

## PORÓWNANIE WYBRANYCH METOD ANALITYCZNO-NUMERYCZNYCH NA PRZYKŁADZIE STATYCZNEJ ANALIZY PŁYT DOWOLNEGO KSZTAŁTU

WITOLD CECOT i JANUSZ ORKISZ (KRAKÓW)

W pracy są przedstawione i porównane wyniki rozwiązywania płyt dwoma, w pewnym sensie przeciwstawnymi, metodami analityczno-numerycznymi oraz wpływ zastosowanych modyfikacji na wyniki obliczeń. Stosowanymi metodami są: metoda całek brzegowych MCB (boundary integral equation method) i metoda  $R$ -funkcji MRF (funkcji Rwachewa). Ponadto krótko scharakteryzowano dwie, inne analityczno-numeryczne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych. Są to metoda elementów globalnych (L. M. Delves) i globalno-lokalna metoda elementów skończonych (E. L. Wilson). Metody analityczno-numeryczne pozwalają na zmniejszenie liczby niewiadomych przy dyskretyzacji (etap analityczny), przy jednoczesnej możliwości rozwiązywania zagadnień z obszarem o dowolnym kształcie (etap numeryczny). Zastosowanymi modyfikacjami były: symetryzacja układu równań algebraicznych i poprawienie aproksymacji funkcji niewiadomych w MCB oraz symboliczne tworzenie i różniczkowanie  $R$ -funkcji. Otrzymane wyniki obliczeń i znane z literatury dowodzą, że metody analityczno-numeryczne są skutecznym narzędziem rozwiązywania wielu zagadnień brzegowych i mogą być wykorzystywane obok powszechnie stosowanych metod elementów i różnic skończonych.

### 1. WSTĘP

Analiza wielu zjawisk fizycznych prowadzi do następujących zagadnień brzegowych:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} F(u) &= f \quad \text{na } \Omega, \\ G(u) &= g \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

gdzie  $F, G$  oznaczają znane operatory,  $f, g$  znane funkcje,  $u$  funkcję niewiadomą,  $\Omega$  rozpatrywany obszar,  $\partial\Omega$  brzeg  $\Omega$ . Jeżeli operator  $F$  jest symetryczny (tzn. odpowiadająca mu forma dwuliniowa jest symetryczna), to rozwiązanie układu (1.1) jest równoważne obliczeniu minimum funkcjonału:

$$(1.2) \quad (u) = \int_{\Omega} H_1(u, u'_x, \dots) d\Omega + \int_{\partial\Omega} H_2(u, u'_x, \dots) d\Sigma,$$

gdzie  $H_1, H_2$  są znanymi operatorami.

Ścisłe rozwiązanie powyższego problemu w postaci (1.1) lub (1.2) nie jest na ogół możliwe. Istnieje wiele metod przybliżonego rozwiązania zagadnień brzegowych, np. Ritz'a, Galerkina (analityczne), elementów i różnic skończonych (numeryczne). Wraz z rozwojem techniki obliczeniowej (maszyn cyfrowych) powstają nowe metody.

Ostatnio, obok metod czysto analitycznych i czysto numerycznych, coraz częściej pojawiają się rozmaite metody analityczno-numeryczne.

Przybliżone metody analityczne pozwalają rozwiązać zagadnienie brzegowe przy niewielkiej liczbie niewiadomych, jednak ich efektywne wykorzystanie ogranicza się do obszarów o regularnym kształcie (np. koło, prostokąt, prostopadłościan). Z kolei metody numeryczne dają możliwość rozwiązywania zagadnień z obszarem o bardzo skomplikowanym kształcie, lecz kosztem znacznego zwiększenia liczby niewiadomych. Powoduje to wydłużenie czasu obliczeń i konieczność zapewnienia dużej pamięci maszyny cyfrowej do przeprowadzenia obliczeń.

Metody analityczno-numeryczne prowadzą do takiego sformułowania rozwiązywanego zagadnienia, aby było możliwe wykonanie obliczeń numerycznych przy niewielkiej liczbie niewiadomych i dowolnej formie rozpatrywanego obszaru.

Celem niniejszej pracy jest porównanie na przykładzie analizy statycznej płyt dowolnego kształtu dwóch wybranych a przeciwstawnych metod analityczno-numerycznych: metody całek brzegowych (oznaczenie MCB) [1-3, 5, 11 i 13] i metody  $R$ -funkcji (oznaczenie MRF) [9, i 10]. Ponadto przedstawione są pewne modyfikacje tych metod: symetryzacja układu równań i udoskonalenie aproksymacji funkcji niewiadomych w MCB oraz symboliczne tworzenie i różniczkowanie  $R$ -funkcji [7]. Zaproponowano także ewentualne dalsze modyfikacje MCB i MRF.

