

PRZYKŁADY SZACOWANIA STANU LOKALIZACJI DEFORMACJI PLASTYCZNYCH

ZDZISŁAW ŚLODERBACH (WARSZAWA)

W niniejszej pracy, która wynika z rezultatów prac [1 i 2], wykorzystano dostateczny lokalny warunek wykluczający stan rozdwojenia równowagi w dwóch przykładach. W pierwszym przykładzie porównano wyniki ograniczeń nakładanych na izotermiczną funkcję wzmocnienia przez warunek na lokalizację deformacji plastycznych RICEA-RUDNICKIEGO [3 i 4] i przez wyprowadzone w pracy [2] lokalne kryterium wykluczające możliwość wystąpienia stanu rozdwojenia. W drugim przykładzie rozpatrzono problem czystego adiabatycznego ścinania, w którym określono krytyczne adiabatyczne naprężenie ścinające, krytyczną wartość adiabatycznych deformacji plastycznych oraz krytyczną temperaturę. Przekroczenie tych wyznaczonych wartości może spowodować wystąpienie stanu lokalizacji adiabatycznego ścinania [11 i 22].

WSTĘP

Wyprowadzone w pracy [2] warunki jednoznaczności uwzględniają efekty sprzężeń termo-mechanicznych, sprężysto-plastycznych oraz zawierają przypadki niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia. Oznacza to, że można je stosować do materiałów typu metali (które są ściśliwe plastycznie), materiałów porowatych oraz do skał czy też gruntów. W artykule tym przedstawiono rezultaty wykorzystujące dostateczny lokalny warunek jednoznaczności w dwóch przypadkach. W pierwszym przykładzie (por. p. 2) porównano rezultaty ograniczeń nakładanych na wartość izotermicznej funkcji wzmocnienia h przez warunek na lokalizację deformacji plastycznej RICEA-RUDNICKIEGO [3 i 4] i przez lokalny, dostateczny warunek jednoznaczności wzór (4.1) z [2] wykluczający wystąpienie stanu rozdwojenia równowagi. Pokazuje się, że warunek jednoznaczności daje bezpieczniejsze oszacowania krytycznych obciążeń aniżeli warunek na lokalizację deformacji. W drugim przypadku (por. p. 3) rozpatrzono problem czystego adiabatycznego ścinania. Uzyskane w tym punkcie rezultaty wyznaczają krytyczne adiabatyczne naprężenie ścinające, krytyczną adiabatyczną deformację plastyczną oraz krytyczną adiabatyczną temperaturę, po przekroczeniu których może wystąpić stan rozdwojenia. Wyniki te można następnie wykorzystać do analizy np. czystego adiabatycznego skręcania cienkościennych metalowych rurek (por. np. [5—7 i 8]) w celu określenia krytycznego adiabatycznego momentu skręcającego. Otrzymane rezultaty przedstawiono w postaci odpowiednich wykresów. Problem lokalizacji przy czystym ściananiu z uwzględnieniem sprzężenia między polem odkształceń a polem temperatury był już badany

[9—10 i 11], gdzie wykorzystano dane doświadczenie MANJOINE'A [12] dla stali węglowej. W naszym przypadku korzystamy z danych doświadczalnych dla pewnych stali nierdzewnych zawartych w pracy [13].

2. PORÓWNANIE LOKALNEGO WARUNKU JEDNOZNACZNOŚCI Z WARUNKIEM NA LOKALIZACJĘ RICE'A I RUDNICKIEGO [3 i 4]

2.1. Omówienie warunku na lokalizację

W pracy [3] RICE i RUDNICKI wyprowadzili kryterium powstawania lokalizacji deformacji plastycznej w materiałach ściśliwych plastycznie i sprężyste.

Równania konstytutywne takich materiałów zmodyfikowane dla przypadku małych deformacji $\dot{\sigma} \approx \dot{\sigma}$ (gdzie $\dot{\sigma}$ oznacza pochodną obiektywną Jaumanna tensora σ) przedstawione są następująco:

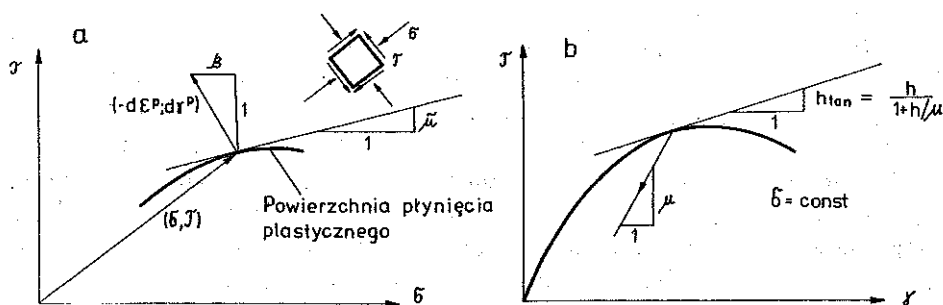
$$(2.1) \quad \begin{aligned} 2\dot{\varepsilon}'_{ij} &= \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{\mu} + \frac{1}{h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \tilde{\mu} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3} \right], \\ \dot{\varepsilon}'_{kk} &= \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{2\mu + 3\lambda} + \frac{\beta}{h} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \tilde{\mu} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon' = \text{dev } \varepsilon, \quad \sigma' = \text{dev } \sigma$$

oraz gdzie h oznacza izotermiczną funkcję wzmocnienia (por. wzór (2.1) w pracy [2]), β współczynnik dylatacji, $\tilde{\mu}$ współczynnik tarcia wewnętrznego oraz μ i λ stałe sprężyste Lamégo. Symbolem $\bar{\tau}$ oznaczono drugi niezmiennik deviatora naprężenia:

$$(2.2) \quad \bar{\tau} = \left(\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$$



