

ANALIZA I OPTIMALIZACJA UKŁADU PRĘTOWEGO O ZMIENNYCH PRZEKROJACH W WARUNKACH REZONANSU WEWNĘTRZNEGO(*)

ANNA FORYŚ i ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

Tematem pracy jest optymalizacja parametryczna układu trzech prętów o zmiennych przekrojach, połączonych przegubowo. Układ pozostaje w warunkach rezonansu wewnętrznego. Analizowano wpływ współczynników kształtu prętów na amplitudy rezonansowe elementów układu. W opisie uwzględniono nieliniowe tłumienie, jak również sprzężenie elementów układu przez wewnętrzne siły podłużne, będące siłami poprzecznymi na końcach sąsiednich prętów. Analizowany rezonans wewnętrzny ma charakter autoparametryczny. Na podstawie uzyskanych rezultatów stwierdzono wyraźny wpływ parametrów kształtu na amplitudy rezonansowe. Dobierając odpowiednie wartości współczynników można uzyskać znaczne zmniejszenie wartości amplitud. Przy optymalnych wartościach tych współczynników rezonans o charakterze parametrycznym występuje również w mniejszym obszarze częstości. Przez zmianę współczynników kształtu rezonans autoparametryczny zostaje przesunięty w inne obszary częstości.

1. UWAGI WSTĘPNE

Praca dotyczy zjawisk rezonansowych w układach złożonych z prętów o zmiennych przekrojach, drgających poprzecznie. W sytuacjach gdy na obiekty działają obciążenia zewnętrzne zmienne w czasie, w szczególności siły podłużne okresowo zmienne, pojawia się zagadnienie stateczności dynamicznej układu prętowego. Jeśli siły okresowo zmienne w czasie są siłami wewnętrznymi układu, to występują dodatkowe sprzężenia i mogą pojawić się takie zjawiska jak na przykład rezonans wewnętrzny czy kombinacyjny, których charakter jest autoparametryczny. Zagadnienia stateczności dynamicznej sprowadzają się do rozwiązania układu równań różniczkowych liniowych lub nieliniowych o współczynnikach zmiennych w czasie.

W przedstawionej pracy analizowano rezonans wewnętrzny w układzie trzech prętów o zmiennych przekrojach, połączonych przegubowo. Ograniczono się tylko do poprzecznych drgań symetrycznych. Uwzględniono sprzężenie elementów układu poprzez siły podłużne, będące siłami poprzecznymi

(*) Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12, koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.

na końcach sąsiednich elementów. Poszukiwano krzywych rezonansowych, a więc zależności amplitud od częstotliwości i badano wpływ parametrów określających kształt prętów na amplitudy rezonansowe przy rezonansie wewnętrznym. Aby uzyskać amplitudy ograniczone, należy w rozważanym układzie uwzględnić pewne nieliniowości, a więc siły "małe", których uwzględnienie nie jest konieczne przy badaniu obszarów stateczności dynamicznej. Nieliniowości występujące w równaniach ruchu opisujących drgania mogą mieć naturę geometryczną lub fizyczną. Nieliniowości fizyczne mają źródło w nieliniowych prawach fizycznych opisujących materiał ośrodka. W przedstawionej pracy tego typu nieliniowości nie wystąpią. Materiał ośrodka jest liniowy, lepkosprężysty. Nieliniowości geometryczne są związane z rozważaniem dużych przemieszczeń lub małych przemieszczeń drugiego rzędu, które w opisie uproszczonym często pomijamy. Są to na przykład podłużne przemieszczenia końców prętów wynikłe z ugięć. Nieliniowości związane z małymi przemieszczeniami drugiego rzędu uwzględnimy w niniejszej pracy.