Prócz tego zostały krótko omówione dwie dalsze metody analityczne: elementów globalnych (oznaczenie MEG) [4] oraz globalno-lokalna metoda elementów skończonych (oznaczenie GLMES) [12]. Niniejsza praca jest rozwinięciem tematyki przedstawionej na XXVII Konferencji Naukowej w Krynicy [2]. Zawiera ona szersze omówienie metod analityczno-numerycznych oraz nowe wyniki obliczeń.

## 2. KRÓTKA CHARAKTERYSTYKA NIEKTÓRYCH METOD ANALITYCZNO-NUMERYCZNYCH

### 2.1. Metoda całek brzegowych

W MCB wykorzystuje się rozwiązanie fundamentalne  $u_0$  danego równania różniczkowego (1.1)<sub>1</sub>, tzn. rozwiązanie równania

$$(2.1) \quad F(u) = \delta(P - Q)$$

w całej przestrzeni  $R^n$  ( $\Omega \subset R^n$ ), gdzie  $\delta$  oznacza dystrybucję Diraca

$$u_0 = u_0(P, Q), \quad P, Q \in R^n.$$

Znając funkcję  $u_0$ , którą wyznacza się na drodze analitycznej (pierwszy etap metody), można [3] wyrazić rozwiązanie zagadnienia brzegowego (1.1) wzorem:

$$(2.2) \quad u = k \left[ \int_{\Omega} R(f) d\Omega + \int_{\partial\Omega} S \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial n}, \dots, g_1, g_2, \dots, g_N \right) d\Sigma \right],$$

gdzie  $k$  oznacza stałą liczbową (różną na brzegu i we wnętrzu  $\Omega$ ),  $R, S$  znane operatory,  $f$  funkcję znaną z równania (1.1)<sub>1</sub> oraz  $g_1, g_2, \dots, g_N$  pewne funkcje określone na brzegu  $\partial\Omega$ . Wzór (2.2) jest dokładny, gdy  $\partial\Omega$  jest krzywą gładką. Niemniej

zastosowanie go do płyt z narożami dało wystarczające dokładne wyniki (tablica 2). Z warunków brzegowych znane są ewentualnie niektóre z funkcji  $g_1, g_2, \dots, g_N$ . Pozostałe oblicza się z układu równań całkowych (2.3) (w najprostszym przypadku jest to jedno równanie), uzyskanego przez napisanie warunków brzegowych (1.1)<sub>2</sub>:

$$(2.3) \quad G \left\{ k \left[ \int_{\Omega} R(f) d\Omega + \int_{\partial\Omega} S \left( u_0, \frac{\partial u_0}{\partial n}, \dots, g_1, g_2, \dots, g_N \right) d\Sigma \right] \right\} = g.$$

Układ (2.3) jest rozwiązywany numerycznie (drugi etap metody), najczęściej metodą kolokacji [1 i 11]. Ponieważ poszukiwane funkcje są określone wyłącznie na brzegu obszaru, przeto otrzymuje się zredukowanie wymiaru zagadnienia o jeden, co daje zmniejszenie wymaganej do obliczeń pamięci maszyny oraz związane z tym skrócenie czasu obliczeń. Po obliczeniu niewiadomych spośród funkcji  $g_1, \dots, g_N$  można znaleźć wartość funkcji  $u$  (rozwiązanie zagadnienia (1.1)) w dowolnym punkcie obszaru korzystając ze wzoru (2.2).

## 2.2. Metoda $R$ -funkcji

Jest to metoda w pewnym sensie przeciwstawna do poprzednio omówionej. W MCB w pierwszym etapie analitycznym tworzona jest funkcja  $u$  określona wzorem (2.2), ściśle spełniająca równanie różniczkowe zagadnienia brzegowego. Możliwie jak najlepsze spełnienie warunków brzegowych przez funkcję  $u$  osiąga się w drugim etapie na drodze numerycznej. W MRF na drodze analitycznej tworzy się tzw. strukturę rozwiązania czyli funkcję spełniającą ściśle warunki brzegowe, zależną dodatkowo od funkcji swobodnej. Ogólnie postać struktury rozwiązania można przedstawić następującym wzorem:

$$(2.4) \quad w_s = B(\psi, \varphi, \omega),$$

gdzie  $B$  oznacza znany operator,  $\psi$  funkcję swobodną, którą określa się na podstawie równania (lub funkcjonau) opisującego rozważane zagadnienie (obliczaną numerycznie),  $\varphi$  odpowiednio gładką funkcję uwzględniającą warunki brzegowe, jakie muszą być spełnione (wyznaczaną analitycznie) oraz  $\omega$  funkcję uwzględniającą kształt obszaru; jest ona równa zero na brzegu obszaru, dodatnia w jego wnętrzu, a ujemna na zewnątrz.

