano dla dwóch konstrukcji o jednakowym przekroju poprzecznym i takiej samej krzywiznie: promień krzywizny krawędzi wewnętrznej wynosi 17,50 m, a zewnętrzne 22,50 m. Konstrukcje różnią się schematem statycznym oraz sposobem obciążenia.



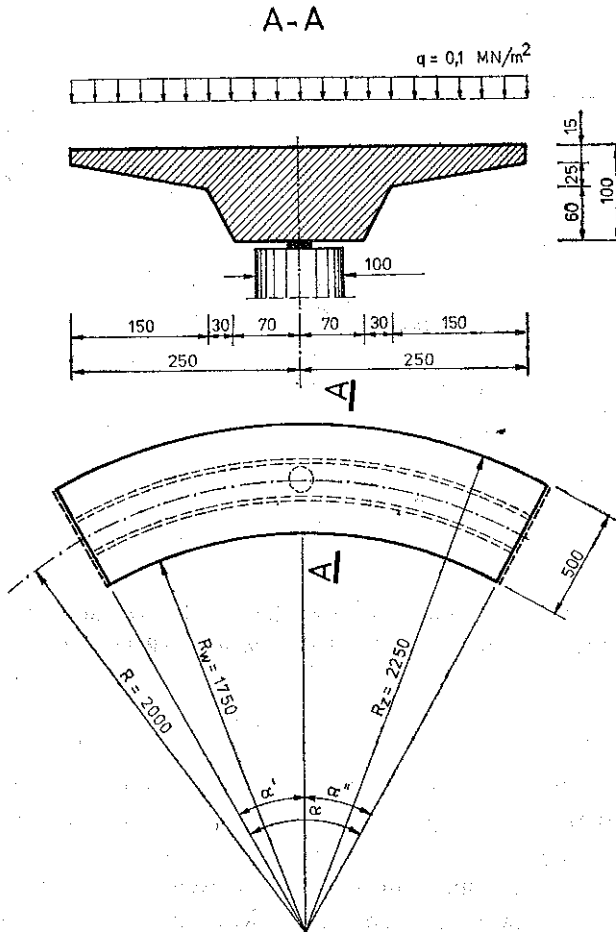
Rys. 3. Przemieszczenia pionowe u oraz poziome v [$m \cdot 10^{-4}$] przekroju poprzecznego: (1) przed obciążeniem, (2) w $1/2$ rozpiętości, (3) w $1/4$ rozpiętości

Pierwszy przykład dotyczy przęsła swobodnie podpartego o kącie wewnętrznym $\alpha=0,5$ rad obciążonego siłą skupioną $P=1,0$ MN ustawioną w środku rozpiętości przęsła na zewnętrznym wsporniku podchodnikowym, jak pokazano na rys. 2. Przemieszczenia przekroju poprzecznego w środku rozpiętości i w $1/4$ rozpiętości przęsła przedstawiono na rys. 3. Oprócz ugięcia i skręcenia całego przekroju widoczne jest lokalne zginanie obciążonego wspornika. Odpowiadające tym przemieszczeniom rozkłady naprężeń σ_ϕ i σ_r na powierzchni przekroju poprzecznego w środku



Rys. 4. Rozkłady naprężeń [MPa]: a) σ_ϕ w środku rozpiętości, b) σ_r w środku rozpiętości, c) $\tau_{r\phi}$ w 1/4 rozpiętości, d) $\tau_{r\phi}$ w 1/4 rozpiętości przęsła

rozpiętości przęsła pokazano w postaci planów warstwicowych odpowiednio na rys. 4a i 4b. Na rys. 4c i 4d przedstawiono w analogicznej formie rozkłady naprężeń $\tau_{x\phi}$ i $\tau_{r\phi}$ wyznaczone w 1/4 rozpiętości przęsła.