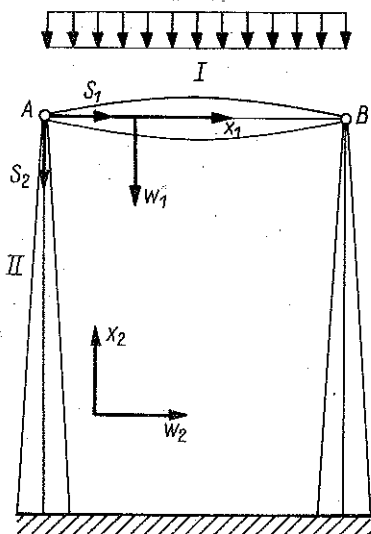
W pracach [1 i 2] poszukiwano krzywych rezonansowych przy rezonansie wewnętrznym dla analogicznego układu, lecz złożonego z prętów przyzmatycznych. Istotnym punktem zarówno w tych pracach jak i w pracy przedstawionej jest wyprowadzenie równań ruchu. Ze względu na występujące sprzężenie oraz na konieczność uwzględnienia nieliniowości układ równań cząstkowych nie może być rozwiązany w sposób ścisły. Należy zdecydować się na metodę przybliżoną. Większość metod matematycznej analizy rezonansów wewnętrznego i kombinacyjnego stosuje się do nieliniowych układów równań różniczkowych zwyczajnych. Z tego względu zaproponowano w [1 i 2] pewną metodę dyskretyzacji rozważonego układu, co wiąże się z przyjęciem uproszczonego modelu drgań układu trzech prętów połączonych przegubowo. W układzie przedstawionym takim modelem stosunkowo łatwo uwzględnić siły nieliniowe, co uczyniono postępując zgodnie z BOLOTINEM [5].

W wyniku zaproponowanej metody uzyskano układ zwyczajnych równań różniczkowych, nieliniowych. Analiza rezonansów wewnętrznego i kombinacyjnego może być następnie przeprowadzona metodami przedstawionymi w monografii A. TONDLA [3]. W przypadku rezonansu wewnętrznego rozwiązanie można uzyskać metodą bilansu harmonicznych [1 i 2].

Zarówno metoda dyskretyzacji jak model drgań oraz metody rozwiązania wspomniane wyżej mogą być zastosowane do układów prętów nieprzyzmatycznych. Uzyskane krzywe rezonansowe będą zależne od parametrów opisujących zmianę kształtu przekroju wzdłuż długości prętów. W pracy przeprowadzono analizę wpływu wybranych parametrów na uzyskane amplitudy przy dodatkowych warunkach nałożonych na objętości prętów. Rozważane zagadnienia można zaliczyć do problemów tzw. optymalizacji parametrycznej. Praca jest próbą takiej analizy. Z tego względu przyjęto szereg uproszczeń, na przykład nie uwzględniono wpływu zmiany przekrojów na formy drgań.

2. MODEL UKŁADU I RÓWNANIA RUCHU

W wielu konstrukcjach inżynierskich występują układy prętów połączonych sztywno lub przegubowo, pryzmatycznych lub o zmiennych przekrojach. W układach tych mogą wystąpić różnego typu rezonanse. W pracy [3] przeprowadzono klasyfikację rezonansów dla układu o dwu stopniach swobody. Rodzaj rezonansu zależy zarówno od relacji między częstością siły wymuszającej a częstościami drgań własnych elementów układu lub ich kombinacjami liniowymi, jak i od stosunku częstości drgań własnych elementów układu. W niniejszej pracy ograniczymy się do zbadania symetrycznych drgań poprzecznych układu trzech prętów o zmiennych przekrojach, połączonych przegubowo, przedstawionego na rysunku 1. Pręty pionowe II mają jeden z końców sztywno zamocowany. Analizę drgań przeprowadzimy dla stanu ustalonego rezonansu wewnętrznego. Ograniczenie się do połączeń przegubowych elementów układu drgającego upraszcza zagadnienie. Układy tego typu są często spotykane w praktyce (hale fabryczne) [4].