Rys. 1. a. Schemat powierzchni płynięcia plastycznego ukazujący geometryczną interpretację współczynników: tarcia wewnętrznego $\tilde{\mu}$ i współczynnika dylatacji β . b. Krzywa zależności naprężenia ścinającego τ od odkształcenia ścinania ukazująca geometryczną interpretację izotermicznej funkcji wzmocnienia h , stycznego modułu wzmocnienia h_{tan} oraz sprężystego modułu ścinania μ

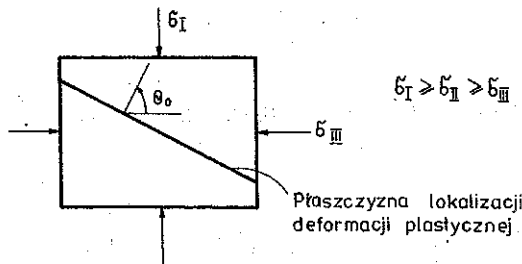
Interpretacja współczynników $\tilde{\mu}$ i β pokazana jest na rys. 1a dla przypadku ścinania w obecności ciśnienia hydrostatycznego, a interpretacja funkcji wzmocnienia h na rys. 1b wg [3].

W ogólnym przypadku, jeśli współczynnik tarcia wewnętrznego $\tilde{\mu}$ nie jest równy współczynnikowi dylatacji ($\tilde{\mu} \neq \beta$) i oba współczynniki są różne od zera, to prawa plastycznego płynięcia (2.1) są niestowarzyszone i uwzględniają ściśliwość sprężystą i plastyczną opisywanego materiału. Prawa te nie uwzględniają efektu sprzężenia sprężysto-plastycznego, jeżeli to prawo płynięcia (2.1) jest stowarzyszone. (por. [3]) wówczas ($\tilde{\mu} = \beta = 0$)

Wreszcie w przypadku ($\tilde{\mu} = \beta = 0$) równania (2.1) przyjmują postać związków konstytutywnych Prandtla-Reussa nie uwzględniających plastycznej ściśliwości materiału [3—4]. Krytyczna wartość funkcji wzmocnienia określająca początek lokalizacji plastycznej deformacji [3—4] jest następująca:

$$(2.3) \quad \frac{h^{cr}}{\mu} = \frac{1+\mu}{g(1-\nu)} (\beta - \tilde{\mu})^2 - \frac{1+\nu}{2} \left(N + \frac{\beta + \tilde{\mu}}{2} \right)^2,$$

gdzie ν oznacza współczynnik Poissona. Parametr N występujący w (2.3) zależy od stanu naprężenia i wynosi $\sigma'_{II} = N\bar{\tau}$, gdzie σ'_{II} jest drugą składową główną dewiatora naprężenia w układzie współrzędnych (rys. 2.). Wzór (2.3) otrzymuje się dla przypadku $\bar{\sigma} \approx \bar{\sigma}$ (pomija się efekty współobrotów) z ogólnego wyrażenia wyprowadzonego w pracach [3 i 4] przy pominięciu wyrazów rzędu $O(\bar{\tau}/\mu)$ i wyższych.



Rys. 2

Na rysunku 2 kąt θ_0 oznacza kąt orientujący płaszczyznę lokalizacji deformacji plastycznej w układzie kierunków głównych. Jest on zależny od wielkości (N, ν, β i $\tilde{\mu}$) [3].

Maksymalna wartość krytycznej funkcji wzmocnienia (2.3) jest osiągnięta dla $N = -[(\tilde{\mu} + \beta)/3]$ i wówczas otrzymamy, że

$$(2.4) \quad \frac{h_{max}^{cr}}{\mu} = \frac{1+\nu}{9(1-\nu)} (\beta - \tilde{\mu})^2.$$

Z analizy przeprowadzonej w [3] wynika dodatkowo, że wzory (2.3) i (2.4) nie są poprawne w całym obszarze zmienności współczynników $\tilde{\mu}$ i β tylko gdy jest spełniony warunek

$$(2.5) \quad \tilde{\mu} + \beta < \sqrt{3}.$$

2.2. *Lokalny warunek jednoznaczności dla przypadku równań konstytutywnych Rice'a i Rudnickiego (2.1)*

Na podstawie analizy przeprowadzonej w p. 2.1 możemy powiedzieć, że równania konstytutywne (2.1) należą do klasy równań konstytutywnych rozpatrzonych w przypadku szczególnym (por. p. 9 w pracy [8]).

Porównując odpowiednie zależności pracy [8] z (2.1), po przekształceniach otrzymamy

$$(2.6) \quad g_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \frac{\beta}{3} \delta_{ij},$$

$$(f_{\sigma})_{kl} = \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} + \frac{\tilde{\mu}}{3} \delta_{kl},$$

oraz

$$h_1 = h \quad \text{i} \quad \mathbf{M}^{(a)} = \mathbf{M}$$

(por. [4]).

