

WYZNACZENIE RÓŻNICY NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH NA PODSTAWIE OBRAZU IZOCHROM

RYSZARD WOJNAR (WARSZAWA)

Zwraca się uwagę na to, że znajomość obrazu izochrom a) $m(x, y)$ nieznanego pola naprężeń, b) $m_0(x, y)$ jakiegoś znanego pola naprężeń, c) $m_1(x, y)$ pola będącego superpozycją pól a i b — pozwala wyznaczyć składowe dewiatorowe $\sigma_x - \sigma_y$ oraz τ_{xy} nieznanego pola naprężeń, a więc i kierunki główne tego nieznanego pola. Powyższe spostrzeżenie ilustrowane jest przykładem doświadczalnym.

1. WSTĘP

W klasycznej elastooptyce celem wyznaczenia pola naprężenia korzysta się z dwu rodzajów danych doświadczalnych, obrazu izochrom i obrazu izoklin.

W przypadku płaskiego stanu naprężenia σ o składowych $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, którym zajmować się będziemy w dalszym ciągu, oba te obrazy pozwalają wyznaczyć różnicę naprężeń normalnych oraz naprężenie styczne (por. Dodatek),

$$(1.1) \quad s_x = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y), \quad s_{xy} = \tau_{xy}.$$

Mianowicie

$$(1.2) \quad s_x = \frac{1}{2} Km \cos 2\varphi, \quad s_{xy} = \frac{1}{2} Km \sin 2\varphi,$$

przy czym m oznacza rząd izochromy w danym punkcie (x, y) modelu, φ wartość izokliny w tymże punkcie oraz K współczynnik skali zwany stałą modelową.

Poniżej podany jest inny sposób wyznaczenia składowych s_x, s_{xy} . Mianowicie, zamiast posługiwać się obrazem izoklin, wprowadzamy do modelu elastooptycznego dodatkowe pole izochrom, wywołane przez znane pole naprężeń. W ten sposób w pewnym stopniu nawiązujemy do znanej idei DRUCKERA [1], który celem unaocznienia zjawiska elastooptycznego w zginiętej płycie zaproponował wykonywanie jej modelu z materiału, w którym wprowadzono wstępnie efekt elastooptyczny.

Takie podejście ma tę zaletę, że znajdowane doświadczalnie pole izochrom jest na ogół znacznie wyraźniejsze od pola izoklin. Ponadto do otrzymania pola $\varphi(x, y)$ potrzeba uzyskać szereg obrazów przy różnych ustawieniach polaroidów względem modelu, co w niektórych zadaniach, np. zależnych od czasu, jest utrudnione. W zadaniu przestrzennym, rozwiązywanym metodą warstwy wklejonej możliwa jest rejestracja obrazu izochrom w płaszczyźnie wklejki, natomiast rejestracja izoklin jest niemożliwa: czułość ośrodka, w który wklejona została warstwa elastooptyczna jest na tyle mała, że nie zakłóca obrazu izochrom powstałego w warstwie, na tyle jednak duża, że zakłóca obraz izoklin.

Celem uniknięcia korzystania z obrazu izoklin opracowano metody obliczeniowe i doświadczalne, pozwalające na podstawie samego obrazu izochrom wyznaczyć jednocześnie wszystkie składowe tensora σ , a zatem również jego składowe dewiatorowe. Są to metody dość trudne. Metody obliczeniowe wymagają na ogół numerycznego rozwiązywania układu równań różniczkowych (lub przynajmniej jednego równania różniczkowego, jeśli suma $\sigma_x + \sigma_y$ jest znana [2]). Metody doświadczalne wymagają wykonania perforacji [3, 4 i 5] rezygnują zatem z obserwacji polowej i w jakiejś mierze zniekształcają model.

Rozważmy zatem w tym samym ośrodku dwa obrazy izochrom: $m = m(x, y)$ oraz $m_1 = m_1(x, y)$. Obraz $m(x, y)$ wywołany jest przez badane, nieznanne pole naprężeń σ i zgodnie z równaniem (1.2) wiąże się z nim wzorem

$$(1.3) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (Km)^2.$$

Obraz $m_1(x, y)$ wywołany jest łącznym działaniem nieznanego pola naprężeń σ i znanego pola naprężeń σ^0 ; z tymi polami wiąże się wzorem

$$(1.4) \quad (\sigma_x + \sigma_x^0 - \sigma_y - \sigma_y^0)^2 + 4(\tau_{xy}^0 + \tau_{xy})^2 = (Km_1)^2.$$

Znajomość obu obrazów izochrom $m(x, y)$, $m_1(x, y)$ oraz pola σ^0 pozwala wyznaczyć składowe dewiatorowe (1.1).