Rys. 1. Układ drgający

W opisie uwzględniamy również sprzęgające siły podłużne S_1 i S_2 . Poszukujemy krzywych rezonansowych, a więc zależności amplitud od częstości. W rozważanym układzie możliwe są dwa przypadki rezonansu wewnętrznego (por. Tablica 1).

Aby uzyskać dokładny opis rozważanego układu drgającego należy rozwiązać układ równań różniczkowych cząstkowych następującej postaci:

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[E_1 J_1(x_1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \right] + \varrho_1 F_1(x_1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + S_1(t) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} +$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[\Phi_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \right) \right] = A_1 \sin \omega t, \\ & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[E_2 J_2(x_2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \right] + \rho_2 F_2(x_2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + S_2(t) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[\Phi_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \right) \right] = A_2 \sin \omega t, \end{aligned}$$

gdzie

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\Phi_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \right) \right],$$

$i = 1, 2$ są operatorami różniczkowymi uwzględniającymi rozpraszanie energii w materiale pręta, natomiast $S_1(t)$ i $S_2(t)$ są wewnętrznymi siłami okresowo zmiennymi w czasie. W powyższych równaniach E_i oznacza moduły Younga, F_i oznacza pola powierzchni przekrojów, ρ_i gęstości, I_i powierzchniowe momenty bezwładności oraz w_i wychylenia poprzeczne prętów. Do równań należy dołączyć odpowiednie warunki brzegowe, warunki ciągłości oraz warunki początkowe. W równaniach ruchu powinny być uwzględnione pewne siły nieliniowe ze względu na to, iż poszukujemy amplitud w rezonansach o charakterze parametrycznym [5]. Nawet w stanach ustalonych ściśle rozwiązanie takiego układu równań nie jest możliwe. Większość metod matematycznej analizy rezonansów stosuje się do układów równań różniczkowych zwyczajnych. Jeżeli są to równania nieliniowe, to metoda rozwiązania zależy od rodzaju nieliniowości. Można sprowadzić układ (2.1) do układu równań różniczkowych zwyczajnych jedną z metod, na przykład metodą Galelerkina, i następnie uwzględnić występujące w układzie siły nieliniowe metodą podaną przez BOŁOTINA dla jednego pręta pryzmatycznego [5].

W pracach [1 i 2] przedstawiono metodę dyskretyzacji, w wyniku której zaproponowano uproszczony model drgań rozważanego układu. W niniejszej pracy, stosując tę samą metodę, wyprowadzamy równania ruchu na podstawie równań Lagrange'a II rodzaju. Wszelkie obciążenia zewnętrzne, siły wewnętrzne sprzęgające, w tym również siły o charakterze nieliniowym, oraz siły

Tablica 1

Przypadek	Wymuszenie	Kryterium I	Kryterium II
1	na I	$\omega_{01} \approx \omega$	$\omega_{02} = \frac{1}{2} \omega_{01}$
2	na II	$\omega_{02} \approx \omega$	$\omega_{01} = \frac{1}{2} \omega_{02}$

dysypatywne uwzględniamy poprzez siły uogólnione. W dalszym ciągu przyjmujemy następujące założenia: 1) ograniczymy się do małych ugięć; 2) rozwiązań poszukujemy w postaci

$$(2.3) \quad w_i(x_i, t) = Y_i(x_i) T_i(t) \quad i = 1, 2,$$

ograniczając się tylko do jednego wyrazu szeregu. Y_i są formami drgań elementów I i II, natomiast $T_i(t)$ są współrzędnymi uogólnionymi; 3) uwzględnimy sprzężenie elementów układu przez wewnętrzne siły podłużne $S_i(t)$; 4) przyjmujemy, że wpływ sprzężenia na formy drgań jest mały; 5) uwzględnimy w rozważaniach małe przemieszczenia podłużne

$$(2.4) \quad u_i \approx \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i, \quad i = 1, 2$$

przegubów A i B , wynikające z ugięć. Poza tym przeguby nie przemieszczają się; 6) pręty układu są niewydłużalne podczas ruchu; 7) materiał jest liniowy, lepkosprężysty (przyjęto dalej model Voigta-Kelvina).

