

STATECZNOŚĆ I POZAKRYTYCZNA ANALIZA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH PŁYT PIERŚCIENIOWYCH

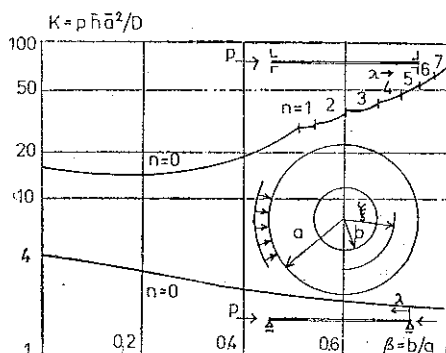
MARIA RADWAŃSKA (KRAKÓW)

W pracy przyjęto metodę półodwrotną numerycznego całkowania do obliczania zarówno obciążenia krytycznego jak i do analizy pokrytycznych stanów sprężysto-plastycznych płyt pierścieniowych. Zakłada się, że płyta ma przekrój *sandwich* lub pełnościenny, aproksymowany przez równoważny wielopunktowy przekrój. Materiał płyty jest sprężysto-plastyczny z liniowym izotropowo-kinematycznym wzmocnieniem, opisanym równaniami teorii płynięcia plastycznego. Rozważania ograniczono do obrotowo-symetrycznych form wybočenja. W przykładach przyjęto płytę z takimi warunkami brzegowymi i stosunkiem promieni konturów, aby obliczone obciążenie było najniższym (podstawowym) ciśnieniem krytycznym.

Obciążenie krytyczne jest określone przez zakłócenie płaskiego stanu i obliczenie bliskiego giętnego stanu równowagi. Dla sprężysto-plastycznych płyt określa się obciążenie bifurkacyjne zgodnie z koncepcją Shanleya i ustalonego obciążenia Kármána. Na podstawie nieliniowych równań dużych przemieszczeń i małych odkształceń zostały obliczone pokrytyczne ugięcia.

1. UWAGI WSTĘPNE, ZAŁOŻENIA I OZNACZENIA

Płyty kołowe i pierścieniowe ściskane w płaszczyźnie środkowej osiowo symetrycznym ciśnieniem radialnym ulegają często wyboczeniu, którego postać zależy od wielu czynników. W przeciwieństwie do płyt kołowych, w płytach pierścieniowych, najniższe obciążenie krytyczne może odpowiadać niesymetrycznym formom wybočenja. Istnieją jednak wartości stosunku promieni konturów płyty $\beta = b/a$, stosunku obciążeń p_b/p_a (rys. 1) jak i warunki brzegowe, przy których podstawowa forma jest kołowo symetryczna. Wówczas geometrycznie jednowymiarowy problem



Rys. 1

wymaga pokonania wielu innych trudności. Nawet w stanie tarczowym płyt pierścieniowych nie ma jawnych rozwiązań w zakresie sprężysto-plastycznym ze względu na niejednorodny stan naprężeń w stożunku do bieżącego promienia.

Rozwój metod czysto numerycznych zapoczątkował serię prac poświęconych wyboczeniu i pozakrytycznym ugięciom sprężystych i sprężysto-plastycznych tak płyt kołowych jak i pierścieniowych. Obszerną literaturę z zakresu symetrycznych form wyboczenia sprężystych płyt pierścieniowych można znaleźć w pracy [1], natomiast na temat niesymetrycznego wyboczenia w pracy [2]. Zarówno metoda elementów skończonych, różnic skończonych [3, 4, 5 i 6] czy całkowania numerycznego [7 i 8] były stosowane do rozwiązania tego problemu w zakresie sprężystym.

Z ostatnich prac należy wymienić [4], w której na podstawie metody różnic skończonych wyznaczono obszar na płaszczyźnie dwu obciążeń: ściskającego w płaszczyźnie środkowej i normalnego, w którym osiowo symetryczna deformacja płyty przestaje być stateczna. W pracy tej analizowano niesymetryczne drgania swobodne w sąsiedztwie osiowo symetrycznego stanu równowagi.

Prace na temat wyboczenia przy skręcaniu [9], pod wpływem obciążenia termicznego [10], czy płyt ortotropowych [6, 11, 12 i 13] poszerzają wiadomości z zakresu stateczności płyt. Optymalizacji ze względu na wyboczenie płyty sprężyste poświęcona jest praca [14].

Wyjście poza zakres sprężysty pociąga za sobą duże trudności związane z dyskretyzacją wzdłuż grubości płyty. W pracach [15, 16, 17 i 18] zajęto się wyboczeniem i pozakrytycznymi ugięciami płyt o idealizowanym przekroju *sandwich*, którego przyjęcie znacznie ułatwia obliczenia numeryczne.

Teoria zredukowanego modułu stosowana w prętach została przeniesiona i uogólniona do analizy sprężysto-plastycznych płyt pierścieniowych w [19].

Osiowo symetryczne stany pokrytyczne były przedmiotem prac eksperymentalnych [20, 21 i 22].

W obecnej pracy zajęliśmy się analizą stateczności płyt pierścieniowych o przekroju pełnościennym, aproksymując go wielopunktowym przekrojem, a także analizując równoważność przekroju pełnościennego i *sandwich*.

Przyjęliśmy bifurkacyjne kryterium utraty stateczności, badając możliwość wystąpienia przy tym samym obciążeniu dwu stanów równowagi — tarczowej i giętej. Podobnie jak w analizie sprężysto-plastycznego wyboczenia ustrojów prętowych, przy wyboczeniu płyt korzystamy z dwu koncepcji ustalonego obciążenia Kármána i wzrastającego obciążenia według Shanleya. Koncepcja Kármána zakłada ustalenie się wartości obciążenia w sąsiedztwie punktu bifurkacyjnego z równoczesnym wzrostem ugięć i pojawieniem się od razu w chwili wyboczenia stref lokalnych obciążeń. Zgodnie z koncepcją Shanleya zarówno obciążenie jak i ugięcia pozakrytyczne wzrastają, a powstałe w pewnych obszarach płyty strefy lokalnych odciążeń są wynikiem dopiero pokrytycznych ugięć.

Zajmiemy się w pracy jedynie kołowo symetrycznym obciążeniem, przyłożonym do płyty o takich parametrach, że w stanie pokrytycznym utrzymuje się kołowo symetryczny stan naprężeń, odkształceń i przemieszczeń. Aby móc opisać stany pokrytycznych ugięć stosujemy teorię małych odkształceń lecz dużych przemiesz-

czeń. Płyta wykonana jest z jednorodnego, izotropowego materiału sprężysto-plastycznego o liniowym kinematyczno-izotropowym wzmocnieniu. Związki fizyczne wynikające z zastosowania teorii płynięcia plastycznego, odnoszące się do idealizowanego przekroju sandwich opisane zostały we wcześniejszych pracach [8, 16 i 23]. Bardziej złożona procedura odwracania związków fizycznych dla przekroju pełnościennego była stosowana przez autorów zarówno w problemie stateczności płyt jak i powłok obrotowo symetrycznych [8 i 24].

Układ równań różniczkowych i algebraicznych opisuje problem początkowo-brzegowy, który rozwiążemy metodą półodwrotną bezpośredniego numerycznego całkowania [8].