2. PODSTAWY METODY

Wprowadzając oznaczenia

$$(2.1) \quad Km = M, \quad Km_1 = M_1,$$

możemy związki (1.3)—(1.4) pisać w postaci

$$(2.2) \quad 4(s_x^2 + s_{xy}^2) = M^2,$$

$$(2.3) \quad 4[(s_x + s_x^0)^2 + (s_{xy} + s_{xy}^0)^2] = M_1^2.$$

Ponadto ze składowych znanego pola σ^0 możemy utworzyć wyrażenie analogiczne

$$(2.4) \quad 4(s_x^{02} + s_{xy}^{02}) = M_0^2.$$

Korzystając z (2.2) i (2.4) przedstawimy (2.3) w postaci

$$(2.5) \quad s_x s_x^0 + s_{xy} s_{xy}^0 = A,$$

przy czym oznaczyliśmy dla skrótów

$$(2.6) \quad A = \frac{1}{8} (M_1^2 - M^2 - M_0^2).$$

Ze związku (2.2) mamy

$$(2.7) \quad s_{xy} = \pm \sqrt{(M/2)^2 - s_x^2},$$

przy czym znak po prawej stronie nie jest określony a priori. Po wstawieniu (2.7) do (2.5) dostajemy

$$(2.8) \quad s_x s_x^0 + (\pm) \sqrt{(M/2)^2 - s_x^2} s_{xy}^0 = A,$$

skąd wynika równanie kwadratowe na s_x :

$$(2.9) \quad (M_0/2)^2 s_x^2 - 2A s_x^0 s_x + A^2 - \left(\frac{1}{2} M s_{xy}^0\right)^2 = 0$$

W zapisie współczynnika przy s_x^2 skorzystaliśmy z tego, że zgodnie z (2.4)

$$(2.10) \quad s_x^{02} + s_{xy}^{02} = (M_0/2)^2.$$

Wyróżnik równania (2.9) wynosi

$$D = 4s_{xy}^{02} \left[\left(\frac{1}{2} M_0 \frac{1}{2} M \right)^2 - A^2 \right],$$

pierwiastek zaś

$$(2.11) \quad s_x = \left[A s_x^0 \pm s_{xy}^0 \sqrt{\left(\frac{1}{4} M_0 M \right)^2 - A^2} \right] / (M_0/2)^2$$

Wprowadzone powyżej dodatkowe pole σ^0 jest w zasadzie dowolne.

Wzór obliczeniowy na składową s_x upraszcza się, jeśli σ^0 ma tylko jedną składową. Dogodne jest więc pole w postaci

$$(2.12) \quad \sigma^0 = \begin{vmatrix} \sigma_x^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \sigma_x^0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wtedy równanie (2.6) redukuje się do równania

$$s_x s_x^0 = A,$$

przy czym zgodnie z (2.12) i (1.1)

$$(2.13) \quad s_x^0 = \frac{1}{2} \sigma_x^0.$$

Stąd w końcu zamiast (2.11) mamy

$$(2.14) \quad s_x = \frac{A}{s_x^0}.$$

Wzór jest prostszy i nie ma w nim potrzeby wyboru znaku przed pierwiastkiem.

Jeśli zastąpić składową s_x przez składowe $\sigma_x - \sigma_y$ i wielkość A przez wartości M, M_0, M_1 , to zamiast (2.14) znajdziemy

$$(2.15) \quad \sigma_x - \sigma_y = \frac{1}{2} \frac{M_1^2 - M^2 - M_0^2}{\sigma_x^0}$$

lub

$$(2.16) \quad \sigma_x - \sigma_y = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1^2 - M^2}{\sigma_x^0} - \sigma_x^0 \right),$$

ponieważ na mocy (2.4) i (2.12)

$$(2.17) \quad \sigma_x^0 = (\text{sgn } \sigma_x^0) \sqrt{M_0^2}.$$

Zadanie prowadzi więc do formuły algebraicznej.