Równania ruchu uzyskujemy z równań Lagrange'a postaci:

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{T}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial T_i} = Q_i + Q_{S_i} + Q_{AS_i} + Q_{D_i}, \quad i = 1, 2,$$

gdzie $L = T - U$, T jest energią kinetyczną drgającego układu, U jest energią potencjalną sprężystości.

Z prawej strony powyższych równań przyjmujemy następujące oznaczenia: Q_i są to siły uogólnione odpowiadające obciążeniom zewnętrznym $q_i(x_i, t)$; Q_{S_i} są to siły uogólnione odpowiadające sprzęgającym siłom wewnętrznym $S_i(t)$; Q_{AS_i} są siłami uogólnionymi związanymi z pewnymi siłami nieliniowymi, które będziemy uwzględniać w opisie. Modyfikują one sprzęgające siły podłużne. Przez Q_{D_i} oznaczmy siły uogólnione odpowiadające siłom dysypatywnym związanym z tarcie wewnętrznym.

Energia kinetyczna drgającego układu ma postać następującą:

$$(2.6) \quad T = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} m_1(x_1) \left[\frac{\partial w_1(x_1, t)}{\partial t} \right]^2 dx_1 + \int_0^{l_2} m_2(x_2) \left[\frac{\partial w_2(x_2, t)}{\partial t} \right]^2 dx_2,$$

gdzie m_i są gęstościami liniowymi masy.

Energia potencjalna U jest następująca:

$$(2.7) \quad U = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} E_1 I_1(x_1) \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \right]^2 dx_1 + \int_0^{l_2} E_2 I_2(x_2) \left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \right]^2 dx_2.$$

Wewnętrzne siły sprzęgające S_i mają postać

$$(2.8) \quad S_1(t) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[E_2 I_2(x_2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \right]_{x_2=l_2},$$

$$S_2(t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[E_1 I_1(x_1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \right]_{x_1=0}.$$

Praca tych sił na przemieszczeniach podłużnych u_i (przegubów A, B) wynikających z ugięć ma następującą postać:

$$(2.9) \quad dL_{S_i} = \frac{1}{2} S_i(t) \int_0^{l_i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i dt, \quad i = 1, 2.$$

Uwzględniając założenie 2) mamy następującą postać sił uogólnionych Q_{S_i} :

$$(2.10) \quad Q_{S_i} = S_i(t) \int_0^{l_i} [Y_i']^2 dx_i \dots T_i, \quad i = 1, 2$$

a po skorzystaniu z (2.8), mamy

$$(2.11) \quad Q_{S_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} [E_2 I_2(x_2) Y_2''(x_2)]_{x_2=l_2} \int_0^{l_1} [Y_1']^2 dx_1 T_1 T_2 = C T_1 T_2,$$

$$Q_{S_2} = -\frac{\partial}{\partial x_1} [E_1 I_1(x_1) Y_1''(x_1)]_{x_1=0} \int_0^{l_2} [Y_2']^2 dx_2 T_2 T_1 = -\bar{C} T_1 T_2,$$

gdzie

$$(2.12) \quad C = \frac{\partial}{\partial x_2} [E_2 I_2(x_2) Y_2''(x_2)]_{x_2=l_2} \int_0^{l_1} Y_1'^2 dx_1,$$

$$\bar{C} = \frac{\partial}{\partial x_1} [E_1 I_1(x_1) Y_1''(x_1)]_{x_1=0} \int_0^{l_2} Y_2'^2 dx_2.$$