Strukturę rozwiązania tworzy się wykorzystując teorię tzw.  $R$ -funkcji [9,10].  $R$ -funkcje jest to klasa funkcji mających tę własność, że znak wartości funkcji jednoznacznie określają znaki jej argumentów, a ponadto istnieje pełna analogia pomiędzy przyporządkowaniem ciągowi znaków argumentów  $R$ -funkcji znaku jej wartości a funkcjami logiki Boole'a.

Przykładami  $R$ -funkcji mogą być następujące funkcje [9 i 10] dwóch zmiennych, o wartościach rzeczywistych, odpowiadające kolejno koniunkcji i alternatywie:

$$(2.5) \quad x \wedge y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(2.6) \quad x \vee y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Znaki tych funkcji przedstawia Tablica 1.

Podstawowym elementem struktury rozwiązania zagadnienia brzegowego jest funkcje  $\omega$  (we wzorze (2.4)). Sposób jej tworzenia przedstawimy na przykładzie obszaru  $\Omega$  (rys. 1).

Obszar  $\Omega$  można przedstawić w postaci iloczynu

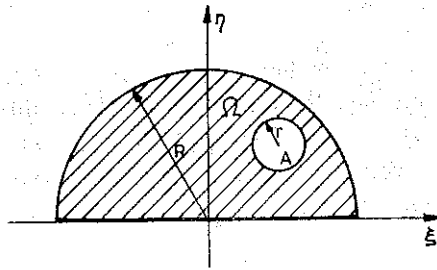
$$(2.7) \quad \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3,$$

gdzie

$$\Omega_i = \{(\xi, \eta) \in R^2 : \omega_i \geq 0\}, \quad i=1, 2, 3.$$

Tablica 1

znak			
$x$	$y$	$x \wedge y$	$x \vee y$
+	+	+	+
+	-	-	+
-	+	-	+
-	-	-	-



Rys. 1.  $r=0, 1, R=1, 0, A(0,5; 0,5)$

Niech w poszczególnych podobszarach składowych będzie:

$$\omega_1 = \eta, \quad \omega_2 = 1 - \xi^2 - \eta^2, \quad \omega_3 = (\xi - 0,5)^2 + (\eta - 0,5)^2 - 0,01.$$

Ponieważ zachodzi warunek (2.7), więc

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3.$$

Ostatecznie otrzymuje się zatem

$$\omega = \eta + 1 - \xi^2 - \eta^2 + (\xi - 0,5)^2 + (\eta - 0,5)^2 - 0,01 - \sqrt{\eta^2 + (1 - \xi^2 - \eta^2)^2} + \\ + \sqrt{[\eta + 1 - \xi^2 - \eta^2 - \sqrt{\eta^2 + (1 - \xi^2 - \eta^2)^2}]^2 + [(\xi - 0,5)^2 + (\eta - 0,5)^2 - 0,01]^2}.$$

Funkcja  $\varphi$  uwzględniająca warunki brzegowe jest tworzona na ich podstawie i w istotny sposób wpływa na postać struktury rozwiązania. Przykładowo dla płyty utwierdzonej wzdłuż całego brzegu (warunki jednorodne, stąd nie występuje jawnie funkcja  $\varphi$ ) struktura rozwiązania ma postać

$$w_s = \psi \omega_N^2,$$

gdzie

$$\omega_N = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (\text{grad } \omega)^2}}$$

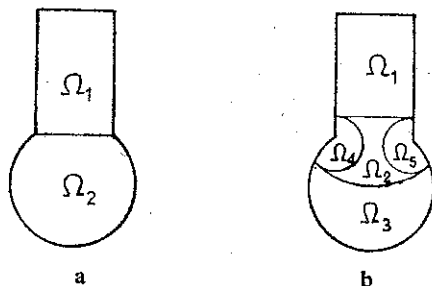
jest znormalizowaną funkcją  $\omega$ , tj. taką, dla której

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 1.$$

Tworzenie struktury rozwiązania jest etapem analitycznym MRF i może być wykonywane ręcznie lub automatycznie na drodze operacji symbolicznych. Kolejnym etapem jest wybór konkretnej funkcji swobodnej w strukturze rozwiązania. Dokonuje się tego numerycznie, np. tak samo jak w globalnej metodzie wariacyjnej, tj. przez minimalizację funkcjonału (1.2).

### 2.3. Metoda elementów globalnych

Obszar  $\Omega$  jest dzielony na kilka podobszarów (większych niż w MES, stąd nazwa metody). Podział wynika z kształtu obszaru (rys. 2a), przewidywanego przebiegu rozwiązania (rys. 2b), lub różnych cech fizycznych materiału [4].