3. REALIZACJA METODY

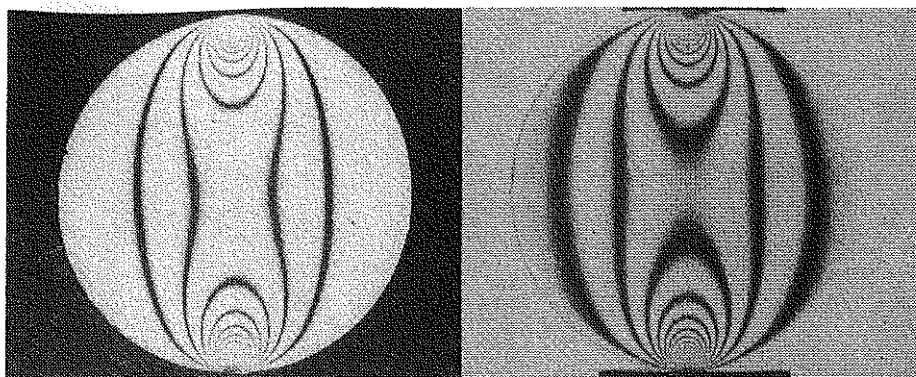
Aby uzyskać pole o postaci (2.12) w modelach o dowolnym kształcie, skorzystaliśmy z metody zamrażania naprężeń. Prostokątną płytkę materiału elastoptycznego przed wykonaniem z niej modelu obciążamy siłami odśrodkowymi w wirówce w temperaturze zamrażania. Oczywiście możemy stosować każdy inny sposób wprowadzenia efektu elastoptycznego. Ważne jest jednak, aby obraz elastoptyczny m_0 wywołany był przez znane pole naprężeń σ^0 . Jeśli promień wirowania jest znacznie większy od wysokości płytki, to wytwarza się w niej w dobrym przybliżeniu jednorodne pole sił masowych, od którego pochodzące pole σ^0 jest postaci (2.12). Przy tym składowa σ_x^0 narasta liniowo wraz z odległością od górnej krawędzi modelu (kierunek ten oznaczamy tu przez x). Również i rząd izochromy narasta liniowo z x , gdyż przy założeniu (2.12)

$$(3.1) \quad m_0 = \frac{M_0}{K} = \frac{|\sigma_x^0|}{K},$$

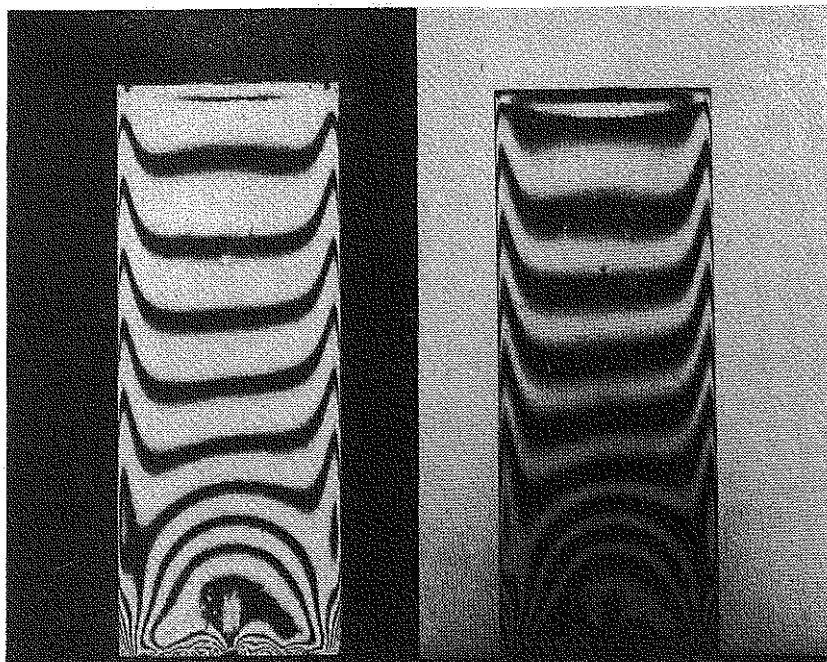
a same izochromy tworzą charakterystyczną drabinkę. Z płytki takiej, po utrwaleniu w niej efektu elastoptycznego, wycinamy dopiero model elastoptyczny.

Poprawność metody sprawdziliśmy na przykładzie dysku kołowego obciążonego wzdłuż średnicy. Dysk wykonany z elastoptycznej żywicy epoksydowej o średnicy 3,5 cm i grubości 1 cm, o stałej modelowej $K_A = 12850 \text{ N/m}$ ($= 13,1 \text{ kG/cm}$), obciążony został siłą $P = 392 \text{ N}$ ($= 40 \text{ kG}$). Klasyczny obraz izochrom $m(x, y)$ w tym dysku widoczny jest na rys. 1.