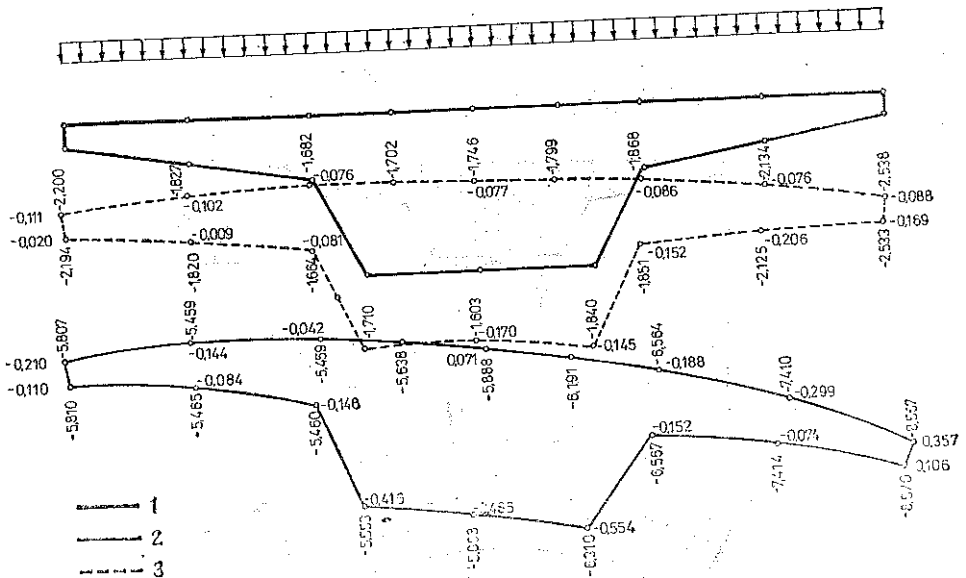


Rys. 5. Schemat oraz wymiary [cm] konstrukcji dwuprzęsłowej

Drugi przykład stanowi ciągła konstrukcja dwuprzęsłowa z równomiernym obciążeniem $q=0,1 \text{ MN/m}^2$, której podporą pośrednią jest słup żelbetowy o średnicy 1,00 m i wysokości 5,0 m (rys. 5). Przeszaczenia konstrukcji w środku rozpiętości przęsła i nad podporą pośrednią (z uwzględnieniem odkształceń podpory) przedstawiono na rys. 6. Na rys. 7a i 7b pokazano rozkłady naprężeń σ_ϕ oraz σ_r w środku rozpiętości przęsła, a na rys. 7c i 7d rozkłady tych naprężeń nad podporą pośrednią.

Wszystkie przekroje na rysunkach usytuowane są w taki sposób, że krawędź zewnętrzna konstrukcji znajduje się po prawej stronie. Wielkości przeszaczeń podane są w $[\text{m} \cdot 10^{-4}]$, a wartości naprężeń w $[\text{MPa}]$. Obliczenia przeprowadzono

przyjmując dla materiału pręszel $E=3,0 \cdot 10^4$ MPa i $\nu=0,20$, a dla materiału słupa podporowego $E_s=2,5 \cdot 10^4$ MPa. W analizie uwzględniono 21 harmonicznych, co jak wykazano w pracy [25], zapewnia dostateczną dokładność rozwiązania.



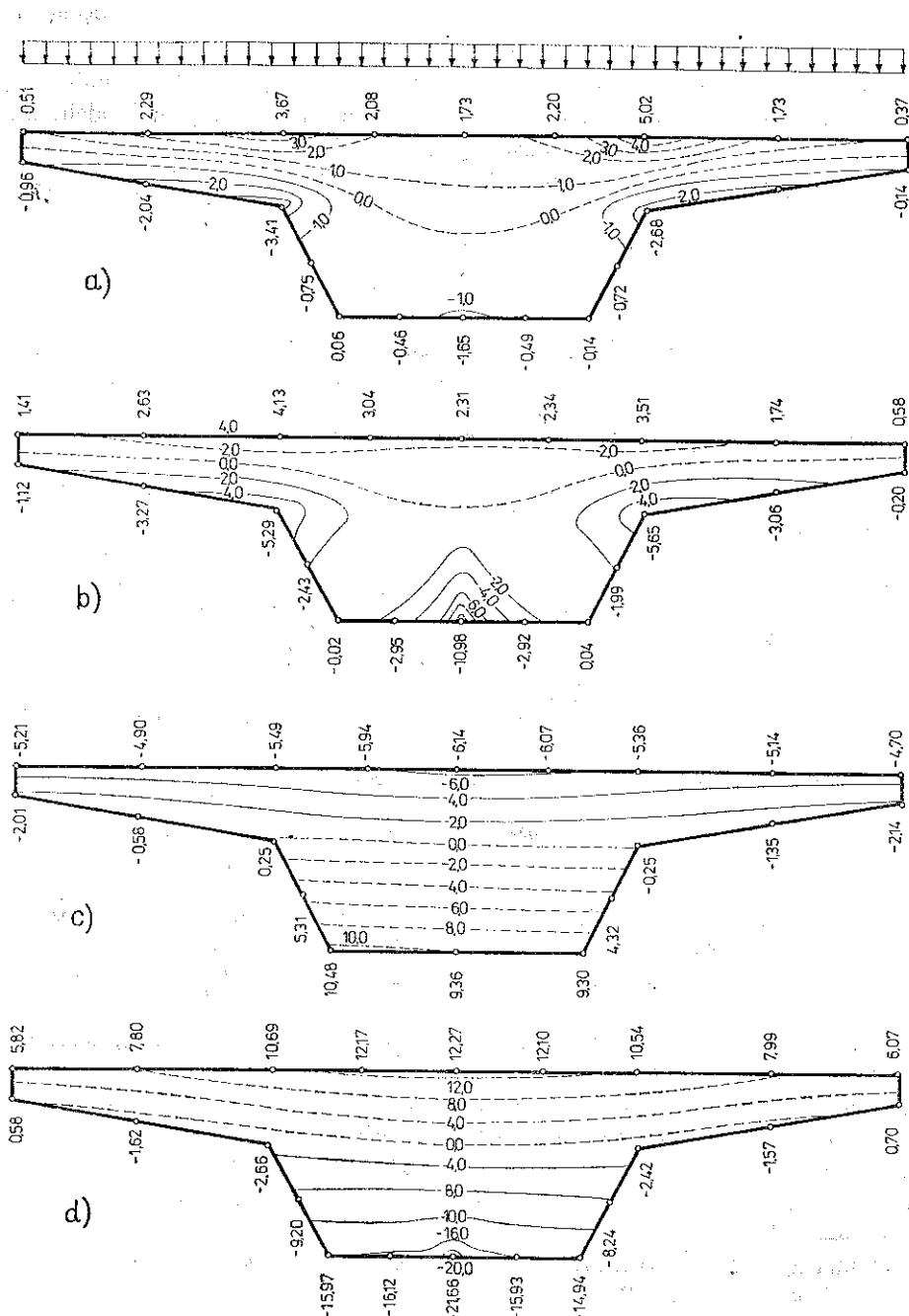
Rys. 6. Przemieszczenia pionowe u oraz poziome v [$m \cdot 10^{-4}$] przekroju poprzecznego: (1) przed obciążeniem, (2) w 1/2 rozpiętości, (3) nad podporą pośrednią

8. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona metoda obliczeń umożliwia praktyczne zastosowanie modelu trójwymiarowego w analizie pracy konstrukcji zakrzywionych w planie. Zastosowany sposób dyskretyzacji pozwala na analizę konstrukcji o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, jedno- lub wielopręszelowych, przy różnych układach obciążeń. Dokładność rozwiązania zapewniona jest nawet przy niezbyt gęstym podziale na elementy.

Z punktu widzenia użytkownika szczególnie istotne cechy rozwiązania to: mała liczba danych wejściowych, wykorzystywanie stosunkowo niewielkiego obszaru pamięci maszyny cyfrowe oraz krótki czas obliczeń. Zalety powyższe umożliwiają bezpośrednie wykorzystywanie opracowanych programów w praktyce projektowej.

Od strony poznawczej uwagę zwracają trzy aspekty przedstawionego rozwiązania. Po pierwsze, zastosowanie modelu trójwymiarowego pozwala na bezpośredni dokładny opis geometrii konstrukcji oraz układu obciążeń, co zapobiega na tym etapie powstawaniu niedokładności charakterystycznych dla modeli jedno- i dwuwymiarowych. Po drugie, zastosowany sposób dyskretyzacji umożliwia bezpośrednie określenie pełnego wektora naprężeń w dowolnym punkcie konstrukcji, podczas gdy w modelach prostszych naprężenia wyznaczane są pośrednio na podstawie



Rys. 7. Rozkłady naprężeń [MPa]: a) σ_x w środku rozpiętości przęsła, b) σ_y w środku rozpiętości przęsła, c) σ_x nad podporą pośrednią, d) σ_y nad podporą pośrednią.