W pracy posługujemy się wielkościami bezwymiarowymi stosując następujące oznaczenia:

- $j=1, 2$ indeksy kierunków głównych: promieniowego i obwodowego
 a_j współrzędne środka krzywej granicznej F warunku plastyczności
 A, C współczynniki liniowego wzmocnienia: izotropowego i kinematycznego,
 e_p, σ_p odkształcenie i naprężenie na granicy plastyczności
 \tilde{e}_p parametr Odqvista,
 ε_j, k_j uogólnione odkształcenia powierzchni środkowej,
 $e_j = \varepsilon_j / e_p, s_j = \sigma_j / \sigma_p$ względne odkształcenia i bezwymiarowe naprężenia wzdłuż kierunków głównych,
 e parametr zakłócenia,
 E_{jk}, D_{jk} macierze sztywności lokalnej i przekroju występujące w związkach fizycznych,
 $p = \bar{p} / (\bar{h}_0 \sigma_p)$ intensywność obciążenia zewnętrznego,
 $n_j = \bar{n}_j / (\bar{F}_0 \sigma_p)$ siły przekrojowe: siła podłużna i moment zginający.
 $m_j = \bar{m}_j / (\bar{W}_0 \sigma_p)$ grubości: porównawcza dla przekroju pełnościennego, dla przekroju sandwich,
 $\bar{h}_0, \bar{h}_p, \bar{h}_s$
 $\bar{F}_0 = \begin{cases} 2\bar{d}_s \\ \bar{h}_p \end{cases}$ pole powierzchni przekroju *sandwich* i pełnościennego,
 $\bar{W}_0 = \begin{cases} \bar{h}_s \bar{d}_s \\ \bar{h}_p^2 / 6 \end{cases}$ wskaźnik przekroju *sandwich* i pełnościennego,
 τ parametr umownego czasu teorii plastyczności — quasi—czas,
 $u = \bar{u} / h_0, v = \bar{v} / h_0$ składowe wektora przemieszczenia powierzchni środkowej,
 Z parametr charakteryzujący stan giętny,
 $\xi = \bar{\xi} / h_0, x = \bar{x} / h_0$ promień koła równoleżnikowego przed i po odkształceniu,
 $\varphi = \bar{z} / h_0 \in [-1/2, 1/2]$ bezwymiarowa współrzędna wzdłuż grubości płyty,
 X, Y wektory wierszowe swobodnych wartości początkowych i warunków brzegowych,
 $(\cdot)' = \partial(\cdot) / \partial \xi$ pochodna przestrzenna,
 $(\cdot) \dot{} = \partial(\cdot) / \partial \tau$ pochodna względem czasu,

ZAKRES OBOWIĄZYWANIA ROZWIĄZANIA KOŁOWO-SYMETRYCZNEGO

Analiza kołowo symetrycznego wyboczenia płyt pierścieniowych w zakresie sprężysto-plastycznym wymaga podania granicznych parametrów płyt, do których obowiązują sprężyste rozwiązania, a kołowo symetryczna forma wyboczenia ($n=0$)

odpowiada najniższemu obciążeniu krytycznemu. W płytach pierścieniowych obciążenie krytyczne i postać wybożenia zależą w istotny sposób od stosunku promieni konturów płyty pierścieniowej (rys. 1), $\beta=b/a$, oraz od warunków brzegowych [1].

Hiperboliczna zależność łączy bezwymiarowy promień zewnętrzny płyty $a=\bar{a}/\bar{n}$ z obciążeniem krytycznym, odpowiadającym sprężystemu wybożeniu:

$$(2.1) \quad p_{kr} = \frac{K'}{4(1-\nu^2)a^2 \varepsilon_p} = \frac{\tilde{K}}{a^2}, \quad K = \frac{p\bar{h}a^2}{D}.$$

Wartości K określone są w odpowiednich tablicach w pracy [2] dla różnych typów płyt. Obecnie rozważania będą ograniczone do dwu rodzajów warunków brzegowych na konturze zewnętrznym: przegubowego podparcia lub zamocowania z możliwością przesuwu w płaszczyźnie środkowej (rys. 1). Kontur wewnętrzny jest swobodny. Płyta jest obciążona na zewnętrznym konturze równomiernie rozłożonym ciśnieniem radialnym $p=p_a=p/\sigma_p$, $p_b=0$. W tablicy 1 zestawimy w kolumnie 3 i 4 wartości \tilde{K} dla różnych β i warunków brzegowych.

Tablica 1

β	p^{pl}	p^{gr}	\tilde{K}		a^{pl}	
			F	A	F	A
0,8	0,180	0,210	17775	552	314,24	55,39
0,7	0,255	0,323	12003	587	216,96	47,96
0,6	0,320	0,438	9206	631	169,61	44,40
0,5	0,375	0,557	7074	687	137,35	42,80
0,4	0,420	0,675	5099	759	110,18	42,50
0,3	0,455	0,791	4110	853	95,04	43,30
0,2	0,480	0,894	3736	971	88,23	44,98

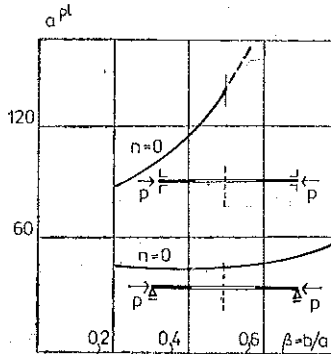
Przy obciążonym konturze zewnętrznym pierwsze odkształcenia plastyczne pojawiają się na konturze wewnętrznym, dla którego naprężenia, zgodnie z rozwiązaniem Lamégo wynoszą:

$$(2.2) \quad \sigma_r = \bar{\sigma}_r / \sigma_p = 0, \quad \sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta / \sigma_p = 2p / (1 - \beta^2).$$

Rozpatrując warunek plastyczności dla punktu na konturze wewnętrznym, możemy określić ciśnienie powodujące pierwsze uplastycznienia:

$$(2.3) \quad \sigma_t = \sigma_\theta = 1.0 \rightarrow p^{pl} = (1 - \beta^2) / 2.$$

Jeśli podstawimy p^{pl} do wzoru (2.1) na obciążenie krytyczne, to obliczymy graniczną smukłość płyty a^{pl} . Płyta przy ustalonym β i $a > a^{pl}$ będzie ulegała kołowo symetrycznemu wyboczeniu, pracując w zakresie sprężystym. Natomiast przy $a < a^{pl}$ już w stanie tarczowym przedwyboczeniowym wystąpią uplastycznienia, które rozwijają się od konturu wewnętrznego. Związek pomiędzy a^{pl} i β przedstawimy na rys. 2 i w tabelcy 1 w kolumnie 6 i 7. Jak zaznaczono na rys. 2, najniższe obciążenie krytyczne, odpowiadające kołowo symetrycznej formie równowagi w zakresie sprężystym, otrzymujemy dla płyty przegubowo-podpartej, bez względu na wartość β . W przypadku brzegu zamocowanego β powinno być nie większe od 0,5.