Płytkę z tej samej żywicy poddaliśmy wirowaniu w temperaturze zamrażania utrwalając w niej efekt elastoptyczny pokazany na rys. 2. Widać, że pole naprężeń, przynajmniej w górnej i przysiowej części modelu, dobrze jest opisane wzorem (2.12), przy czym nieznikająca składowa narasta liniowo z odległością od górnej krawędzi. W pobliżu bocznych krawędzi płytki występują zaburzenia pola wywołane efektem brzegowym; z obszarów tych

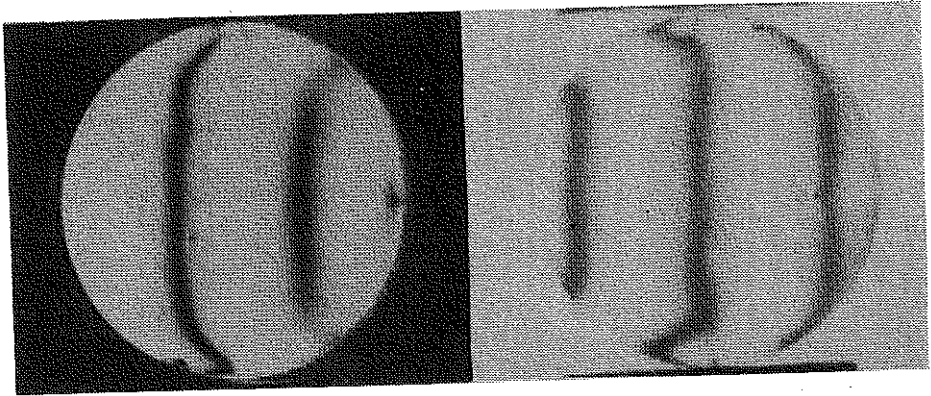


Rys. 1. Izochromy całkowite i półowkowe w tarczy kołowej ściskanej wzdłuż średnicy

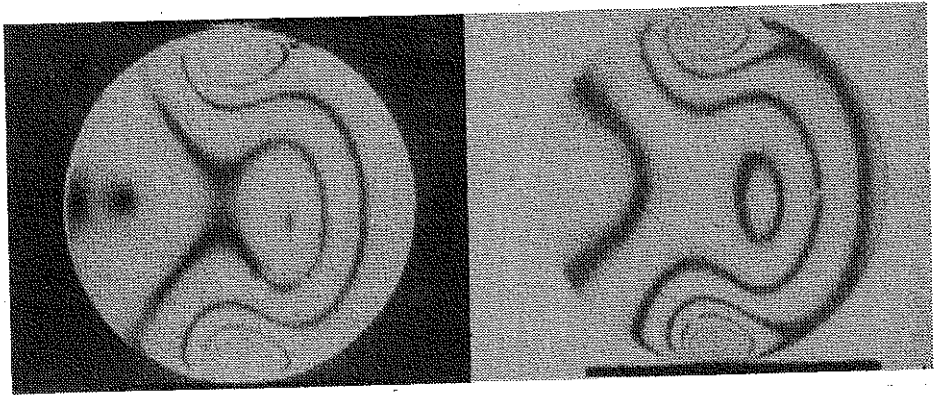


Rys. 2. Izochromy całkowite i półowkowe zamrożone w płycie prostokątnej w polu sił odśrodkowych

jednak nie korzystaliśmy w naszych obliczeniach. Stała modelowa płytki w temperaturze pokojowej wynosiła $K_B = 12650 \text{ N/m}$ ($= 12,9 \text{ kG/cm}$) i pokrywała się w granicach błędów pomiarowych ze stałą modelową K_A . Dlatego w dalszym ciągu przyjęliśmy dla obu modeli $K_A = K_B = K = 12750 \text{ N/m}$ ($= 13 \text{ kG/cm}$). W górnej części płytki wycięliśmy tarczę kołową o takich samych wymiarach jak poprzednio. Obraz izochrom wstępnych $m_0(x, y)$ w tej tarczy pokazuje rys. 3. Ponieważ pole σ^0 jest w tym wypadku



Rys. 3. Wstępny obraz izochrom w tarczy kołowej



Rys. 4. Obraz izochrom w tarczy kołowej z rys. 3 po obciążeniu jej wzdłuż średnicy