wartości scalonych sił wewnętrznych. Podejście bezpośrednie umożliwia ocenę rozkładu naprężeń na grubości elementu, a w szczególności analizę koncentracji naprężeń w miejscach obciążeń skupionych, w obszarach połączeń elementów itp. Po trzecie, wreszcie, wyniki analiz przeprowadzonych przy użyciu modelu trójwymiarowego mogą stanowić podstawę do określenia racjonalnych kryteriów stosowania prostszych modeli obliczeniowych konstrukcji zakrzywionych w planie.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. H. FICKEL, *Analysis of curved girders*, J. Struct. Div., ASCE, **85**, ST 7, 113-141, 1959.
2. J. F. TOPPLER, *et al.*, *Horizontally-curved members: an approximate method of design*, Concrete, **10**, 418-424, 1968.
3. C. H. YOO, D. R. EVICK, C. P. HEINS, *Non-prismatic curved girder analysis*, Computers and Structures, **4**, 675-698, 1974.
4. F. SAWKO, *Computer analysis of grillages curved in plan*, Proceedings IABSE, **27**, 151-170, 1967.
5. T. R. DOUGLAS, S. C. GAMBRELL, *Theoretical analysis of curved girder bridges*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, EM **5**, 991-1003, 1974.
6. D. R. SCHELLING, C. P. HEINS, H. H. SIKES, *State-of-the-art of curved girder bridge programs*, Computers and Structures, **9**, 27-37, 1978.
7. A. COULL, P. C. DAS, *Analysis of curved bridge deck*, Proceedings Instn. Civ. Engrs, **37**, 75-86, 1967.
8. C. P. HEBELS, *Behaviour of stiffened curved plate model*, J. Struct. Div., ASCE, **95**, ST 11, 2353-2370, 1969.
9. S. S. DEY, A. T. SAMUEL, *Static analysis of orthotropic curved bridge decks*, Computers and Structures, **12**, 161-166, 1980.
10. Y. K. CHEUNG, I. P. KING, O. C. ZIENKIEWICZ, *Slab bridges with arbitrary shape and support condition: a general method of analysis based on finite elements*, Proceedings Inst. Civ. Engr **40**, 9-36, 1968.
11. H. R. EVANS, W. N. AL-RIFAIE, *An experimental and theoretical investigation of the behaviour of box girders curved in plan*, Proceedings Instn. Civ. Engrs, Part 2, **59**, 323-352, 1975.
12. M. D. OLSON, G. M. LINDBERG, *Annular and circular sector finite elements for plate bending*, Inst. J. Mech. Sci., **12**, 17-33, 1970.
13. F. SAWKO, P. A. MERRIMAN, *An annular segment finite element for plate bending*, Int. J. Num. Methods Engng., **3**, 119-129, 1971.
14. J. JIROUSEK, A. BOUBERGING, A. SAYGUN, *A macro-element analysis of prestressed curved box-girder bridges*, Computers and Structures, **10**, 467-482, 1979.
15. Y. K. CHEUNG, *The analysis of cylindrical orthotropic curved bridge decks*, IABSE, **29-II**, 1969.
16. M. S. CHEUNG, Y. K. CHEUNG, *Analysis of curved box girder bridges by finite strip method*, IABSE, **31-I**, 1971.
17. C. MEYER, A. C. SCORDELIS, *Analysis of curved folded plate structures*, J. Struct. Div. ASCE, **97**, ST 10, 3459-2479, 1971.
18. K. H. CHU, S. G. PINJARKAR, *Analysis of horizontally curved box girder bridges*, J. Struct. Div., ASCE, **97**, ST 10, 2481-2501, 1971.
19. P. F. MC MANUS, G. A. NASIR, C. G. CULVER, *Horizontally curved girders-state of the art*, J. Struct. Div., ASCE, **95**, 853-870, 1969.
20. R. DABROWSKI, *Przegląd metod obliczania mostów skrzynekowych zakrzywionych w planie*, Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej, **231**, 1975.

21. K. BIENIEK, J. KMITA, J. BIEŃ, *Analiza i wytyczne racjonalnego obliczania i wymiarowania płytowych ustrojów estakad drogowych zakrzywionych w planie* (cz. II), Raport nr 66/77. Inst. Inżyn. Lądowej Politechniki Wrocławskiej, 1977.
22. O. C. ZIENKIEWICZ, J. M. TOO, *The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes*, Proceedings Inst. Civ. Engrs., 53, Part 2, 147-172, 1972.
23. Subcommittee on Curved Girders, Joint AASHTO-ASCE Committee on Flexural Members, *Survey of Curved Girder Bridges*, Civil Engng. ASCE.
24. I. ERGATOUDIS, B. M. IRONS, O. C. ZIENKIEWICZ, *Curved, isoparametric, "quadrilateral" elements for finite element analysis*, Int. J. Solid and structures, 4, 1, 31-42, 1968.
25. J. BIEŃ, *Analiza statyczna przęseł mostowych metodą pryzmatycznych elementów skończonych*, Praca Doktorska, Raport PRE 3/79, Inst. Inż. Ląd. Politechniki Wrocławskiej, 1979.

Резюме

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛИЗ МОСТОВ С БАЛКАМИ ИСКРИВЛЕННЫМИ В ПЛАНЕ

В статье представлены трехмерные конечные элементы пригодные для статического анализа мостов с балками искривленными в плане. Проводится анализ конструкций с помощью рядов Фурье и двумерных конечных элементов. Представлено применение описанного способа расчета для анализа искривленных в плане балок с произвольной формой поперечного сечения. Приводятся решения для однопролетных и непрерывных конструкций. Расчетный метод иллюстрируется несколькими числовыми примерами.

SUMMARY

TREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF CURVED GIRDER BRIDGES

A three-dimensional finite prism element formulation for static analysis of curved girder bridges is presented. The structure is analysed using a combination of the Fourier series and the two-dimensional finite element technique. The application is presented to the analysis of curved girders with arbitrary cross-section. The solution includes simple and multi-span structures. The method is illustrated by several numerical examples.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 czerwca 1983 r.