Uwzględniając w układzie siły tłumiące P_i ($i = 1, 2$) [2] wynikające z przemieszczeń punktów A i B postaci

$$(2.13) \quad P_i = \Delta S_i = -k \dot{u}_i, \quad i = 1, 2,$$

gdzie k jest współczynnikiem tłumienia związanym z tarciem konstrukcyjnym [5], uzyskamy modyfikację sił podłużnych S_i :

$$(2.14) \quad S_i \rightarrow S_i + \Delta S_i.$$

Siły uogólnione odpowiadające siłom ΔS_i obliczamy tak, jak wyżej pokazano i mają one postać

$$(2.15) \quad Q_{\Delta S_i} = -k \left\{ \int_0^{l_i} [Y_i'(x_i)]^2 dx_i \right\}^2 \dot{T}_i T_i^2 = -E_i \dot{T}_i T_i^2, \quad i = 1, 2,$$

gdzie oznaczono

$$(2.16) \quad E_i = k \left\{ \int_0^{l_i} [Y_i'(x_i)]^2 dx_i \right\}^2, \quad i = 1, 2.$$

Siły uogólnione w przypadku tłumienia wewnętrznego (model Voigta–Kelvina) wyrazimy przez funkcję dysypacji Rayleigha R . W przypadku belki wykonującej drgania poprzeczne mamy

$$(2.17) \quad \sigma'_x = -\eta z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}$$

gdzie σ'_x oznacza naprężenia odpowiadające siłom dysypatywnym; η jest współczynnikiem lepkości.

Moment zginający odpowiadający siłom dysypatywnym ma postać

$$(2.18) \quad M = \iint_F \sigma'_x z dF = -\eta \iint_F z^2 dF \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = -\eta I \dot{\varkappa},$$

gdzie

$$\varkappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Korzystając z założenia 2) mamy

$$(2.19) \quad M_i = -\eta I_i Y_i'' \dot{T}_i, \quad i = 1, 2.$$

Widzimy więc, że momenty zginające M_i (siły uogólnione) są proporcjonalne do prędkości uogólnionych. Zatem dodatnia forma kwadratowa postaci

$$(2.20) \quad R = \frac{1}{2} \eta \int_0^l I(x) \dot{\varkappa}^2 dx = \frac{1}{2} \eta \int_0^l I(x) Y_i''^2 \dot{T}_i^2 dx$$

jest poszukiwaną funkcją dysypacji Rayleigha dla belki wykonującej drgania poprzeczne. Siły uogólnione odpowiadające siłom dysypatywnym mają zatem postać

$$(2.21) \quad Q_{D_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{T}_i} = \eta_i \int_0^{l_i} I_i(x_i) Y_i''^2(x_i) dx_i \dot{T}_i = D_i \dot{T}_i,$$

gdzie oznaczono

$$(2.22) \quad D_i = \eta_i \int_0^{l_i} I_i(x_i) Y_i''^2(x_i) dx_i.$$

Sily uogólnione odpowiadające ciągłym obciążeniom zewnętrznym mają postać

$$(2.23) \quad Q_i = \int_0^{l_i} q_i(x_i, t) Y_i(x_i) dx_i = \Gamma_i \sin \omega t$$

gdzie

$$(2.24) \quad \Gamma_i = \int_0^{l_i} \gamma_i Y_i(x_i) dx_i$$

oraz przyjęto

$$q_i(x_i, t) = \gamma_i \sin \omega t.$$

Wstawiając siły (2.11), (2.15), (2.21) i (2.23) do równań Lagrange'a uzyskujemy układ zwyczajnych różniczkowych równań ruchu, nieliniowych postaci