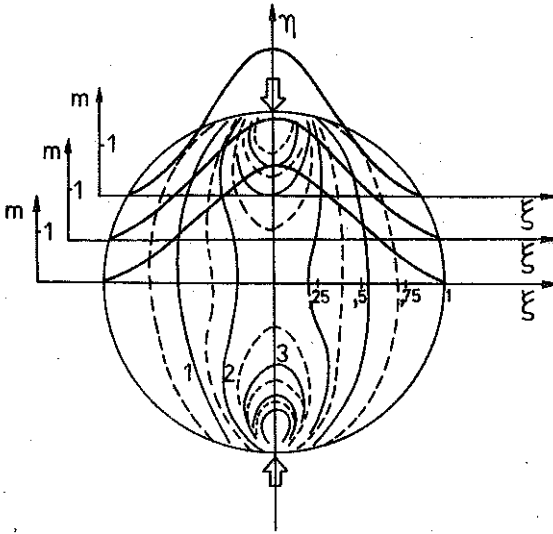
polem ściskającym, przeto $\sigma_x^0/K = -m_0$. Tak przygotowaną tarczę poddaliśmy w temperaturze pokojowej również obciążeniu $P = 392 \text{ N}$ ($= 40 \text{ kG}$), otrzymując obraz $m_1(x, y)$ widoczny na rys. 4.

Zbiorne wykresy izochrom otrzymane w poszczególnych przypadkach widzimy na rys. 5-7.

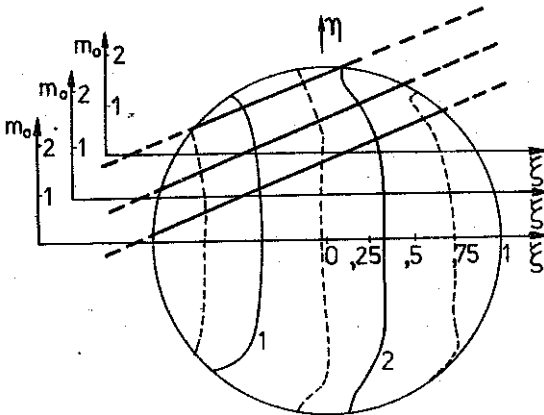
W pierwszym rzędzie sprawdziliśmy poprawność otrzymanych obrazów izochrom: otóż na osi symetrii, gdzie składowa τ_{xy} znika, $\sigma_x - \sigma_y = M$, czyli stosując wzór (2.17) powinniśmy określić wartość M . Sytuację obrazuje Tablica 1. Widzimy, że w dobrym przybliżeniu zachodzi zgodność wiersza pierwszego tablicy z wierszem czwartym. W wierszu piątym tablicy dane są wartości rozwiązania teoretycznego

$$(3.2) \quad \sigma_x - \sigma_y = \frac{8P}{\pi t d} \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2},$$

gdzie $P = 40 \text{ kG}$, $t = 1 \text{ cm}$, $d = 2R = 3,5 \text{ cm}$ oraz $\xi = x/R$, zgadzające się również z wynikami doświadczenia.



Rys. 5. Wykres izochrom na podstawie rys. 1; pogrubionymi liniami ciągłymi zaznaczono przebieg izochrom w przekrojach $\eta = 0, 1/4, 1/2$. Uwaga ta dotyczy również rys. 6 i 7