Rys. 2

Funkcje aproksymujące przyjmowane są na każdym z podobszarów osobno jako kombinacje liniowe wielomianów lub innych funkcji. Funkcje bazowe nie muszą spełniać warunków brzegowych ani zgodności na wspólnych brzegach podobszarów. Niewiadome współczynniki kombinacji liniowej funkcji bazowych oblicza się minimalizując odpowiedni funkcjonał (wzór (2.9)). Jego postać zapewnia, że ostateczne rozwiązanie spełnia warunki brzegowe i warunki zgodności. Przykładowo budowę omawianego funkcjonału odpowiadającego zagadnieniu (2.8) dla obszaru  $R$  podzielonego na dwa elementy globalne  $R_1, R_2$  przedstawia wzór (2.9) (na podstawie [4]).

Zagadnienie brzegowe:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & -\nabla A \nabla u_i + B u_i = g \quad \text{w } R_i, \\ & u_i(\bar{x}) = g_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in C_1 \cap \partial R_i, \\ & A \nabla u_i \bar{n}(\bar{x}) = \sigma u_i(\bar{x}) + g_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in C_2 \cap \partial R_i, \\ & u_1(\bar{x}) = u_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial R_1 \cap \partial R_2, \\ & (A \nabla u_1) \bar{n}_1(\bar{x}) = -(A \nabla u_2) \bar{n}_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial R_1 \cap \partial R_2, \end{aligned}$$

gdzie  $i=1, 2$ ,  $A$  oznacza macierz symetryczną dodatnio określoną,  $B$  funkcję dodatnią,  $\sigma \leq 0$ ,  $g, g_1, g_2$  znane funkcje,  $C_1 \cup C_2 = \partial R$ ,  $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ ,  $u_1, u_2$  niewiadome funkcje w  $R_1, R_2$ .

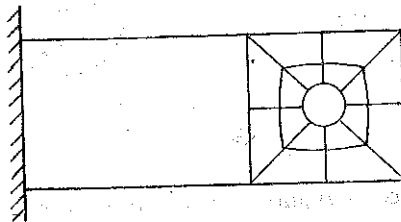
Odpowiedni funkcjonal ma postać

$$(2.9) \quad J(w_1, w_2) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{R_i} (\nabla w_i^T A \nabla w_i + B w_i^2 - 2g w_i) dx_1 dx_2 + \right. \\ \left. + 2 \int_{\partial R_1 \cap C_1} (g_1 - w_i) (A \nabla w_i \bar{n}) ds - 2 \int_{\partial R_1 \cap C_2} \left( \frac{\sigma}{2} w_i^2 + g_2 w_i \right) ds + \right. \\ \left. + \int_{\partial R_1 \cap \partial R_2} (w_2 - w_1) (A \nabla w_1 + A \nabla w_2) \bar{n} ds \right\},$$

Metoda łączy zalety metody elementów skończonych (łatwość uwzględniania obszaru o dowolnym kształcie) i globalnej metody wariacyjnej Ritza (mała liczba niewiadomych). Trudności może sprawiać odpowiedni podział obszaru na elementy i dobór funkcjonału do minimalizacji.

#### 2.4. Globalno-lokalna metoda elementów skończonych

Jest to metoda, która wykorzystuje aproksymację funkcji niewiadomej na części obszaru taką jak w MES, a na części jak przy klasycznej metodzie analitycznej z wprowadzeniem funkcji próbnych Ritza (rys. 3) [12].



Rys. 3. Funkcje Ritza na części obszaru i elementy na pozostałej części

Możliwe jest również wprowadzenie obu aproksymacji łącznie na całym obszarze (rys. 4) [12]. Na każdym z elementów, na jakie jest dzielony rozpatrywany obszar przyjmuje się następującą aproksymację rozwiązania [12]:

$$u_n = \sum_i R_i u_{ir} + \sum_j H_{nj} u_{jf},$$

gdzie  $R_i$  oznacza funkcję próbną metody Ritza,  $H_{nj}$  funkcję kształtu ( $n$ -tego elementu),  $u_{ir}$  niewiadome współczynniki związane z funkcjami Ritza oraz  $u_{jf}$  przemieszczenia węzłowe.