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \ddot{T}_1 + \omega_{01}^2 T_1 &= \frac{C}{A} T_2 T_1 - \frac{D}{A} \dot{T}_1 - \frac{E}{A} \dot{T}_1 T_1^2 + \frac{\Gamma_1}{A} \sin \omega t, & \omega_{01}^2 &= \frac{B}{A}, \\ \ddot{T}_2 + \omega_{02}^2 T_2 &= -\frac{\bar{C}}{\bar{A}} T_1 T_2 - \frac{\bar{D}}{\bar{A}} \dot{T}_2 - \frac{\bar{E}}{\bar{A}} \dot{T}_2 T_2^2 + \frac{\Gamma_2}{\bar{A}} \sin \omega t, & \omega_{02}^2 &= \frac{\bar{B}}{\bar{A}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.26) \quad \begin{aligned} A &= \int_0^{l_1} m_1(x_1) Y_1^2(x_1) dx_1, \\ B &= E_1 \int_0^{l_1} I_1(x_1) [Y_1''(x_1)]^2 dx_1, \\ \bar{A} &= \int_0^{l_2} m_2(x_2) Y_2^2(x_2) dx_2, \\ \bar{B} &= E_2 \int_0^{l_2} I_2(x_2) [Y_2''(x_2)]^2 dx_2. \end{aligned}$$

3. AMPLITUDY REZONANSOWE W STANIE USTALONYM REZONANSU WEWNĘTRZNEGO

Przedstawiona w pracach [1 i 2] metoda bilansu harmoniczných pozostaje poprawna również w przypadku prętów niepryzmatycznych o dowolnie zmieniających się wzdłuż belek przekrojach poprzecznych. Opierając się na wynikach podanych prac i ograniczając się do sytuacji 1 z tablicy 1, uzysku-

jemy na wielkość X_1 , proporcjonalną do kwadratu amplitudy elementu I, $R_1 = 2\sqrt{X_1}$, równanie

$$(3.1) \quad aX_1^3 + bX_1^2 + cX_1 + d = 0,$$

gdzie

$$(3.2) \quad a = 1, \quad b = 2\frac{D}{E}, \quad c = 4\left(\frac{A}{E}\right)^2\left(\sqrt{\frac{B}{A}} - \omega\right)^2 + \left(\frac{D}{E}\right)^2,$$

$$d = -\frac{\Gamma_1^2 A}{4E^2 B}.$$

Natomiast na wielkość X_2 , proporcjonalną do kwadratu amplitudy elementu II, uzyskano równanie:

$$(3.3) \quad X_2 = \left[\left(\frac{\bar{C}}{\bar{E}} \right)^2 \frac{X_1}{\omega_{02}^2} - 4 \left(\frac{\bar{A}}{\bar{E}} \right)^2 \left(\omega_{02} - \frac{\omega}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\bar{D}}{\bar{E}}, \quad \omega_{02} = \frac{\bar{B}}{\bar{A}}.$$

W obecnej sytuacji X_1 nie zależy od X_2 , jest funkcją parametrów kształtu tylko pręta poziomego (ze względu na przybliżoną metodę rozwiązania, która odrzuca sprzężenie ze strony pręta niewymuszanego zewnątrznie). Amplituda elementu R_2 jest typową odpowiedzią przy rezonansie parametrycznym. Układ wymuszony zewnątrznie i dostrojony na rezonans wewnętrzny jest bardzo bliski układowi wymuszanemu parametrycznie. Ze wzoru (3.3) widać konieczność uwzględnienia nieliniowości, gdy bowiem $E \rightarrow 0$, uzyskujemy trywialne rozwiązania $R_2 \rightarrow \infty$. Wielkość X_2 , a zatem również amplituda R_2 elementu, są uzależnione od współczynników kształtu obydwu elementów.

4. OPTIMALIZACJA PARAMETRYCZNA

Przyjmując określony sposób zmiany przekrojów poprzecznych, wprowadzamy pewne charakterystyczne współczynniki kształtu. Jako funkcję celu w procesie optymalizacji przyjmujemy amplitudę elementu wymuszanego parametrycznie. Jako warunki ograniczające założymy stałość objętości jednego z elementów lub całego układu. Zmiennymi optymalizacji będą wprowadzone parametry kształtu, przy zmianie których układ pozostaje jednak w pobliżu rezonansu wewnętrznego. Założymy, że przekroje prętów pozostają kwadratowe. Przyjmiemy, że wymiar poprzeczny belki I zmienia się według paraboli stopnia drugiego (rys. 2):

$$(4.1) \quad a_1(\alpha_1, x_1) = \alpha_1 \left\{ 4x_1 \left(\frac{x_1^2}{l_1^2} - \frac{x_1}{l_1} \right) + 1 \right\},$$

gdzie

$$\kappa_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1}, \quad a_1(0) = \alpha_1, \quad a_1\left(\frac{l_1}{2}\right) = \beta_1, \quad \kappa_1 \in (-\infty, 1).$$