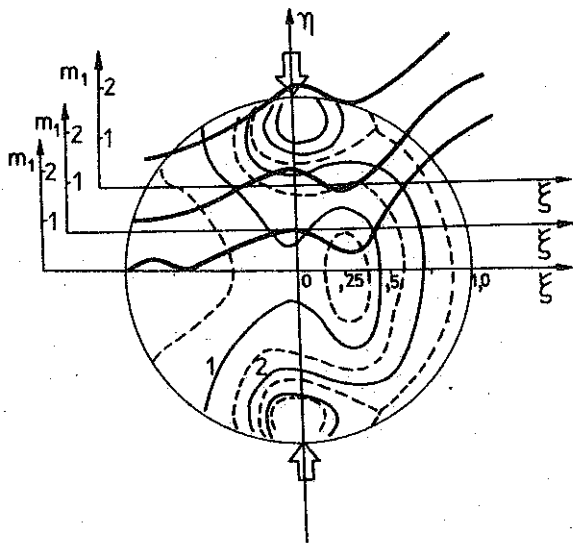


Rys. 6. Wykres izochrom na podstawie rys. 3

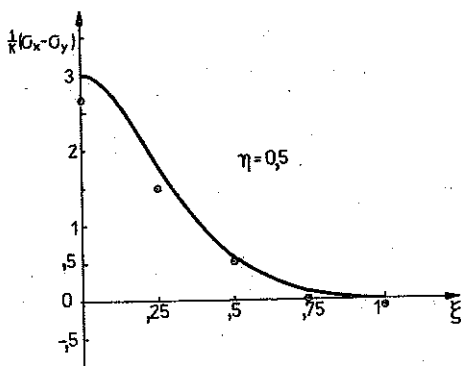
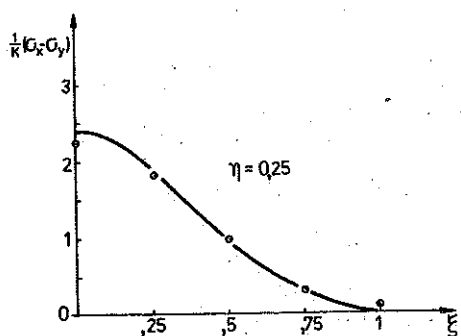
Następnie w wybranych przekrojach $\eta = 1/4, 1/2$ wyznaczyliśmy korzystając ze wzoru (2.17) składowe $\sigma_x - \sigma_y$ i porównaliśmy je z rozwiązaniem teoretycznym

$$(3.3) \quad \sigma_x - \sigma_y = \frac{4P}{\pi t d} \left\{ \frac{(1-\eta) [(1-\eta)^2 - \xi^2]}{[(1-\eta)^2 + \xi^2]^2} + \frac{(1+\eta) [(1+\eta)^2 - \xi^2]}{[(1+\eta)^2 + \xi^2]^2} \right\}$$

Wyniki są zamieszczone w Tablicach 2 oraz 3 a ponadto na rys. 8. Widzimy dobrą zgodność wyników doświadczalnych i teoretycznych, co świadczy o użyteczności zaproponowanej metody. Błędy otrzymanego rozwiązania doświadczalnego w porównaniu z rozwiązaniem teoretycznym są rzędu 10% i mają swe źródło w określeniu rzędu izochromy.



Rys. 7. Wykres izochrom na podstawie rys. 4



Rys. 8. Porównanie różnicy $(\sigma_x - \sigma_y)/K$ wyliczonych według wzoru (2.17) (kółeczka) z przebiegiem teoretycznym (linia ciągła)

Tablica 1, $\eta = 0$

ξ	0	0,25	0,5	0,75	1,0
m	2,3	1,9	1,15	0,42	0
m_1	0,9	0,3	1,2	2,2	2,9
$\sigma_x^0 = -m_0$	-1,6	-1,92	-2,28	-2,6	-2,95
$\frac{1}{K}(\sigma_x - \sigma_y)_{\text{exp}}$	2,2	1,9	1,11	0,4	0
$\frac{1}{K}(\sigma_x - \sigma_y)_{\text{teor}}$	2,24	1,86	1,07	0,40	0

Tablica 2, $\eta = 0,25$

ξ	0	0,25	0,5	0,75	0,97
m	2,4	1,95	1,05	3,5	0
m_1	1,1	0,7	1,4	2,3	2,8
$\sigma_x^0 = -m_0$	-1,55	-1,9	-2,3	-2,6	-2,9
$\frac{1}{K}(\sigma_x - \sigma_y)_{\text{exp}}$	2,24	1,82	0,96	0,3	0,1
$\frac{1}{K}(\sigma_x - \sigma_y)_{\text{teor}}$	2,39	1,87	0,96	0,32	0

Tablica 3, $\eta = 0,5$

ξ	0	0,25	0,5	0,75	0,87
m	3,0	2,1	0,9	0,2	0
m_1	1,85	1,55	1,95	2,6	2,9
$\sigma_x^0 = -m_0$	-1,55	-1,9	-2,3	-2,6	-2,8
$\frac{1}{K}(\sigma_x - \sigma_y)_{\text{exp}}$	2,63	1,48	0,5	0,01	-0,1
$\frac{1}{K}(\sigma_x - \sigma_y)_{\text{teor}}$	2,98	1,76	0,54	0,09	0

Uwaga: $(\sigma_x - \sigma_y)_{\text{exp}}$ wyliczono wg wzoru (2.17), a $(\sigma_x - \sigma_y)_{\text{teor}}$ wg (3.3)

4. DYSKUSJA

Widzimy, że pierwotny obraz elastoptyczny m_0 działa jak operator projekcji, który z niezmiennika (1.3) wydziela poszczególne składowe s . Wydzielenie to jest możliwe dzięki nieliniowej zależności s od m . Ponieważ przy wyprowadzeniu podanych zależności korzystaliśmy tylko z geometrycznych własności tensora σ , jakimi są w rzeczywistości związki typu (1.3), to powyższa metoda może mieć zastosowanie zarówno w zadaniach dynamicznych jak i w zadaniach przestrzennych. W tych ostatnich składowe σ należy zastąpić przez naprężenia wtórne [6]. Warto spostrzec, że pierwotny efekt elastoptyczny pełni rolę powierzchniowego czujnika elastoptycznego oraz na to, że wstępny efekt elastoptyczny, którego na ogół, gdy jest niekontrolowany, staramy się unikać, okazał się tutaj pożyteczny.