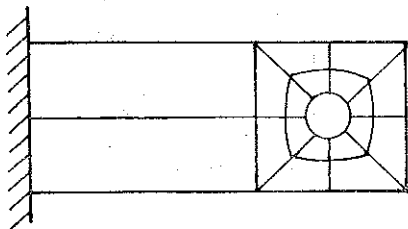
W  $k$ -tym węźle przemieszczenie  $u_n(x_k, y_k, z_k)$  oblicza się w następujący sposób [12]:

$$u_n(x_k, y_k, z_k) = \sum_i R_i(x_k, y_k, z_k) u_{ir} + u_{kf}.$$

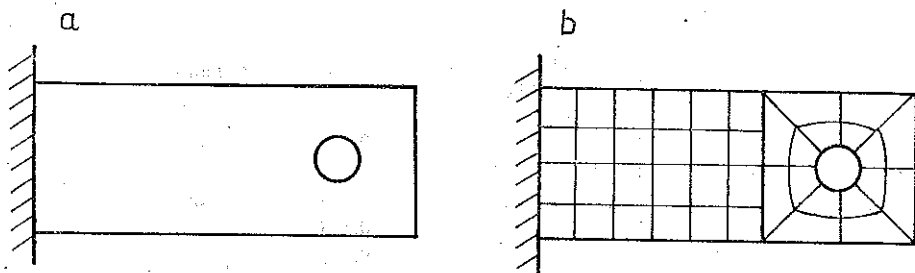
W szczególnych przypadkach metoda sprowadza się do metody Ritza albo MES (rys. 5) [12].

Zaletami GLMES są: funkcje  $R_i$  nie muszą spełniać warunków brzegowych, istnieje możliwość wykorzystania znanych rozwiązań (dla podobszarów) jako funkcji Ritza oraz zmniejszenie liczby niewiadomych.

Wady metody: konieczność indywidualnego traktowania każdego zadania i niezbadana efektywność.



Rys. 4. Funkcje Ritza i elementy skończone na całym obszarze



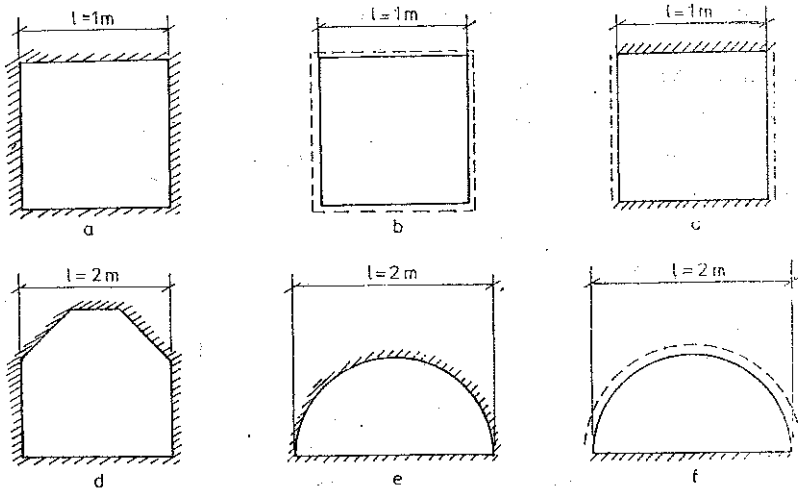
Rys. 5. a) Tylko funkcje Ritza, b) tylko elementy skończone

### 3. PORÓWNANIE METODY CAŁEK BRZEGOWYCH I $R$ -FUNKCJI

Spośród czterech krótko scharakteryzowanych metod analityczno-numerycznych wybrano dwie w pewnym sensie przeciwstawne: MCB i MRF i dokonano ich porównania na przykładzie analizy płyt dowolnego kształtu. Opracowano programy na komputer wykorzystujące obie metody. Za ich pomocą rozwiązano kilka płyt (rys. 6) obciążonych w sposób ciągły ( $q = \text{const}$ ). Uzyskane wyniki przedstawia tablica 2.

Możliwe jest uzyskanie bardziej dokładnych wyników lub zmniejszenie liczby wymaganych stopni swobody po udoskonaleniu operacji całkowania i różniczkowania oraz sposobu aproksymacji poszukiwanych funkcji (wyniki umieszczone w tablicy 2 zostały uzyskane przy najprostszej „schodkowej” aproksymacji funkcji niewiadomych w MCB).

Pewne porównanie MCB i MRF z powszechnie stosowaną metodą różnic skończonych (MRS) mogą stanowić wyniki zestawione w tablicy 3. Podane są w niej



Rys. 6

Tablica 2

Płyta	LSS	*Czas [sCPU] obliczeń	$\alpha [\times 10^{-2}]$	** Błąd [%]
a	48	6,3	0,127	0,8
b	48	6,3	0,410	1,0
c	56	8,7	0,195	1,6
d	30	8,1	0,188	2,4
e	26	7,6	0,210	—
f	36	8,5	0,362	—

LSS oznacza liczbę stopni swobody,

$\alpha = \frac{DW_{max}}{ql^4}$ , gdzie  $l$  jest wymiarem płyty zaznaczonym na rys. 1,  $W_{max}$  — maksymalnym ugięciem,