Dla ciała izotropowego ze względu na własności sprężyste są prawdziwe następujące zależności [14 i 18]:

$$(2.7) \quad M_{ijkl} = \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}$$

oraz

$$\frac{2\mu + 3\lambda}{\mu} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}.$$

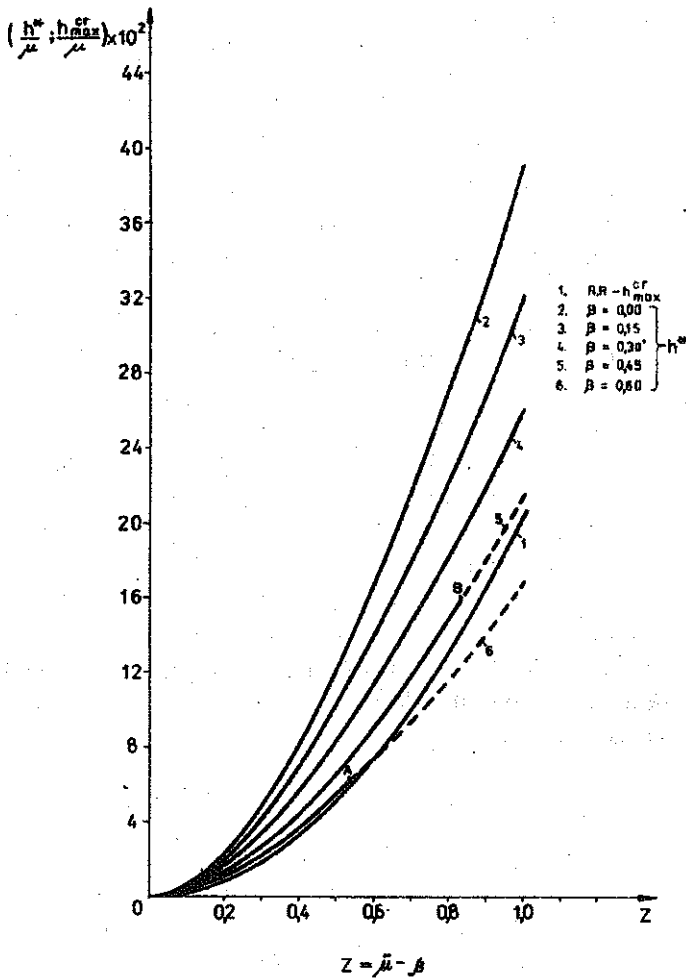
Podstawiając wyrażenia (2.6) do warunku (4.1) z pracy [2] i biorąc (2.7) po przekształceniach otrzymamy

$$(2.8) \quad \frac{h}{\mu} > \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left[1 + \frac{2}{3} \beta^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right]} \left[1 + \frac{2}{3} \tilde{\mu}^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] - \left[1 + \frac{2}{3} \beta \tilde{\mu} \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \right) = \frac{h^*}{\mu}.$$

Jest to poszukiwana postać lokalnego warunku jednoznaczności, którą porównamy z warunkiem lokalizacji (2.4).

2.3. Porównanie warunków (2.4) i (2.8)

Na rys. 3 krzywa 1 oznacza wykres warunku maksymalnej funkcji wzmocnienia h_{\max}^{cr} (2.4) w zależności od wprowadzonego parametru $z = \tilde{\mu} - \beta$. Tak wprowadzony parametr z nie ma żadnego sensu fizycznego lecz jest użyteczny. Krzywe (2, 3, 4, 5 i 6) są natomiast wykresami otrzymanymi z lokalnego warunku jednoznaczności h^* (2.8) przy podstawieniu parametru z .



Rys. 3

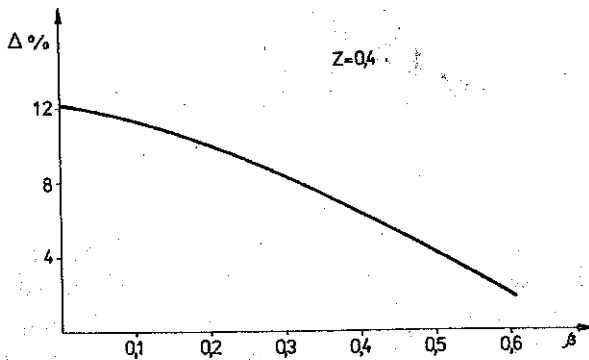
Wprowadzając parametr z do (2.8) nie otrzymamy zależności tylko od parametru z jak w przypadku (2.4), lecz zależność od parametru z i β . W tym przypadku warunek (2.8) będzie jednoparametrową rodziną warunków h^* zależnych od parametru β . Przedstawione na rys. 3 rezultaty otrzymano przyjmując za pracę [3], że stała Poissona $\nu = 0,3$, współczynnik tarcia wewnętrznego μ przyjmuje wartości z przedziału $(0,0; 0,9)$, a współczynnik dylatacji β z przedziału $(0,0; 0,6)$.

Zauważmy, że dostateczny lokalny warunek jednoznaczności (2.8) jest górnym (bezpieczniejszym) warunkiem lokalizacji deformacji plastycznej (2.4). Oznacza to, że dla danego materiału warunek (2.4) dopuszcza mniejszą wartość krytycznej funkcji wzmocnienia (co oznacza, że dopuszczalne są większe obciążenia zewnętrzne) aniżeli lokalny warunek jednoznaczności (2.8). Tak otrzymany rezultat jest zgodny z przewidywaniem. Na podstawie analizy podanej w punkcie (2.1) oraz z rys. 3 możemy powiedzieć, że dla każdego

współczynników (ν, μ, β) wziętych z podanego w [3] obszaru i takich samych dla warunków (2.3), (2.4) i (2.8) spełnione są następujące nierówności:

$$(2.9) \quad h^{cr} \leq h_{\max}^{cr} \leq h^*$$

Wynika to stąd, że lokalnym warunkiem koniecznym niejednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego jest $h \leq h^*$ a lokalnym dostatecznym warunkiem niejednoznaczności jest odpowiednio $h \leq 0$. W przedziale $(0 < h \leq h^*)$ niejednoznaczność (czyli rozdwojenie) może wystąpić. Natomiast jeśli $h_{\max}^{cr} < h \leq h^*$, to mogą wystąpić inne „mody” rozdwojenia stanu równowagi aniżeli lokalizacja R-R. Na rys. 3 pokazano, że $h^* \geq h_{\max}^{cr}$. Punkty A i B na krzywych 6 i 5 na rysunku 3 są granicznymi punktami, w których i po przekroczeniu których niespełniona jest wymagana nierówność (2.5) dotycząca przedziału, w którym spełniony jest warunek lokalizacji (2.4) zależnej od współczynników $\bar{\mu}$ i β . Punkt wspólny, w którym następuje równość warunków (2.4) i (2.8) jest punktem zerowym ($z = 0$), a więc dla $\bar{\mu} = \beta$. Jest to, jak wspomniano wcześniej, punkt, w którym równania konstytutywne (2.1) przyjmują postać stowarzyszonych praw plastycznego płynięcia. Wówczas dostateczny lokalny warunek jednoznaczności (2.8) (por. [14 i 15]) i zarazem warunek lokalizacji plastycznej deformacji (2.4) przyjmują postać $h_{0\max}^{cr} = h_0^* = 0$, natomiast liczba charakteryzująca ogólny warunek lokalizacji (2.3) przyjmuje wartość ujemną.



Rys. 4

Na rys. 4 przedstawiono procentową zmianę współczynnika oszacowania Δ , rozumianego jako

$$(2.10) \quad \Delta = \frac{h_{\tan}^* - h_{\max\text{tan}}^{cr}}{\mu} = \frac{\frac{h^*}{\mu} - \frac{h_{\max}^{cr}}{\mu}}{\left(1 + \frac{h^*}{\mu}\right) \left(1 + \frac{h_{\max}^{cr}}{\mu}\right)},$$

w zależności od współczynnika ściśliwości β jako parametru dla przyjętej wartości $z = 0,4$. Interpretacja geometryczna i analityczna stycznych krytycznych modułów wzmocnienia h_{tan}^* i $h_{\text{maxtan}}^{\text{cr}}$ dla danego materiału, w zależności od krytycznych funkcji wzmocnienia h^* i $h_{\text{max}}^{\text{cr}}$ odpowiednio, jest pokazana na rys. 1b. Wartości h^*/μ i $h_{\text{max}}^{\text{cr}}/\mu$ dla danego z w zależności od współczynnika β określono z rys. 3. Z rys. 4 wynika, że oszacowanie to jest bardzo dokładne (sięgające ok. 2% dla $\beta = 0,6$ i ok. 12% dla $\beta = 0,0$). Można stąd powiedzieć, że oszacowanie warunku lokalizacji deformacji (2.4) przez warunek lokalny jednoznaczności (2.8) jest lepsze w przypadku materiałów bardziej ściśliwych plastycznie, czemu odpowiada większy współczynnik β , aniżeli nieściśliwych plastycznie ($\beta = 0,0$).

3. WZMOCNIENIE IZOTROPOWE. PROBLEM CZYSTEGO ŚCINANIA

3.1. Model ciała z izotropowym wzmocnieniem

Rozważmy szczególny model ciała sprężysto-plastycznego z izotropowym wzmocnieniem i stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia. Niech stan wewnętrzny tego ciała opisuje tylko jeden parametr skalarny $\kappa^{(1)} = \kappa$. Założymy, że funkcję Gibbsa można przedstawić w postaci (por. [9—10], [18—19])

$$(3.1) \quad G = G^e(\sigma, T) + G^p(\kappa),$$

co jest równoznaczne z pominięciem efektów sprzężenia sprężysto-plastycznego i ciepła przemian wewnętrznych $\gamma_3 = 0$ oraz $\gamma_{13} = \gamma_{13}^* = \gamma_{23} = \gamma_{23}^* = 0$, (por. p. 9 w pracy [8]). Funkcji (3.1) odpowiada następująca addytywna postać entalpii (por. (3.33) w pracy [1]):

$$(3.2) \quad \chi = \chi^e(\sigma, T) + G^p(\kappa),$$

gdzie

$$\chi^e = G^e(\sigma, T) + Ts(\sigma, T),$$

siła zaś termodynamiczna

$$(3.3) \quad \pi = \varrho_0 \frac{\partial G}{\partial \kappa} = \varrho_0 \frac{\partial G^p}{\partial \kappa} = \pi(\kappa)$$

nie zależy ani od stanu naprężenia ani od temperatury.

Przyjmujemy, że nieodwracalny proces plastycznego płynięcia stowarzyszony jest następującą funkcją płynięcia (por. [9—10], [19])

$$(3.4)_1 \quad f_1 = \sigma_{(t)} - Y_1(\pi, \kappa, T),$$

gdzie

$$(3.4)_2 \quad Y_1 = Y_0(\kappa, T) \exp \pi(\kappa).$$

Funkcji tej odpowiada warunek $H-M$ ($f_1 = 0$). Występująca w równaniu powyższym wielkość $\sigma_{(t)}$ jest intensywnością naprężenia zdefiniowaną następująco:

$$(3.4)_{3,4} \quad \sigma_{(t)} = \left(\frac{3}{2} \sigma' \cdot \sigma' \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma' = \text{dev } \sigma.$$

Podstawiając (3.3) do (3.4) możemy wyrazić granicę plastyczności przy prostym rozciąganiu jako funkcję κ i T :

$$(3.5) \quad f(\sigma, \kappa, T) = f_1|_{\pi=\pi(\kappa)} = \sigma_{(t)} - Y(\kappa, T),$$

gdzie

$$Y(\kappa, T) = Y_1|_{\pi=\pi(\kappa)}.$$

Prawa płynięcia stowarzyszone z funkcją f oraz równanie ewolucji dla parametru wewnętrznego $\dot{\kappa}$ mają postać

$$(3.6) \quad \dot{\epsilon}'^p = \frac{3}{2} \frac{A}{\sigma_{(t)}} \sigma', \quad \dot{\kappa} = A \frac{\partial Y_1}{\partial \pi},$$

gdzie

$$\dot{\epsilon}'^p = \text{dev } \dot{\epsilon}^p \quad \text{oraz} \quad \dot{\epsilon}_{kk}^p = 0.$$