Przy okazji warto zwrócić uwagę na to, że zaproponowana metoda może również służyć do wyznaczenia nieznanego pola naprężeń wstępnych, gdy dysponujemy jego obrazem elastoptycznym M oraz obrazem zmodyfikowanym M_1 przez przyłożone z zewnątrz znane pole naprężeń σ^0 .

Zauważmy jeszcze, że jeśli w wiązce światła w polaryskopie ustawić jedną za drugą dwie płytki, jedną ze stanem naprężenia σ a drugą ze stanem σ^0 , to wypadkowy obraz elastoptyczny będzie różny od obrazu otrzymanego metodą opisaną w tekście. Mianowicie w wypadku superpozycji naprężeń w jednym modelu rozkład natężenia światła zgodnie z (2.3) i (1.2) oraz z definicją izochromy opisany jest wzorem

$$(4.1) \quad I_1 = I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi}{K} M_1 \right) = \\ = I_0 \sin^2 \left[\frac{\pi}{K} \sqrt{(M + M_0)^2 - 4MM_0 \sin^2(\varphi - \varphi_0)} \right],$$

w przypadku zaś nałożenia na siebie płytek (jednej ze stanem σ z drugiej σ^0) opisany jest wzorem

$$(4.2) \quad I_2 = I_0 \left\{ \sin^2 \left[\frac{\pi}{K} (M + M_0) \right] - \sin 2 \frac{\pi}{K} M_0 \sin^2 2\pi M \sin^2(\varphi_0 - \varphi) \right\}.$$

Powyżej φ_0 oznacza wartość izokliny pola σ^0 .

Wartości I_1 i I_2 pokrywają się ze sobą tylko w szczególnych przypadkach, np. $\varphi_0 - \varphi = 0, \frac{\pi}{2}$. W innych wypadkach dają wartości różne; np.

jeśli $\varphi_0 - \varphi = \frac{\pi}{4}$, to $I_1 = I_0 \sin^2 \pi \sqrt{2} M$, $I_2 = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \pi 2M$. Widzimy, że pole I_2 jest sumą składników i tylko drugi składnik zależy za pośrednictwem $\varphi - \varphi_0$, od dewiatorowej części pola naprężeń. Rozkład natężenia światła I_2 może więc również służyć do pomiaru składowych dewiatora, ale pomiar ten odbywałby się na zasadzie wyznaczenia izoklin $\varphi_0 - \varphi$, a zatem polegałby na dokonaniu tych czynności, których pomiar rozkładu natężenia światła I_1 przeprowadzony w naszej pracy pozwala uniknąć.

DODATEK

Analizę płaskiego stanu naprężenia w zakresie stosowalności liniowej elastostatyki wystarczy prowadzić w dwuwymiarowym układzie współrzędnych, na przykład we współrzędnych kartezjańskich $(x, y) \equiv x_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Wtedy prawo Hooke'a ma postać

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{\alpha\beta} - N \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}), \quad N = \frac{\nu}{1+\nu},$$

gdzie E i ν oznaczają odpowiednio moduł Younga i liczbę Poissona, a N jest natomiast stałą Poissona, a $\delta_{\alpha\beta}$ jest tensorem Kroneckera, który ma wartość 1, jeśli $\alpha = \beta$ i 0, w przeciwnym razie.

$$(A.1) \quad w^{(2)} = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \left[S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{2} - N \right) \sigma_{\gamma\gamma} \sigma_{\varepsilon\varepsilon} \right],$$

gdzie $S_{\alpha\beta}$ jest dewiatorem dwuwymiarowego tensora naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$, por. (1.1)

$$(A.2) \quad S_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}, \quad S_{\alpha\alpha} = 0.$$

Wzór (A.1) można pisać również w postaci

$$(A.3) \quad w^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2] + \left(\frac{1}{2} - N \right) (\sigma_x + \sigma_y)^2 \right\},$$

przy czym oczywiście

$$\sigma_{11} = \sigma_x, \quad \sigma_{12} = \tau_{xy}, \quad \sigma_{22} = \sigma_y.$$

W rzeczywistości tarcza sprężysta, jako posiadająca daną grubość, jest obiektem trójwymiarowym i panujący w niej stan naprężenia może być opisywany trójwymiarowym tensorem σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Należy zaznaczyć, że sprawa trzeciego wymiaru tarczy nabiera znaczenia dopiero po przekroczeniu granicy sprężystości, a w niniejszych rozważaniach, prowadzonych w zakresie elastoptyki, może być pominięta.