Rys. 2

W tabelcy 1 podano obok wartości p^{pl} , także wartości nośności graniczne płyty $p^{gr}(\beta)$. Jest to obciążenie, przy którym w płycie nie istnieje obszar sprężysty w stanie tarczowym. Wartości p^{gr} wynikają z rozwiązania równania przestępnego [25]:

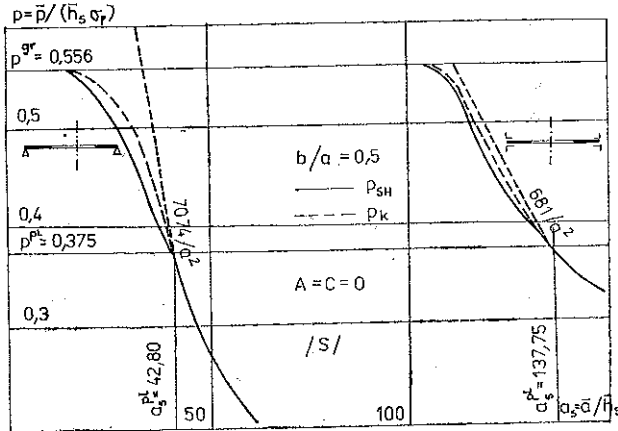
$$(2.4) \quad \frac{1}{\beta} = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2}{-p^{gr} + \sqrt{4 - 3(p^{gr})^2}}} \exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{4}{3(p^{gr})^2} - 1}\right)\right],$$

wiążącego parametr geometryczny płyty β z p^{gr} .

W wyniku numerycznej analizy podamy w dalszym ciągu wartości $p(a)$. Wyznamy w ten sposób krzywe, które dla różnych koncepcji wyboczenia oraz charakterystyk materiału sprężysto-plastycznego będą przedłużeniem hiperbol (2.1), odnoszących się jedynie do stanu sprężystego. Rzędne na uzupełnionych krzywych będą się mieściły w przedziale $[p^{pl}, p^{gr}]$. Rys. 3 podaje wartości różnych parametrów geometrycznych i obciążeniowych, otrzymane z analizy sprężysto-plastycznych płyt o przekroju *sandwich*.

Wymiarowe parametry geometryczne płyt pierścieniowych będą wynikały ze spełnienia warunku równoważności przekroju sandwich i pełnościennego. Przyjmując, że oba przekroje mają jednakowe sztywności na rozciąganie i zginanie, otrzymujemy zależności pomiędzy parametrami charakteryzującymi przekrój sandwich (S) — d, h_s i pełnościenny (P) — h_p (rys. 4):

$$(2.5) \quad d = h_p/2, \quad h_s = h_p/\sqrt{3}.$$



Rys. 3

W pracy używamy bezwymiarowe wielkości geometryczne odniesione do grubości h_s w przekroju (S) i h_p w przekroju (P). Dlatego na osi poziomej na rys. 3 określono zarówno bezwymiarowy promień a_s jak i a_p . Dla płyty zamocowanej graniczne smukłości wynoszą odpowiednio $a_s^{pl} = 137,75$ i $a_p^{pl} = 79,53$. Zmieniając podparcie na przegubowe obniża się wartości do $a_s = 42,8$ i $a_p = 24,71$.

3. PODSTAWOWY UKŁAD RÓWNAŃ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH PŁYT PIERŚCIENIOWYCH

Równania różniczkowo-algebraiczne, wyprowadzone w [15] służą wyznaczeniu kołowo symetrycznego stanu giętnego a także tarczowego sprężysto-plastycznych płyt. Składają się one ze związków geometrycznych

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u' &= l' \cos \varphi - 1, & v' &= l' \sin \varphi, & \varphi' &= \varepsilon_p k_1, \\ \vartheta_2 &= \frac{u}{\varepsilon_p \zeta}, & k_2 &= \frac{\sin \varphi}{\varepsilon_p \zeta}, & l' &= 1 + \varepsilon_p \vartheta_1, & x &= \xi + u, \end{aligned}$$

$$e_j = \vartheta_j + k_j \zeta, \quad j=1, 2, \quad (') = \partial(\) / \partial \xi;$$

równań równowagi

$$(3.2) \quad \begin{aligned} n'_1 &= (n_2 - n_1) \frac{l'}{x} \cos \varphi - n_1 \varphi' \operatorname{tg} \varphi, \\ m'_1 &= (m_2 - m_1) \frac{l'}{x} \cos \varphi + 2n_1 l' \operatorname{tg} \varphi; \end{aligned}$$

związków fizycznych

$$(3.3) \quad \dot{s}_j = E_{jk} \cdot \dot{e}_k, \quad j, k=1, 2, \quad (') = \partial(\) / \partial \tau.$$

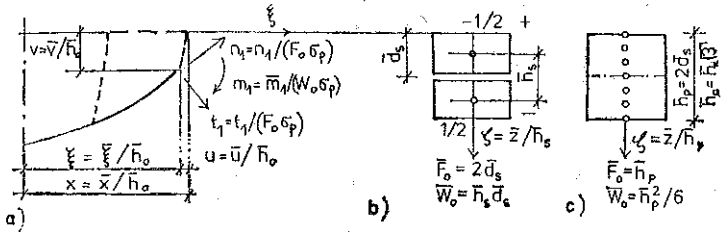
gdzie przyjęto następujące bezwymiarowe wielkości:

$$x = \bar{x}/h_0, \quad \xi = \bar{\xi}/h_0, \quad \zeta = \bar{z}/h_0, \quad v = \bar{v}/h_0, \quad u = \bar{u}/h_0, \\ s_j = \bar{s}_j/\sigma_p, \quad e_j = \bar{e}_j/\epsilon_p.$$

Powyższe związki fizyczne odnoszą się do dowolnego punktu przekroju ζ , w którym zakłada się istnienie płaskiego stanu naprężeń. Elementy macierzy lokalnej sztywności E_{jk} zależą od aktualnego stanu naprężeń, odkształceń i uplastycznień oraz od własności materiału (przyjęto liniowe izotropowo-kinematyczne wzmocnienie — o odpowiednich współczynnikach A i C [17, 18, 23]).

Występujące w równaniach równowagi uogólnione naprężenia definiujemy poprzez naprężenia $s_j(\zeta)$ w zależności od typu przekroju. I tak w przypadku przekroju *sandwich* zależności te mają postać sum:

$$(3.4) \quad \dot{n}_j = \frac{1}{2} (\dot{s}_j^+ + \dot{s}_j^-), \quad \dot{m}_j = \frac{1}{2} (\dot{s}_j^+ - \dot{s}_j^-),$$



Rys. 4

gdzie przez +, - oznaczono górną i dolną warstwę (rys. 4b). W przekroju pełnościanym, aproksymowanym wielopunktowym przekrojem (rys. 4c), występują w definicjach uogólnionych sił następujące całki:

$$(3.5) \quad \dot{n}_j = \sigma_p h_p \int_{-1/2}^{1/2} \dot{s}_j d\zeta, \quad \dot{m}_j = \sigma_p h_p^2 \int_{-1/2}^{1/2} \dot{s}_j \zeta d\zeta.$$

Wykorzystując hipotezę Kirchhoffa-Love'a oraz lokalne związki fizyczne (3.3) możemy wyrazić uogólnione naprężenia przez uogólnione odkształcenia:

$$(3.6) \quad \dot{n}_j = D_{jk}^0 \dot{\epsilon}_k + D_{jk}^1 k_k, \quad \dot{m}_j/6 = D_{jk}^1 \dot{\epsilon}_k + D_{jk}^2 k_k,$$

gdzie całki D_{jk}^α będą obliczane przy użyciu wzoru kwadraturowego:

$$(3.7) \quad D_{jk}^\alpha = \int_{-1/2}^{1/2} E_{jk} \zeta^\alpha d\zeta = \sum_{r=1}^R Z_r (E_{jk} \zeta^r)_r.$$

Szczegółowy opis procedury odwracania związków fizycznych dla przekroju *sandwich* można znaleźć w [15, 23], natomiast dla przekroju pełnościanego w [24].