$D$  — sztywnością płyty

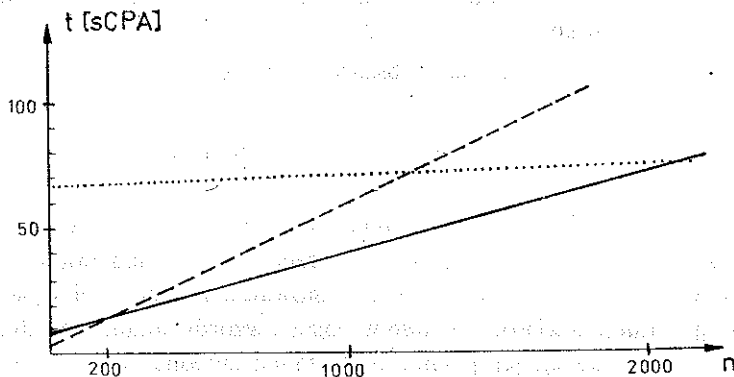
\* oznacza czas obliczeń na komputerze Cyber oraz \*\* błąd względny w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym.

Tablica 3

Płyta	Metoda	MRS	MCB	MRF
	a	—	40 (5,2)	40 (5,3)
b	120 (9,9)	40 (5,3)	—	—



liczba stopni swobody i czas obliczeń (w nawiasie) dla komputera Cyber 72 w sekundach CPU potrzebne do otrzymania wartości rozwiązania w środku płyty z błędem 2%.



Rys. 7.  $t$  oznacza czas obliczeń,  $n$  liczbę punktów, w których opracowuje się wyniki końcowe  
 ..... MRF, — — — MCB, ————— MRS

Na rys. 7 przedstawiono zależność czasu obliczeń od liczby punktów, w których poszukiwane jest rozwiązanie (opracowanie wyników) dla poszczególnych metod (liczby na osi poziomej należy traktować jedynie orientacyjnie).

Opierając się na zastosowaniu do analizy statycznej płyt, wymieniono poniżej zalety i wady MCB i MRF.

Zalety MCB są następujące:

- 1) zmniejszenie wymiaru zagadnienia o jeden,
- 2) stosunkowo szybkie osiągnięcie etapu obliczeń, na którym znane jest rozwiązanie w sposób formalny (wyrażone przez wzór całkowy), co jest istotne, gdy wystarcza znajomość rozwiązania w niewielu punktach.

Wady MCB są następujące:

- 1) konieczność znajomości rozwiązania podstawowego,
- 2) stosunkowo długi czas obliczeń rozwiązania w konkretnym punkcie, gdy znane są już wszelkie niewiadome na brzegu; związane jest to z koniecznością obliczenia za każdym razem całek krzywoliniowych na brzegu obszaru.

Do zalet MRF można zaliczyć:

- 1) łatwość uwzględnienia dowolnego obszaru,
- 2) możliwość dokładnego spełnienia dowolnych warunków brzegowych,
- 3) mała liczba stopni swobody potrzebnych do rozwiązania zagadnienia z wystarczającą dokładnością,
- 4) małe zapotrzebowanie na pamięć komputera,
- 5) możliwość rozwiązywania zagadnień z obszarem nieograniczonym,
- 6) łatwość zastosowania operacji symbolicznych (np. różniczkowanie symboliczne).

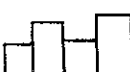

Wady MRF to głównie:

- 1) skomplikowana postać struktury rozwiązania i związane z tym żmudne operacje,
- 2) stosunkowo długi czas obliczeń zwłaszcza przy zadaniach, które dla innych metod nie wymagają wielu stopni swobody,
- 3) znaczny wpływ sposobu opisu obszaru na końcowy wynik obliczeń.

#### 4. ZASTOSOWANIE MODYFIKACJI MCB I MRF

Zastosowanie operacji symbolicznych na komputer [7] pozwala na uniknięcie kłopotliwych operacji manualnych przy tworzeniu i różniczkowaniu struktury rozwiązania w MRF, przy jednoczesnym zachowaniu dokładności obliczeń. Odpowiedni program umożliwia otrzymanie w postaci wzorów analitycznych struktury rozwiązania i wymaganych jej pochodnych. Przedstawione w p. 3 wady MRF wskazują, że nie jest to na razie uniwersalna metoda numeryczna i wymaga dalszego udoskonalenia.