Prawo Hooke'a w trzech wymiarach jest następujące:

$$(A.4) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right),$$

a gęstość energii sprężystej wynosi

$$(A.5) \quad w^{(3)} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \left[S_{ij} S_{ij} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{1+\nu} \right) \sigma_{kk} \sigma_{nn} \right],$$

gdzie S_{ij} jest dewiatorem trójwymiarowego tensora naprężenia

$$(A.6) \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad S_{ii} = 0.$$

W płaskim stanie naprężenia, a więc gdy $\sigma_{i3} = 0$, mamy

$$(A.7) \quad \begin{aligned} S_{11} &= (2\sigma_x - \sigma_y)/3, & S_{12} &= \tau_{xy}, & S_{13} &= 0; \\ S_{22} &= (2\sigma_y - \sigma_x)/3, & S_{23} &= 0, & S_{33} &= -(\sigma_x + \sigma_y)/3 \end{aligned}$$

i gęstość energii

$$(A.8) \quad w^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \left[S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + S_{33}^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{1+\nu} \right) \sigma_{kk} \sigma_{nn} \right]$$

ma naturalnie tę samą wartość, co $w^{(2)}$ we wzorze (A.3), jak łatwo się przekonać wstawiając (A.7) do (A.8). Tym niemniej wzór (A.3) ma prostszą interpretację niż (A.8). Pierwszy składnik w (A.3) (składnik dewiatorowy) wiąże się bezpośrednio ze zjawiskiem elastoptycznym, gdyż rząd izochromy jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego wziętego z tego wyrazu

dewiatorowego (por. wzór (1.3)). Własności tej nie ma składnik dewiatorowy we wzorze (A.8). Z tego względu przy opisie stanu naprężenia wykorzystano dewiator $s_{\alpha\beta}$ dwuwymiarowego tensora naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$, a nie dewiator S_{ij} trójwymiarowego tensora σ_{ij} .

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. C. DRUCKER, *The photoelastic analysis of transverse bending of plates in the standard transmission polariscope*, J. Appl. Mech., **9**, A-161-164, 1942.
2. W. SZCZEPIŃSKI, *Methods of characteristics in computations of the experimental stress analysis*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. techn., **12**, 619-6, 1964.
3. V. TESAŘ, *La photoélasticimétrie et ses applications dans la construction aéronautique*, La Sci. Aérienne, **2**, 372-394, 1933. M. MILBAUER, M. PERLA, *Fotoelasticimetrické přístroje a měřicí metody*, s. 395-400, ČAV, Praha 1959.
4. R. MARK, R. PIPES, *A simple method for determining principal stress directions in embedded—polariscope models*, Exper. Mech., **10**, 390-393, 1970.
5. B. MICHALSKI, *Elastooptyczne badania trójwymiarowego stanu naprężenia na modelach z perforowaną warstwą czułą optycznie*, Rozpr. Inż., **24**, 71-91, 1976.
6. M. FROCHT, *Photoelasticity*, vol. II, p. 333, J. Wiley, N. York 1948.

РЕЗЮМЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗНЫХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ КАРТИНЫ ИЗОХРОМ

Обращается внимание на факт, что знакомство картины изохром а) $m(x, y)$, неизвестного поля напряжений, б) $m_0(x, y)$, какого-то известного поля напряжений, в) $m_1(x, y)$, поля, будущего суперпозицией полей а) и б), позволяет определить девиаторные составляющие $\sigma_x - \sigma_y$, а также ϵ_{xy} неизвестного поля напряжений, значит и главные направления этого неизвестного поля. Выше упомянутое замечание иллюстрировано экспериментальным примером.

SUMMARY

DETERMINATION OF DIFFERENCE OF NORMAL STRESS BY SUPERPOSITION OF ISOCHROMATIC FRINGE PATTERNS

We notice that the following photoelastic fringe patterns: i) $m(x, y)$ of the unknown stress field, ii) $m_0(x, y)$ of a certain known stress field, iii) $m_1(x, y)$ of the field being the superposition of fields i) and ii)—permit to determine the components $\sigma_x - \sigma_y$ and τ_{xy} of the deviator of the unknown stress field and thereby also the principal directions of this unknown field. The foregoing conjecture is illustrated by the experimental example.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 grudnia 1982 r.