W każdym punkcie płyty na danym przyroście umownego czasu określa się na podstawie znaku przyrostu intensywności naprężeń typ zachodzącego procesu. Gdy $ds_i \geq 0$ mamy do czynienia z procesem aktywnym, gdy $ds_i < 0$ — z procesem biernym.

4. ZASTOSOWANIE METODY WSTRZELIWANIA DO ROZWIĄZANIA STANU TARCZOWEGO I GIĘTNEGO PŁYTY PIERŚCIENIOWEJ

Podstawowy układ równań, rozdzielonych względem pochodnych geometrycznych $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\xi$ i czasowych $(\cdot)^{\cdot} = \partial(\cdot)/\partial\tau$ opisuje dwupunktowy problem brzegowy dla każdej dyskretnej wartości umownego czasu $\tau = \tau_m$. W dalszym ciągu będziemy wyznaczać w przestrzeni obciążeniowo-przemieszczeniowej ścieżkę tarczowych lub giętnych stanów równowagi.

Z równań równowagi oraz części związków geometrycznych utworzymy układ równań kanonicznych o pochodnych przestrzennych:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u' &= l' \cos \varphi - 1 = (1 + \varepsilon_p \vartheta_1) \cos \varphi - 1, \\ v' &= l' \sin \varphi = (1 + \varepsilon_p \vartheta_1) \sin \varphi, \\ \varphi' &= \varepsilon_p k_1, \\ n_1' &= (n_2 - n_1) (1 + \varepsilon_p \vartheta_1) (\cos \varphi) / x - n_1 \varepsilon_p k_1 \operatorname{tg} \varphi, \\ m_1' &= (m_2 - m_1) (1 + \varepsilon_p \vartheta_1) (\cos \varphi) / x + 2n_1 (1 + \varepsilon_p \vartheta_1) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

Definiując wektor stanu y jako

$$(4.2) \quad y = \{u, v, \varphi, n_1, m_1\},$$

można powyższy układ równań napisać w skróconej postaci:

$$(4.3) \quad y' = f(y, \xi).$$

W trakcie całkowania odpowiedniego kanonicznego układu równań określimy składowe następujących wektorów: wektora stanu $\dot{y} \in R^m$, uogólnionych naprężeń Q i odkształceń q . W stanie tarczowym są to wektory

$$(4.4) \quad y = \{u, n_1\}, \quad Q = \{n_1, n_2\}, \quad q = \{\vartheta_1, \vartheta_2\},$$

w stanie giętnym

$$(4.6) \quad y = \{u, v, \varphi, n_1, m_1\}, \quad Q = \{n_1, n_2, m_1, m_2\}, \quad q = \{\vartheta_1, \vartheta_2, k_1, k_2\}.$$

W wektorze wejścia przyjmujemy część składowych z warunków brzegowych y_0^* , część jako umowny czas bądź jako swobodne wielkości początkowe $y_0^{**} = X$. Składowe wektora wyjścia y_L muszą uwzględniać warunki brzegowe $y_L^* = Y$ lub sterowanie umownym czasem. Dokładny opis wektora wejścia i wyjścia przy różnych warunkach brzegowych podany jest w tablicy 2. Wektory $X, Y \in R^n$, gdzie $n = m/2$ i oznacza rząd zagadnienia brzegowego. W stanie tarczowym mamy $n = 1$, w stanie giętnym $n = 2$.

Kolejne punkty na ścieżce tarczowych stanów otrzymujemy zwiększając statyczny umowny czas τ , jakim jest obciążenie płyty $\tau' = p = -n_1 (\lambda_0)$ lub $\tau' = p = -n_1 (\lambda_L)$ (schematy a, b w tablicy 2). Zaburzenie stanu tarczowego oraz powiększanie pokrytycznych ugięć uzyskujemy przez przyjęcie wzrastających wartości kinematycznego umownego czasu. Jako taki parametr będziemy przyjmowali jedną

ze składowych wektora wejścia stanu giętnego y_0 (tabl. 2). W dalszym ciągu jako τ przyjmijemy Φ_0 , które oznacza kąt obrotu stycznej do powierzchni środkowej w początkowym punkcie numerycznego całkowania.

Tablica 2

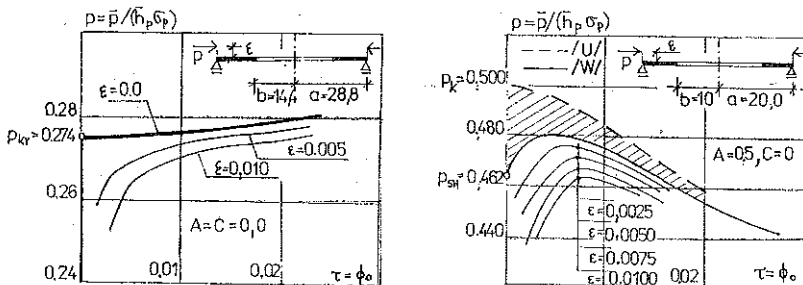
SCHEMAT STAN PŁYTY	a	b
TARCZOWY	$y = \{u, m_1\}$ $y_0 = \{u_0, m_{10}\} = \{y_0^{**}, y_0^*\} = \{x_1, 0\}$ $y_L = \{u_L, m_{1L}\} = \{y_L^{**}, y_L^*\} = \{u_L, Y_1\}$ $= \{u_L, \tau\}$	$y = \{u, m_1\}$ $y_0 = \{u_0, m_{10}\} = \{y_0^{**}, y_0^*\} = \{x_1, \tau_t\}$ $y_L = \{u_L, m_{1L}\} = \{y_L^{**}, y_L^*\} = \{u_L, Y_1\}$ $= \{u_L, 0\}$
GIĘTNY	$y = \{u, n_1, v, \varphi, m_1\}$ $y_0 = \{u_0, n_{10}, v_0, \varphi_0, m_{10}\} = \{y_0^{**}, y_0^*\} = \{x_1, 0, x_2, \tau_g, 0\}$ $y_L = \{u_L, n_{1L}, v_L, \varphi_L, m_{1L}\} = \{y_L^{**}, y_L^*\} = \{u_L, n_{1L}, v_L, \varphi_L, Y_2, m_{1L}\}, Y_1 = Y_2 = 0$	$y = \{u, n_1, v, \varphi, m_1\}$ $y_0 = \{u_0, n_{10}, v_0, \varphi_0, m_{10}\} = \{y_0^{**}, y_0^*\} = \{x_1, x_2, 0, \tau_g, 0\}$ $y_L = \{u_L, n_{1L}, v_L, \varphi_L, m_{1L}\} = \{y_L^{**}, y_L^*\} = \{u_L, Y_1, v_L, \varphi_L, Y_2\}, Y_1 = Y_2 = 0$
$n_1=1$ $X, Y \in R^1$		
$n_1=2$ $X, Y \in R^2$		

5. METODA WYZNACZANIA OBCIĄŻENIA BIFURKACYJNEGO

Przy określeniu obciążenia krytycznego sprężysto-plastycznych płyt korzystamy podobnie jak w zakresie sprężystym z kryterium bifurkacyjnego utraty stateczności. Otrzymujemy jednak w tym przypadku cały przedział zawarty pomiędzy obciążeniem krytycznym odpowiadającym koncepcji wzrastającego obciążenia Shanleya i ustalonego obciążenia Kármána.