Biorąc pod uwagę warunek $f = 0$, równanie (3.6)₁ i przyjętą szczególną postać funkcji Y_1 , widzimy, że parametr κ można utożsamić z pracą (mocą) odkształcenia plastycznego:

$$(3.7) \quad \dot{\kappa} = \sigma' \dot{\epsilon}'^p.$$

3.2. Uproszczony warunek lokalny jednoznaczności

Dokonując na podstawie prac [9, 10 i 19] analizy wpływu różnego rodzaju sprzeżeń na krytyczną wartość funkcji wzmocnienia h wykazano, że efekt piezokaloryczny oraz rozszerzalność cieplna od wzrostu temperatury spowodowanego dysypacją nie mają znaczenia przy praktycznym wykorzystywaniu warunku lokalnego. Dlatego w dalszym ciągu przyjmujemy, że $\gamma_{12} = 0$ oraz $\gamma_{21} \gamma_1 = 0$. Warunek lokalny pokrywa się wówczas z warunkiem odwracalności i ma prostą postać (por. (2.3) w pracy [2]):

$$(3.8) \quad h_1 = h - m_\sigma f_r > 0,$$

gdzie

$$(3.9) \quad m_\sigma = \frac{\gamma_1}{\varrho_0 C_\sigma} \left[\dot{\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \pi \frac{\partial f_1}{\partial \pi} \right] = \frac{\gamma_1}{\varrho_0 C_\sigma} (\dot{\sigma} f_{1,\sigma} + \pi f_{1,\pi}).$$

Wykorzystując założenia przyjęte w punkcie 3.1, stwierdzamy, że w stanie $h_1 = 0$, przy którym może występować rozdwojenie, ma miejsce następujący związek:

$$(3.10) \quad \frac{\partial Y(\kappa, T)}{\partial \kappa} = \frac{\gamma_1 (\pi - 1)}{\varrho_0 C_\sigma} \frac{\partial Y(\kappa, T)}{\partial T}$$

Przy przyjętych założeniach z równania (3.34) w pracy [1] wynika, że zmianę temperatury w procesie lokalnie adiabatycznym ($q_0 = \text{div } \mathbf{q} = 0$) obliczyć można ze wzoru

$$(3.11) \quad \theta \varrho_0 C_\sigma = \gamma_1 \kappa - \varrho_0 G^p(\kappa)$$

Zdefiniujemy adiabatyczną granicę plastyczności następująco:

$$(3.12) \quad Y^{(a)}(\kappa) = Y(\kappa, T)|_{T=T(\kappa)},$$

gdzie

$$\theta [^\circ\text{C}] = T [^\circ\text{K}] - 273,$$

Obliczając pochodną $(\partial Y^{(a)})/\partial \kappa$ i wykorzystując (3.10) stwierdzamy, że por. [6—7], [9—10], [19]

$$(3.13) \quad \frac{dY^{(a)}(\kappa)}{d\kappa} = 0.$$

Tak więc stan krytyczny jest stanem, któremu odpowiada maksimum na krzywej adiabatycznej w próbie na proste rozciąganie lub w próbie na czyste ścinanie, gdyż

$$(3.14) \quad Y(\kappa, T) = \sqrt{3} k(\kappa, T),$$

gdzie $k = k(\kappa, T)$ jest izotermiczną granicą plastyczności przy czystym ścinaniu.

Równanie dla temperatury (3.11) zawiera jak widać (drugi wyraz po prawej stronie) wyrażenie uwzględniające ukrytą energię deformacji plastycznej [16 i 17]. Ponieważ założyliśmy wcześniej, że pomijamy ciepło wewnętrznych przemian ($\gamma_3 = 0$) (por. p. 3.1), przeto wyrażenie $\varrho_0 G^p(\kappa)$ jest równe ukrytej energii deformacji plastycznej [9, 10 i 18].

Dla dalszej analizy problemu założymy, że wyrażenie $\varrho_0 G^p(\kappa)$ jest liniową funkcją parametru wewnętrznego κ , co jest na podstawie wzoru (3.3) równoznaczne z faktem, że siła termodynamiczna π jest stała. Przy tych założeniach w analizie procesu deformacji plastycznej w dalszej części pracy — stała π będzie odgrywać rolę stałej materiałowej.

3.3. Krytyczne naprężenie w adiabatycznej próbie na proste rozciąganie (czyste ścinanie) dla niektórych stali nierdzewnych

Rozważmy klasę metali, które dadzą się opisać następującym związkiem między rzeczywistym naprężeniem σ , logarytmicznym odkształceniem plastycznym ε^p i temperaturą $\theta^\circ\text{C} = T - 273$ dla przypadku prostego rozciągania [9—10], [5—7] i [19—20]:

$$(3.15) \quad \sigma = \bar{Y}(\varepsilon^p, \theta) = (c - b\theta)(b_1 + \varepsilon^p)^n.$$

Rozpatrujemy stałe materiałowe $c, b, b_1, n, \varrho_0, C_\sigma, \pi, E$ i σ_0 dla pewnych stali nierdzewnych stopowych określono według danych doświadczalnych zawartych w [13 i 21], które zawierają się w następujących przedziałach:

$$\begin{aligned} c &\in (45; 5000) \text{ [kG/mm}^2\text{]}, \\ b &\in (0,02; 0,5) \text{ [kG/(mm}^2 \text{ } ^\circ\text{C)]}, \\ b_1 &= 0,016, \quad n \in (0,2; 0,5), \\ \varrho_0 C_\sigma &= (0,3; 0,4) \text{ [kG/(mm}^2 \text{ } ^\circ\text{C)]}, \\ E &= (2,0; 2,2) \times 10^4 \text{ [kG/mm}^2\text{]}, \\ \sigma_0 &= (20; 60) \text{ [kG/mm}^2\text{]}, \end{aligned}$$

gdzie E oznacza moduł Younga, $\sigma_0 = cb_1^n$ początkową granicę plastyczności przy $\varepsilon^p = 0$ i $\theta = 0^\circ\text{C}$.