Tablica 4. (plyta utwierdzona a)

Aproksymacja	Metoda rozwiązywania układu równań całkowych	*	Liczba stopni swobody		
			16	24	32
 schodkowa	kolokacji	i	36	11	5,5
		ii	35	6,1	3,0
		iii	0,7	1,3	2,2
 różnicowa	kolokacji	i	20	0,82	0,75
		ii	46	1,3	2,5
		iii	1,1	2,9	4,0
	minimum kwadratu błędu	i	82	5,4	2,0
		ii	32	2,5	3,5
		iii	8,5	33,0	54,0

i — błąd względny ugięcia w środku [%]

ii — błąd względny momentu w środku [%]

iii — czas uzyskania rozwiązania ugięcia w jednym punkcie na komputer Cyber 72 [s CPU.]



Dla polepszenia aproksymacji funkcji niewiadomych w MCB zastosowano aproksymację wyższego stopnia. Po dokonaniu podziału brzegu na kilka odcinków, na każdym z nich przyjęto  $N$  punktów (węzłów)  $P_1, P_2, \dots, P_N$ , w których poszukiwane są wartości niewiadomych funkcji brzegowych. Wartość funkcji ( $f_0$ ) w do-

wolnym punkcie brzegu  $P_0$  jest aproksymowana na podstawie wartości węzłowych  $(f_1, f_2, \dots, f_N)$  odcinka, do którego należy punkt  $P_0$ , przez minimalizację funkcji  $B$  [8]:

$$(4.1) \quad B = \sum_{i=1}^n \left( f_0 + s_i f'_0 + \frac{1}{2} s_i^2 f''_0 - f_i \right) \frac{1}{s_i},$$

gdzie  $s_i$  oznacza odległość punktu  $P_0$  od  $P_i$  (wzdłuż brzegu). Zastosowanie takiej aproksymacji w zdecydowany sposób polepsza dokładność rozwiązania przy takiej samej liczbie stopni swobody (tablice 4 i 5). Często stosowana metoda kolokacji do rozwiązywania układu równań całkowych MCB prowadzi do niesymetrycznego układu równań algebraicznych [1 i 3]. W tablicach 4 i 5 przedstawione są wyniki obliczeń uzyskane specjalnie opracowanym programem, który rozwiązuje układ równań całkowych MCB z warunku minimum kwadratu błędu. Otrzymuje się wtedy symetryczny układ równań algebraicznych, którego rozwiązanie jest szybsze. Niemniej konieczność podwójnego całkowania powoduje wydłużenie czasu tworzenia tych równań. W tablicach 4 i 5 umieszczono wyniki obliczeń odpowiednio dla płyty kwadratowej utwierdzonej i swobodnie podpartej. Zawierają one błąd względny obliczeń dla ugięcia i momentów oraz czas uzyskania rozwiązania w jednym punkcie przed i po wprowadzeniu omówionych modyfikacji.

Tablica 5. (płyta swobodnie podparta b)

Aproksymacja	Metoda rozwiązywania układu równań całkowych	*	Liczba stopni swobody		
			16	24	32
 schodkowa	kolokacji	i	27	8,1	4,4
		ii	20	9,3	5,5
		iii	0,7	1,3	2,2
 różnicowa	kolokacji	i	30	-0,25	0,25
		ii	18,7	1,5	1,8
		iii	1,1	3,6	4,6
	minimum kwadratu błędu	i	34	-0,5	-0,25
		ii	41	2,3	3,7
		iii	8,4	55,0	41,0

Wartości momentów były obliczone wzorem różnicowym ( $h=0,01$  długości boku płyty). W przypadku MCB istnieje możliwość wyprowadzenia wzoru analitycznego na moment w dowolnym punkcie płyty analogicznego do wzoru (2.2).

Porównanie wyników obliczeń za pomocą wzoru różnicowego i analitycznego, wskazujące na zgodność tych wyników, zamieszczono w tablicy 6. Zawiera ona błąd względny otrzymanych wartości momentów dla płyty swobodnie podpartej, aproksymacji różnicowej i metody kolokacji.

Przedstawione przykładowe zastosowania oraz wyniki obliczeń podane w literaturze (dla metod MCB, MRF, MEG, GLMES) dowodzą, że metody analityczno-numeryczne mogą być skutecznym narzędziem efektywnego rozwiązywania wielu zagadnień brzegowych i mogą być wykorzystywane obok powszechnie stosowanych metod elementów i różnic skończonych.