Rozważania będą dotyczyły głównie układów idealnych, to znaczy płyt płaskich w konfiguracji początkowej, obciążonych ściśle w płaszczyźnie środkowej. Miarą imperfekcji może być na przykład mimośród obciążenia ε (rys. 5).

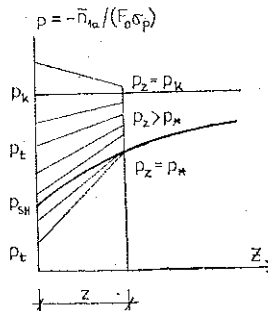
Zgodnie z uwagami zawartymi w punkcie 2 można tak dobrać parametry płyty, np. $a_p = 28.8 > a_p^{gr} = 24.8$, aby wyoboczenie nastąpiło zanim pojawią się odkształcenia



Rys. 5

plastyczne (rys. 5a). Otrzymujemy wówczas punkt bifurkacji, z którego wychodzi ścieżka kołowo symetrycznych stanów pokrytycznych. Dla płyty o $a_p=20,0$ (rys. 5b) wyznaczamy natomiast cały obszar możliwych stanów pokrytycznych, zawarty pomiędzy krzywą (W) wychodzącą z punktu ($p_{SH}, 0$) zgodnie z koncepcją wzrastającego obciążenia Shanleya a krzywą (U) rozpoczynającą się w punkcie ($p_K, 0$), odpowiadającym obciążeniu Kármána. Na rysunkach zostały naniesione także krzywe ilustrujące zachowanie się płyt nieidealnych ($\varepsilon \neq 0$). Dla płyty o $a_p=20$, krzywe $p(\tau)$ zbiegają od dołu do jedynej ścieżki pokrytycznych stanów idealnej płyty, wyobczonej w stanie sprężystym. Na rys. 5b krzywe $p(\tau)$ przedstawiające od początku ścieżki giętych stanów równowagi zbliżają się do krzywej (W), określonej dla analogicznej płyty idealnej.

Stosując przyrostowe związki fizyczne teorii płynięcia plastycznego wyznaczamy kolejne punkty na ścieżce stanów równowagi tarczowej lub giętej. W pierwszym etapie realizujemy stany tarczowe, przy nałożeniu więzów uniemożliwiających występowanie efektów giętych. Zgodnie z kryterium bifurkacyjnym badamy w każdym punkcie ($p_t, 0$) (rys. 6) wartość obciążenia p_z , które musi być przyłożone do płyty, będącej w wymuszonym, bliskim stanie giętym.



Rys. 6

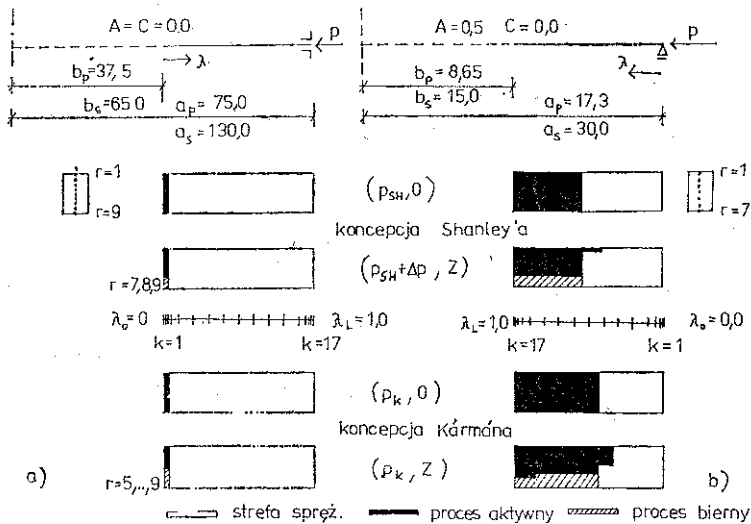
Zgodnie z rys. 6 wychodząc z punktów $p_t < p_{SH}$ otrzymujemy stałe prawie jednakowe wartości ciśnienia $p_z = p_*$. Wewnątrz przedziału $p_t \in [p_{SH}, p_K]$ obciążenie p_* w stanie zakłóconym spełnia nierówność $p_z > p_*$. Osiągnięcie górnej granicy przedziału następuje, gdy $p_t = p_K = p_z$.

6. ANALIZA PROCESÓW ZACHODZĄCYCH W PŁYCI W CHWILI WYBOCZENIA

W dalszym ciągu zajmiemy się dwiema płytami (rys. 7) o stałym stosunku promieni konturów $b/a=0,5$, lecz o różnych warunkach brzegowych. Dla płyt o parametrycznych i materiałowych podanych na rys. 7 przeanalizujemy zjawiska zachodzące przy obciążeniach krytycznych według koncepcji Kármána i Shanleya, które wynoszą odpowiednio: dla płyty przegubowo podpartej $p_{SH}=0,535$, $p_K=0,566$ dla zamocowanej $p_{SH}=0,411$, $p_K=0,417$.

Obliczenia były wykonane dla płyt o przekroju *sandwich* (S) i pełnościennym (P), aproksymowanym wielopunktowym przekrojem o liczbie węzłów aproksymacji

$R=3, 5, 7, 9$. Zwiększenie ilości węzłów aproksymacji (R) nie wpłynęło na otrzymane wartości obciążenia krytycznego, ze względu na rozpatrywanie w punkcie bifurkacji dwu bliskich stanów równowagi: tarczowej i giętej. W stanie przedwyboczeniowym występuje w tarczy jednorodny wzdłuż wysokości rozkład naprężeń i uplastycznień, mierzonych parametrem Odqvista. Zwiększenie liczby węzłów aproksymacji w przekroju poprzecznym umożliwi dokładniejsze określenie wzdłuż grubości płyty granic stref sprężystych i plastycznych, zmieniających się w trakcie powiększania się ugięć pokrytycznych. Można ponadto dokładniej opisać zjawiska występujące w punkcie bifurkacji, a tym samym różnice w koncepcjach Shanleya i Kármána.