Przedstawiamy wzór konstytutywny (3.15) w wielkościach bezwymiarowych:

$$(3.16) \quad \tau = (A - \theta^*) (b_1 + \varepsilon^p)^n,$$

gdzie

$$(3.17) \quad \tau = \frac{\sigma(1+\nu)}{\sqrt{3}E}, \quad \theta^* = \frac{b(1+\nu)}{\sqrt{3}E} \theta, \quad A = \frac{c(1+\nu)}{\sqrt{3}E}, \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu}.$$

Bezwymiarowa praca odkształcenia plastycznego jest określona następująco:

$$(3.18) \quad \kappa^* = \frac{1+\nu}{E} \kappa = \sqrt{3} \int_0^{\varepsilon^p} \tau(\theta, \bar{\varepsilon}^p) d\bar{\varepsilon}^p,$$

gdzie $\kappa = \int_0^{\varepsilon^p} \sigma(\theta, \bar{\varepsilon}^p) d\bar{\varepsilon}^p$ oznacza wymiarową pracę odkształcenia plastycznego.

Po podstawieniu wyrażenia (3.16) do (3.18) i scałkowaniu otrzymamy

$$(3.19) \quad \kappa^* = \sqrt{3} (A - \theta^*) [(b_1 + \varepsilon^p)^{n+1} - b_1^{n+1}] \frac{1}{n+1}.$$

Przyjmując, że $\varrho_0 G^p = \pi \kappa$, $\pi \approx 0,1$, z równania (3.11) otrzymamy

$$(3.20) \quad \theta^* = \delta \kappa^*, \quad \delta = 0,5196 \frac{b}{\varrho_0 C_\sigma}.$$

Tutaj bezwymiarowy parametr δ określa wrażliwość granicy plastyczności stali na temperaturę. Z układu równań (3.16), (3.19) i (3.20) możemy wyznaczyć następujące adiabaty:

$$(3.21) \quad \tau^a = \tau(\kappa^*), \quad \varepsilon^p = \varepsilon^p(\kappa^*), \quad \theta^* = \delta \kappa^*.$$

Przyrównując pochodną (3.21)₁ do zera, znajdziemy krytyczną wartość κ_{cr}^* i następnie odpowiadające jej krytyczne wartości ε_{cr}^p , θ_{cr}^* i τ_{cr}^a :

$$(3.22) \quad \varepsilon_{cr}^p = \left[\frac{n(1+n - \sqrt{3} \delta b_1^{n+1})}{\sqrt{3} \delta} \right]^{\frac{1}{n+1}} - b_1,$$

$$(3.22) \quad \theta_{cr}^* = A \frac{(n - \sqrt{3} \delta b_1^{n+1})}{(1 + n - \sqrt{3} \delta b_1^{n+1})},$$

[c.d.]

$$\tau_{cr}^a = A \left(1 - \frac{n - \sqrt{3} \delta b_1^{n+1}}{1 + n - \sqrt{3} \delta b_1^{n+1}} \right) \left[\frac{n(1 + n - \sqrt{3} \delta b_1^{n+1})}{\sqrt{3} \delta} \right]^{\frac{n}{1+n}}$$

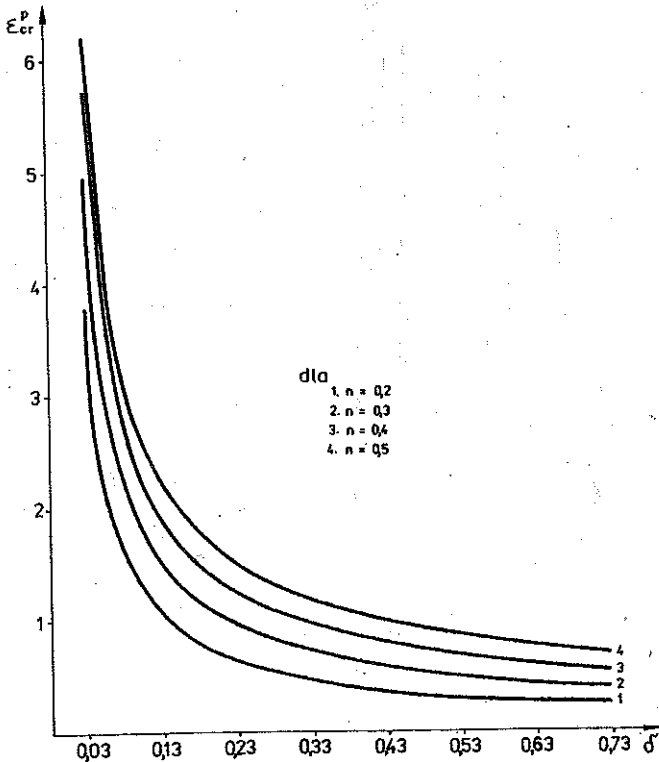
Na podstawie dokładnej analizy wzoru (3.22)₂, stwierdzamy, że dla $\delta \in (0,028; 0,702)$ określonego na podstawie (3.20)₂ dla b należącego do przedziału $(0,02; 0,5)$ i $\varrho_0 C_\sigma \approx 0,35$ wzór ten można z bardzo dużą dokładnością zastąpić następującym prostym wzorem:

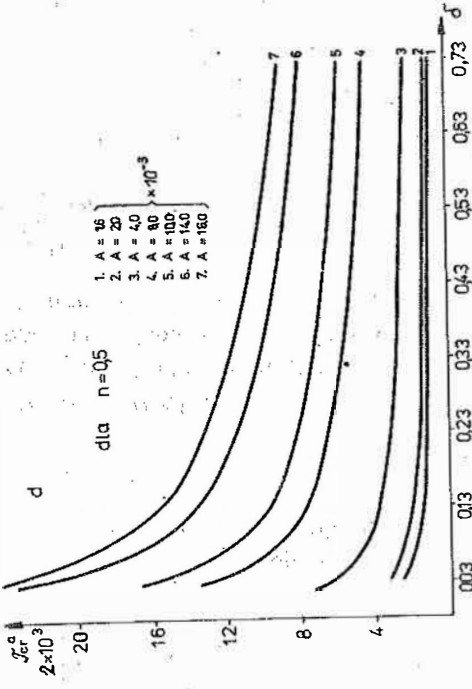
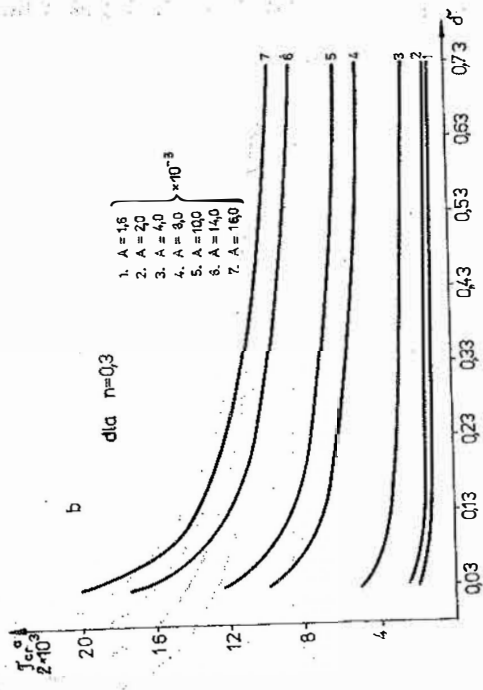
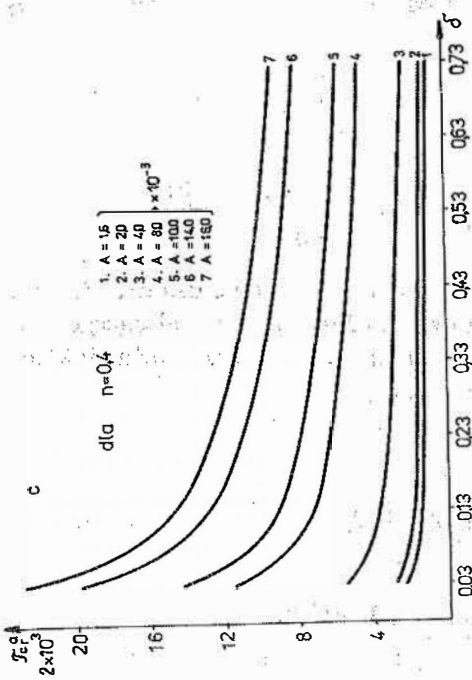
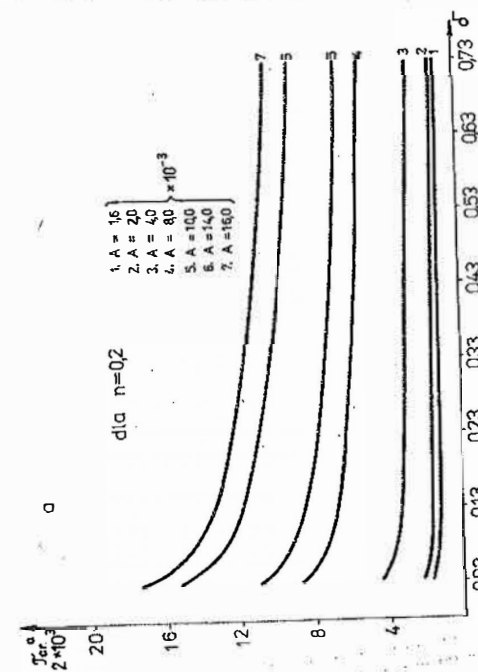
$$(3.23) \quad \theta_{cr}^* \approx A \frac{n}{1+n}.$$

Na podstawie (3.23) wzór na τ_{cr}^a (por. (3.22)₃) można również napisać w prostej formie:

$$(3.24) \quad \tau_{cr}^a \approx A \left(\frac{1}{1+n} \right) \left[\frac{n(1+n - \sqrt{3} \delta b_1^{n+1})}{\sqrt{3} \delta} \right]^{\frac{n}{1+n}}$$

Wykres wielkości krytycznej ε_{cr}^p ze wzoru (3.22)₁ zależnej od parametru δ dla $n = (0,2; 0,3; 0,4; 0,5)$ pokazano na rys. 5. Natomiast na rysunkach





6 (a-d) przedstawiono krytyczne naprężenia τ_{cr}^a (3.24) w zależności od parametru δ dla wybranych wartości współczynnika wzmocnienia n i wybranych wartości A . Przedstawione wykresy na rysunkach 5 i 6. (a—d) mają charakter nomogramów i mogą być użyte w dalszej pracy przy analizie krytycznych obciążeń momentem skręcającym dla czystego adiabatycznego skręcania grubościennych i cienkościennych metalowych rurek.