Tablica 6

Liczba stopni swobody	16	24	32
	Wzór		
różnicowy	18,7%	1,5%	1,8%
analityczny	18,7%	1,3%	1,9%

Wyniki te wskazują również na celowość prowadzenia dalszych prac badawczych ukierunkowanych na rozwijanie tych metod. W MCB warto położyć nacisk na polepszenie aproksymacji warunków brzegowych i rozwiązania na brzegu, w MRF zaś na rozwinięcie oprogramowania symbolicznego oraz na łączenie metody w drugim etapie z różnymi metodami, np. MRS w sformułowaniu wariacyjnym.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. C. A. BREBBIA, *The boundary element method for engineering*, Pentech Press, London 1978.
2. W. CECOT, J. ORKISZ, *Analityczno-numeryczna analiza płyt dowolnego kształtu*, XXVII Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB Krynica 1981.
3. T. A. CRUSE, F. J. RIZZO, *Boundary integral equation method*, The American Society of Mechanical Engineering, New York 1975.
4. L. M. DELVES, C. A. HALL, *An implicit matching principle for global element calculations*, J. Inst. Maths. Applies, 23, 223-234, 1979.
5. *Developments in boundary element methods -1*, P. K. BANERJEE and R. BUTTERFIELD [ed.], Applied Science Publishers LTD, London 1979.
6. M. KORZENIOWSKI, J. ORKISZ, *Zastosowanie metody R-funkcji do automatycznej generacji charakterystyk elementów skończonych dowolnego kształtu*, V Konferencja MKMK, Karpacz, 1, 235-243, 1981.
7. J. KUCWAJ, J. ORKISZ, *Zastosowanie metody R-funkcji do zagadnień mechaniki, wersja komputerowa*, XXII Pols. Konf. MCS, Goruń 1980.
8. T. LISZKA, J. ORKISZ, *The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics*, C and S., 11, 83-95, 1980.
9. Н. И. РВАЧЕВ, Л. В. КУРПА, Л. А. УЧИШВИЛН, *Метод Р-функции в задачах сложной формы*, Наукова думка, Киев 1973.
10. В. Л. РВАЧЕВ, А. П. СЛЕСАРЕНКО, *Алгебро-логические и проекционные методы в задачах пластин сложной формы*, Наукова думка, Киев 1973.
11. M. D. SNYDAR, T. A. CRUSE, *Boundary integral equation analysis of cracked anisotropic plates*, Intern. J. Fracture, 11, 315-328, 1975.
12. E. L. WILSON, *Special numerical and computer techniques for the analysis of finite element systems*, U. S. — Germany Symposium on Finite Element Methods, 1976.

13. B. C. WU, N. J. ALTIERO, *A boundary integral method applied to plates of arbitrary boundary conditions*; C. and S., 10, 703-709, 1979.
14. O. C. ZIENKIEWICZ, D. W. KELLY, P. BETTES, *Mariage'a la mode. The best of both worlds (Finite elements and boundary integral)*, Inter. Symp. on Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Science, Versailles (Francja) 1977.

### Резюме

#### СРАВНЕНИЕ ИЗБРАННЫХ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ НА ПРИМЕРЕ СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПЛАСТИН ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В статье приведены и сравниваются результаты двух, до некоторой степени противоположных численно-аналитических методов. Представлено влияние примененных модификаций на результаты расчетов. Применялись следующие методы: граничных интегральных уравнений МСВ (Boundary Integral Equation Method) и метод  $R$ -функции MFR (Функции Рвачева). Кроме того, вкrajце охарактеризованы два других аналитических численных метода решения краевых задач. Это метод глобальный элементов (L. M. Delves) и глобально-локальный метод конечных элементов (E. L. Wilson). Численно-аналитические методы позволяют уменьшить число неизвестных при дискретизации (аналитический этап) при одновременной возможности решения задач с областью произвольной формы (численный этап). Применялись следующие модификации; симметризация системы алгебраических уравнений и исправление аппроксимации функции неизвестных в МСВ, а также символическое образование и дифференцирование  $R$ -функций. Получение и известные из литературы результаты доказывают, что численно-аналитические методы являются эффективным инструментом для решения многих краевых задач и могут использоваться наряду с повсеместно применяемыми методами конечных элементов и конечно-разностными методами.

### SUMMARY

#### COMPARISON OF CERTAIN ANALYTICAL-NUMERICAL METHODS ON THE EXAMPLE OF STATICAL ANALYSIS OF PLATES OF ARBITRARY SHAPE

The paper presents the results of analysis of plates obtained by means of two different analytical-numerical methods. The methods applied are the Boundary Integral Equation Method (BIEM), and the  $R$ -Function Method (RFM, the Rvachev Function Method). Two other methods are briefly discussed: the Global Element Method (L. M. Delves), and the Global-Local Finite Element Method (E. L. Wilson). The analytical-numerical methods allow for the reduction of the number of unknowns in the process of discretization (analytical stage) and for the possibility of considering the regions of arbitrary form (numerical stage). The modifications introduced consist in the symmetrization of the set of algebraic equations, in improving the approximation of the unknown functions in BIEM and in the symbolic notation and differentiation of the  $R$ -functions. Comparison of the results with the solutions known from the literature proves the analytical-numerical methods to be an effective tool in solving numerous boundary-value problems.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lipca 1983 r.