Rys. 7

W płycie o schemacie jak na rys. 7a przy obciążeniach p_{SH} jak i p_K uplastycznienia pojawiają się jedynie w bliskim sąsiedztwie konturu wewnętrznego. Porównując dwa sąsiednie stany równowagi w przestrzeni (p, Z) o współrzędnych $(p_{SH}, 0)$ i $(p_{SH} + \Delta p, Z)$ otrzymujemy zgodnie z koncepcją Shanleya wzrost obciążenia oraz pojawienie się stref biernych procesów (węzły aproksymacji $r=7, 8, 9$ na skutek pokrytycznych ugięć (rys. 7a). Pomiedzy stanami $(p_K, 0)$, (p_K, Z) obciążenie nie ulega zmianie (koncepcja Kármána), ale w wyniku powstania stanu giętego wystąpi dalsze uplastycznienie powyżej powierzchni środkowej, a na samej powierzchni i poniżej niej strefa odciążenia (dla $R=9$ będą to węzły $r=5-9$). Jak pokażemy dalej na rys. 4, na ścieżce (W) znajduje się punkt graniczny $p^0 < p_K$, w którym strefa bierna osiągnięta w trakcie wzrostu ugięć, ma taki sam zasięg jak przy obciążeniu p_K . Z tego też względu, jak i z powodu nieznacznej różnicy między wartościami p_{SH} i p_K , ścieżki (W) i (U) są bardzo bliskie, a w płycie na kolejnych krokach czasowych Δt następują takie same procesy bez względu na to, czy ścieżka wychodziła z punktu $(p_{SH}, 0)$ czy $(p_K, 0)$.

Na rys. 7b pokażemy rozwój stref wzdłuż promienia płyty, przy przejściu od stanu tarczowego do giętnego w sąsiedztwie punktu bifurkacji. Płyta przegubowo podparta była w znacznej części uplastyczniona już w stanie tarczowym. Zasięg strefy procesu biernego zależy od tego, czy bliski stan giętny był wymuszony w pobliżu punktu bifurkacji Shanleya czy Kármána.

Na podstawie wykonanych przykładów numerycznych odnoszących się do płyt o różnych parametrach geometrycznych i materiałowych możemy stwierdzić, że obciążenie krytyczne określonej płyty otrzymane dla różnej liczby węzłów aproksymacyjnych w pełnościennym przekroju jak i dla przekroju *sandwich* praktycznie się nie różnią. W pracy [17] przytoczono obliczone wartości obciążeń krytycznych, uzyskanych dla przekroju (*S*) dla różnych parametrów wzmocnienia i kształtu płyty przegubowo podpartej.

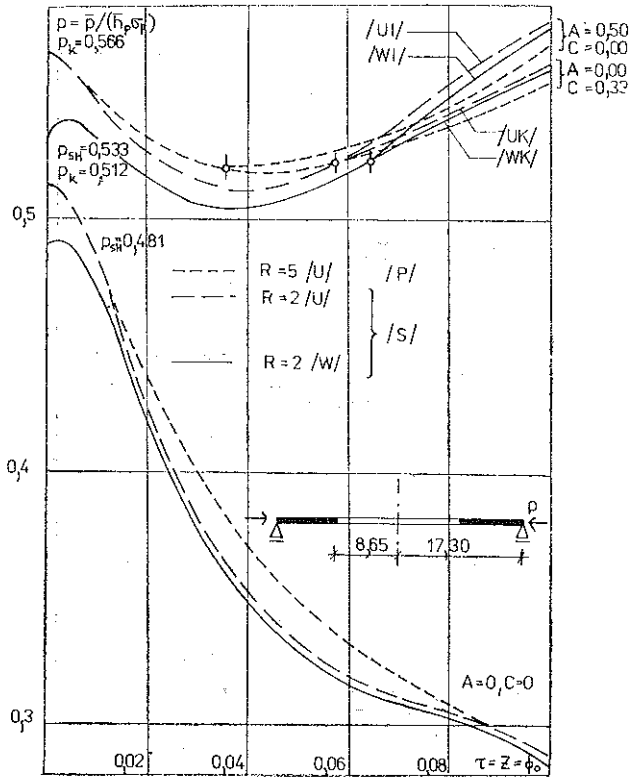
7. STANY POKRYTYCZNE PŁYTY PEŁNOŚCIENNEJ I RÓWNOWAŻNEJ O PRZEKROJU SANDWICH

Krzywe $p(\tau)$ zostały wyznaczone dla płyt o przekroju pełnościennym lub *sandwich*. Przebieg funkcji $p(\tau)$ ściśle zależy od sztywności płyty, której zmiana wynika z rozwoju różnych procesów, zachodzących w trakcie sprężysto-plastycznego odkształcania się płyty. Przekrój *sandwich* ma parametry kształtu tak dobrane, aby w zakresie sprężystym jego nośność na rozciąganie i zginanie była równoważna nośności przekroju pełnościennego. Dwie warstwy przekroju *sandwich* mają własności, a tym samym wartości naprężeń i odkształceń, uśrednione z dwu przedziałów $-\frac{h}{2} \leq z \leq 0$ i $0 \leq z \leq \frac{h}{2}$. W wielopunktowym przekroju o nieparzystej liczbie węzłów aproksymacji $R > 3$ opisujemy zjawiska zachodzące na powierzchni środkowej i pośrednich włóknach. Dla $R=3$ nie ma możliwości uchwycenia procesów w pośrednich powierzchniach równooddalonych od środkowej. Stąd pochodzą większe różnice między rozwiązaniami uzyskanymi dla $R=2$ i $R=3$ niż $R=2$ i $R=5$. Krzywe $p(\tau)$ otrzymane dla przekroju 5 i 7-punktowego są bardzo zbliżone i leżą pomiędzy krzywymi wyznaczonymi dla $R=3$ (*P*) i przekroju (*S*).

Pierwsze przykłady numeryczne [17] dotyczyły płyty o przekroju (*S*). Dobraliśmy w nich tak parametry geometryczne i materiałowe, aby uzyskać różne przebiegi funkcji $p(\tau)$ (rys. 8). W dalszym ciągu wykonaliśmy obliczenia dla przekroju pełnościennego o 3, 5 lub 7 węzłach aproksymacji. Na podstawie tych przykładów możemy stwierdzić, że przekrój pięciopunktowy w wystarczającym stopniu umożliwia wyznaczenie rozkładu stref różnych procesów wzdłuż grubości płyty. Dalsze zwiększanie R nie wpływa w istotny sposób na rozkład parametru $\bar{e}_p(k, r)$, ani na wartości \bar{e}_p w skrajnych włóknach.

Rysunek 8 zawiera oprócz krzywych $p(\tau)$ określonych dla płyty o przekroju *sandwich* [17], ścieżki stanów równowagi wyznaczone dla aproksymacji 5-punktowej. Na rysunku tym wykazaliśmy wpływ stałych materiałowych na obciążenia krytyczne p_{SH} i p_K oraz na ogólną sztywność płyty, ujawniającą się w przebiegu funkcji $p(\tau)$. Dla materiału o kinematycznym wzmocnieniu ($A=0,0$, $C=0,333$) lub izotropowym ($A=0,5$; $C=0,0$) różnice pojawiają się dopiero wtedy, gdy w płycie rozpoczynają

się wtórne uplastycznienia. Przedział pomiędzy p_{SH} i p_K wynosi odpowiednio [0,533; 0,566]. W porównaniu z przekrojem 5-punktowym, w płycie (S) uchwycone zostają wtórne uplastycznienia dla wyższych wartości τ . Dlatego przy różnych parametrach $\tau=Z$ następuje rozdzielanie się krzywych przy różnych wzmocnieniach. W płycie wykonanej z materiału o kinematycznym wzmocnieniu następuje szybszy wzrost uplastycznień w momencie powstania wtórnych uplastycznień. Ujawnia się to obniżeniem krzywej (WK) w stosunku do (WT), rys. 8.