4. UWAGI KOŃCOWE

Zagadnienia lokalizacji deformacji plastycznych odgrywają znaczną rolę w procesach obróbki skrawaniem, obróbki plastycznej, w zjawiskach mikropeknięć, w zagadnieniach szybkowania itp. Zagadnienia te mogą więc odgrywać znaczną rolę w zagadnieniach technologii wytwarzania, projektowania oraz w badaniach doświadczalnych. Należałoby więc prowadzić dalsze badania i udoskonalać metody szacowania i obliczeń tych zjawisk wykorzystując m.in. wyprowadzone w pracach [2 i 8] warunki jednoznaczności, które są jak już wspomniano wcześniej kryteriami rozdzielenia stanów równowagi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. ŚLÓDERBACH, *Generalized and coupled thermoplasticity, Part I. Fundamental equations and identities*, Arch. Mech., (submitted).
2. Z. ŚLÓDERBACH, *Generalized and coupled thermoplasticity, Part II. On the uniqueness and bifurcations criteria*, Arch. Mech., (submitted).
3. J. W. RUDNICKI, J. R. RICE, *Condition for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials*, J. Mech. Phys. Solids, **23**, 371–394, 1975.
4. J. R. RICE, *The localization of plastic deformation in theoretical and applied mechanics*, ed. W. T. KOITER, North-Holland Publ. Co., 207–220, 1976.
5. M. KAMIŃSKI, *Sprężenie pola odkształceń z polem temperatury w zagadnieniu skręcania cienkościennej rurki*, Rozpr. Inżyn., **24**, 1, 1976.
6. J. LIŃSKI, *Badanie niestateczności przy plastycznym skręcaniu wykorzystując sprzężenie termomechaniczne. Niestateczność lokalna*, Rozpr. Inżyn., **24**, 4, 1976.
7. J. LIŃSKI, *Plastic flow of a tube under adiabatic torsion*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **25**, 1, 1977.
8. Z. ŚLÓDERBACH, *Bifurcation criteria of the equilibrium state in generalized thermoplasticity*, Doctoral Thesis [in Polish], IFTR Reports, No. 37/1980, Warszawa 1980.
9. Z. MRÓZ, B. RANIECKI, *On the uniqueness problem in coupled thermoplasticity*, Int. J. Engn. Sci., **14**, 211–221, 1976.
10. B. RANIECKI, A. SAWCZUK, *Thermal effects in plasticity, Part II. Uniqueness and applications*, ZAMM, **55**, 7/8, 363–373, 1975.
11. R. F. RECHT, *Catastrophic thermoplastic shear*, J. Appl. Mech., **31**, 189–193, 1964.
12. M. J. MANJOINE, *Influence of rate of strain and temperature on yield stresses of mild steel*, J. Appl. Mech., **11**, 211–218, 1944.
13. Н. И. БЕЗУХОВ, В. Л. БАЖАНОВ, И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, Н. А. НИКОЛАЕНКО, А. М. СИНЮКОВ, *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур*, Изд. Машиностроение, Москва, 1965.
14. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK, Z. MRÓZ (i in.), *Theory of the plasticity*, PWN, Warszawa, 1965 [in Polish].
15. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1950.

16. М. А. БОЛЬШАНИНА, В. Е. ПАНИК, *Скрытая энергия деформаций* книге „Исследования по физике твердого тела”, Изд. АН СССР, 1957, 194–233.
17. M. B. BEVER, D. L. HOLT, A. L. TITCHENER, *Stored energy of cold work*, Progress in Material Sciences, 17, Pergamon Press, 1973.
18. B. RANIECKI, *An introduction to the concepts of applied thermoplasticity*, Lectures Notes, Material Center, Royal Institute of Technology, Stockholm, April–May 1976.
19. B. RANIECKI, *Problems of the applied thermoplasticity*, The Habilitation Paper [in Polish], IFTR — Reports. No. 29/1977, Warszawa 1977.
20. J. F. BELL, *The physics of large deformation of crystalline solids*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1968.
21. Z. MARCINIAK, *Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal*, WNT, Warszawa, 1971 [in Polish].
22. C. ZENER, *The micromechanism of fracture*, Fracturing of Metals, ASM, 3-31, 1948.

РЕЗЮМЕ

ПРИМЕРЫ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В настоящей работе, которая следует из результатов работ [1–2], использовано достаточное локальное условие, исключающее состояние бифуркации равновесия в двух примерах. В первом примере сравнены результаты ограничений, накладываемых на изотермическую функцию упрочнения условием для локализации пластических деформаций Рейса–Рудницкого [3–4] и локальным критерием, выведенным в работе [2], исключающим возможность выступления состояния бифуркации. Во втором примере рассмотрена проблема чистого адиабатического сдвига, в которой определены критическое адиабатическое напряжение сдвига, критическое значение адиабатических пластических деформаций и критическая температура. Превышение этих определенных значений может вызвать выступления локализации адиабатического сдвига [11 и 22].

SUMMARY

EXAMPLES OF ESTIMATION OF THE PLASTIC DEFORMATION LOCALIZATION STATE

In the paper, which follows the results of [1–2], use is made of the local condition excluding the equilibrium bifurcation state in two particular cases. In the first example, the results of limitations imposed on the isothermal hardening function by the Rice–Rudnicki condition of plastic strain localization [3–4] are compared with those resulting from the local criterion derived in [2] which excludes the possibility of bifurcation. In the other example the problem of pure adiabatic shear is considered; critical values of adiabatic shearing stresses are determined as also the critical values of plastic deformations and temperature. Values exceeding the critical data may lead to the state of localization of adiabatic shear [11, 22].

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1982 r.