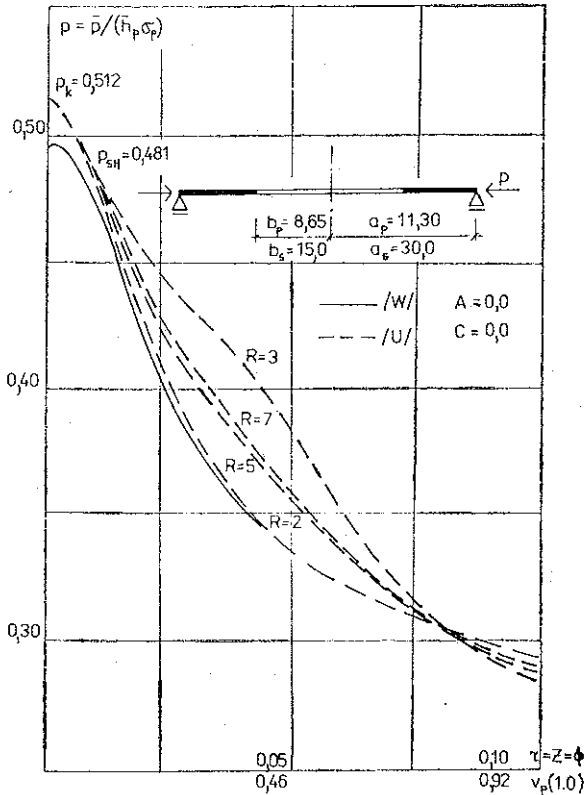
Rys. 8

Przyjęcie materiału idealnie sprężysto-plastycznego ($A=C=0,0$) obniża obciążenia krytyczne: $p_{SH}=0,481$, $p_K=0,512$. Możemy stwierdzić, że niższe obciążenie wywołuje w płycie idealnie sprężysto-plastycznej taką samą linię ugięcia jak w płycie wykonanej z materiału ze wzmocnieniem. W pierwszym przypadku przy porównywalnych ugięciach otrzymujemy większe wartości parametru Odqvista, co daje mniejszą sztywność płyty i opadającą krzywą $p(\tau)$.

Kolejne rysunki pokazują wpływ aproksymacji przekroju poprzecznego na przebieg $p(\tau)$ przy stałych materiałowych $A=0,5$, $C=0,0$ (rys. 9) i $A=C=0,0$ (rys. 10). stosowanie przyrostowych związków fizycznych umożliwia śledzenie procesów wzdłuż całej ścieżki stanów pokrytycznych. Dla każdego dyskretnego punktu (k, r) przechowywane są w pamięci maszyny wartości naprężeń s_j , odkształceń e_j dla

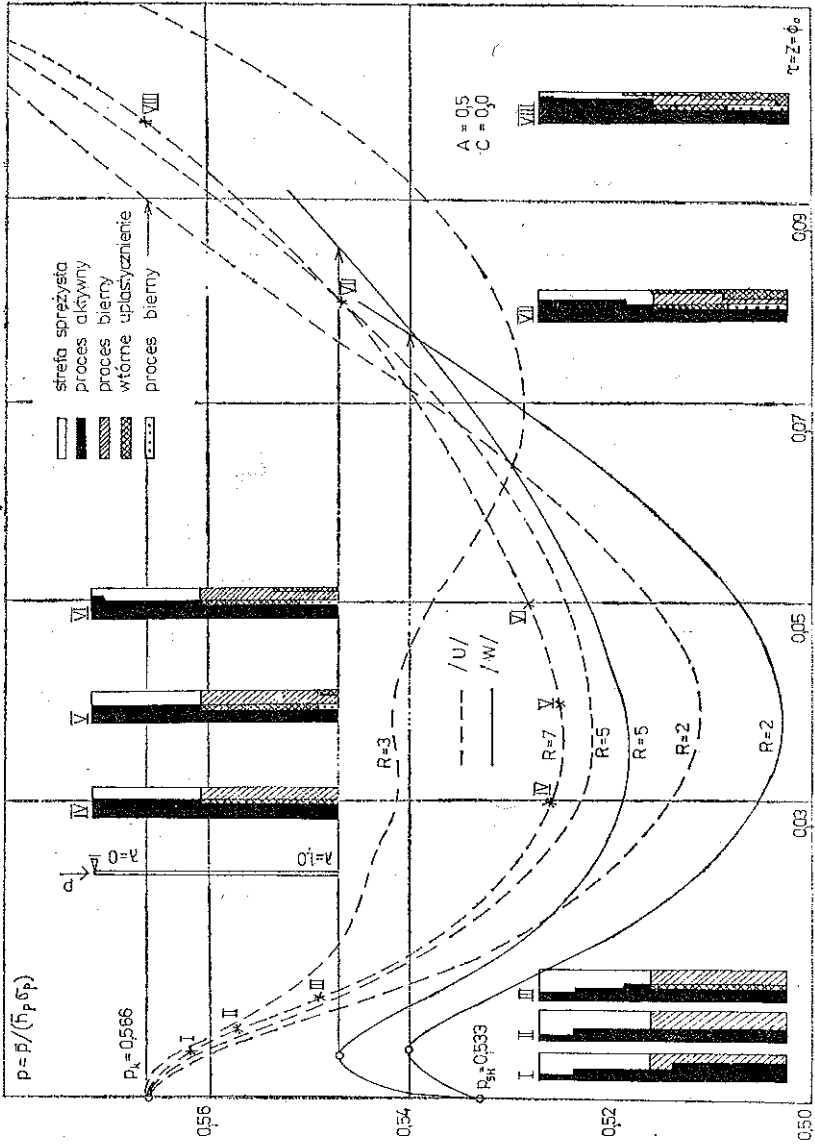
$j=1, 2$ i parametru Odqvista \bar{e}_p . Prześledzenie wartości \bar{e}_p w całej płycie, przy różnych aproksymacjach ($R=2, 3, 5, 7$), pozwala wy aśnić różnice pomiędzy krzywymi $p(\tau)$.

Zmiany sztywności płyty zależą od chwili pojawienia się i zasięgu stref biernych a także wtórnych uplastycznień. Najgłówniejsze zmiany typów procesów zachodzą w przedziale $\tau \in [0,02; 0,07]$, co odpowiada ugięciom płyty pełnościennie $v_p = v_p/h_p^-$, $v_p \in [0,18; 0,64]$ i płyty o przekroju (S) $v_s = v_s^-/h_s \in [0,32; 1,11]$. Ze względu na ustalenie się stref możemy stwierdzić znaczne polepszenie zgodności wyników dla różnych R przy zaawansowanych ugięciach.



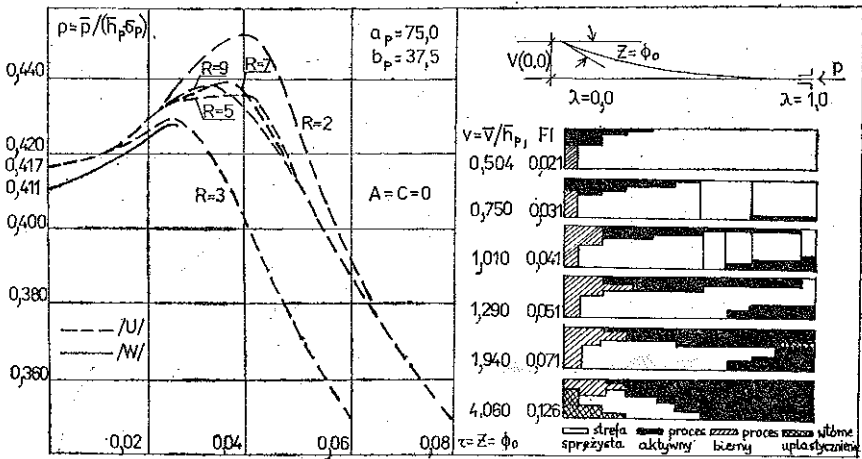
Rys. 9

Krzywa (W) wychodząca z punktu bifurkacyjnego ($p_{SH}, 0$) ma istotne znaczenie ze względu na występowanie na niej punktu granicznego. Z tego punktu, jak i z punktu ($p_k, 0$) może nastąpić przeskok, jeśli krzywa $p(\tau)$ ma część wznoszącą się począwszy od tak zwanego dolnego punktu krytycznego. Zjawisko to jest ważne z tego względu, że temu samemu obciążeniu odpowiadają po przeskoku znacznie większe wartości ugięć. Ponadto układy zaburzone, przy parametrze imperfekcji zmierzającym do zera, mają ścieżki równowagi przybliżające się asymptotycznie od dołu do krzywej (W). W układach takich nie mamy do czynienia z bifurkacją, a jedynie z osiąganiem punktu granicznego, skąd może nastąpić przeskok.



Rys. 10

Inny wykres ma krzywa $p(\tau)$, wyznaczona dla płyty zamocowanej wzdłuż konturu zewnętrznego (rys. 11). Zarówno na krzywej (N) jak i (W) znajdują się punkty graniczne, odpowiadające górnemu ciśnieniu. Na podstawie wyników otrzymanych przy 9-punktowej aproksymacji przekroju pełnościennego możemy dokładnie opisać procesy zachodzące w płycie w trakcie powiększania się pokrytycznych ugięć (rys. 11b). Nagła zmiana sztywności płyty przed punktem p^a wynika z powiększenia się strefy bierny wzdłuż grubości przekroju płyty na konturze wewnętrznym, aż do objęcia tym procesem całego przekroju. W przedziale $Z \in [0,03; 0,040]$ znika całkowicie sprężysty przekrój i równocześnie pojawiają się uplastycznienia przy zamocowanym konturze zewnętrznym, które rozwijają się w kierunku osi symetrii kołowej.



Rys. 11

Górne ciśnienie krytyczne zależy od aproksymacji w ten sposób, że jego wartości są bardzo zbliżone dla $R=5, 7, 9$, ($p_{(9)}^a=0,437$) i mieszczą się w przedziale $[p_{(3)}^a; p_{(5)}^a] = [0,429; 0,454]$. Porównując wyniki otrzymane dla $R=5$ i $R=9$ przy zaawansowanych stanach pokrytycznych, a w szczególności uplastycznienia na powierzchni środkowej i w skrajnych włóknach, możemy stwierdzić, że 5-punktowy przekrój jest wystarczająco dokładną aproksymacją, przy równoczesnym mniejszym czasie obliczeń i obszarze zajmowanej pamięci maszyny.

8. UWAGI KOŃCOWE

Praca jest uogólnieniem metody wyznaczania obciążenia krytycznego i analizy stanów pozakrytycznych na przypadek przekroju pełnościennego, aproksymowanego równoważnym zastępczym przekrojem wielopunktowym. W porównaniu z [17] gdzie rozważono płytę przegubowo podpartą o idealizowanym przekroju *sandwich*, rozpatrzono również przypadek brzegu utwierdzonego.

W obecnej pracy zastosowano również metodę wstrzeliwania — bezpośredniego numerycznego całkowania. Metoda ta była z powodzeniem stosowana do określania

20. A. N. SHERNBORNE, H. H. HAYDL, *Postbuckling and postyielding of edge-compressed circular plates*, *Exper. Mech.*, **16**, 100-109, 1976.
21. A. ROSEN, A. LIBAI, *Stability and behaviour of an annular plate under uniform compression*, *Exper. Mech.*, **16**, 461-467, 1976.
22. S. MAJUMDAR, *Buckling of a thin annular plate under uniform compression*, *AIAA J.*, **9**, 1701-1707, 1971.
23. Z. WASZCZYŹYŃ, *Calculation of sandwich shell of revolution at large elastic plastic deflections*, *Arch. Mech. Stos.*, **24**, 3, 483-498, 1972.
24. M. RADWAŃSKA, *Numerical analysis of large deflection behaviour of elastic plastic shells' of revolution*, *Mech. Teor. Stos.* [w druku].
25. A. GADAI, *Theory of flow and fracture of solids*, V. 1, Ed. 2, c Graw-Hill, New York-Toronto-London 1950.
26. E. PABISEK, *Numeryczna analiza przystosowania się ustrojów obrotowo-symetrycznych do zmian temperatury i ciśnienia*, Politechnika Krakowska, Kozprawa Doktorska, 1982.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПОСЛЕКРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

В работе применяется полуобратный метод нумерического интегрирования к расчету критических нагрузок а также к анализу послекритического состояния упруго-пластических кольцевых пластин. Предполагается, что пластина имеет сечение типа „сандвич“, или сплошное сечение аппроксимированное эквивалентным многоточечным сечением. Принято, что пластина изготовлена из упруго-пластического материала с линейным изотропно-кинематическим упрочнением описываемым уравнениями пластического течения. Рассуждения ограничались к симметричным формам продольного изгиба. В примерах принимается такие предельные условия или отношения радиусов, чтобы рассчитанная нагрузка являлась наименьшим (основным) критическим давлением. Критическая нагрузка была определена возмущением из плоского состояния и расчетом близкого изгибаемого состояния. Для упруго-пластических пластин определяются критические нагрузки согласно концепции возрастающей нагрузки Шанлея и установившейся нагрузки Кармана. На основе нелинейных уравнений больших прогибов и малых деформаций вычислены послекритические прогибы.

SUMMARY

STABILITY AND POSTCRITICAL ANALYSIS OF ELASTIC-PLASTIC ANNULAR PLATE

In the paper a semi-inverse method of numerical integration is applied for calculation of bifurcation loads and for analysis of postcritical states of elastic-plastic annular plates. It is assumed that a plate has an idealized sandwich-type cross section or full walled cross section approximated by an equivalent multipoint cross-section. The material of the plate is elastic plastic with linear isotropic and kinematic strainhardening, described by the theory of plastic flow equations. The considerations are restricted to axisymmetric buckling. In numerical examples such boundary conditions and values of the ratio of radii are assumed, that computed load is the lowest critical

pressure. The critical load is determined disturbing the plane stress state and calculating the neighbouring bending equilibrium state. For an elastic-plastic plate the critical load is calculated according to the Shanley conception of increasing loading and Kármán's approach of stationary loading. Nonlinear equations of large displacements and small deformations are used to compute post-critical deflections.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 marca 1983 r.