Natomiast wymiar belki II zmienia się zgodnie ze wzorem

$$(4.2) \quad a_2(\alpha_2, \kappa_2) = \alpha_2 \left\{ 1 - \kappa_2 \frac{x_2}{l_2} \right\},$$

gdzie

$$\kappa_2 = \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2}, \quad a_2(0) = \alpha_2, \quad a_2(l_2) = \beta_2, \quad \kappa_2 \in (-\infty, 1).$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \bar{a}_1 &= 1 + 4\kappa_1 (\xi_1^2 - \xi_1), & \xi_1 &= \frac{x_1}{l_1}, \\ \bar{a}_2 &= 1 - \kappa_2 \xi_2, & \xi_2 &= \frac{x_2}{l_2}, \end{aligned}$$

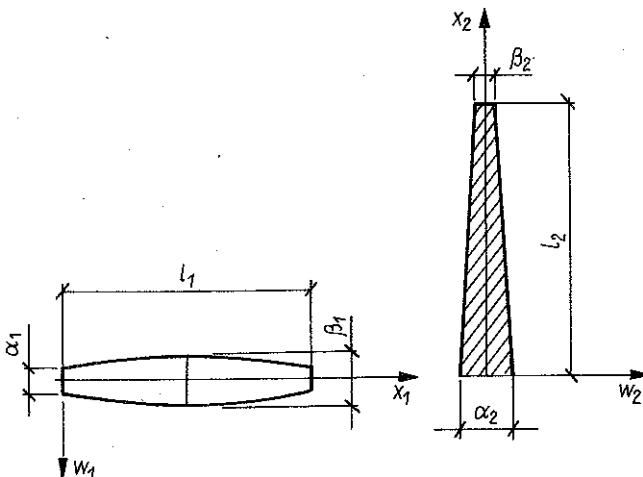
mamy

$$(4.4) \quad a_1 = \alpha_1 \bar{a}_1, \quad a_2 = \alpha_2 \bar{a}_2.$$

Wobec tego

$$(4.5) \quad F_i(\xi_i, \alpha_i, \kappa_i) = \alpha_i^2 \bar{a}_i^2, \quad m_i(\xi_i, \alpha_i, \kappa_i) = \rho_i F_i, \quad I_i = \frac{1}{12} \alpha_i^4 \bar{a}_i^4, \quad i = 1, 2.$$

Problem optymalizacji parametrycznej sformułujemy następująco: Poszukujemy takich wartości parametrów α_i oraz κ_i określających kształt prętów, aby w stanie ustalonym rezonansu wewnętrznego, to znaczy przy relacjach



Rys. 2. Parametry elementów układu i ich kształt

między częstościami z tablicy 1 oraz przy dodatkowym warunku nałożonym na objętości elementów, amplituda R_2 elementu II wymuszanego parametrycznie, przyjmowała wartość minimalną:

$$(4.6) \quad \min R_2 [\alpha_2, \kappa_2, X_1(\alpha_1, \kappa_1)],$$

gdzie X_1 spełnia równania algebraiczne stopnia trzeciego (3.1).

Podstawiając (4.5) do wzorów (2.26) (2.22) (2.16) (2.12) mamy

$$A(\alpha_1, \kappa_1) = \varrho_1 l_1 \alpha_1^2 \int_0^1 \bar{a}_1^2 Y_1^2 dx = \varrho_1 l_1 \alpha_1^2 f_A(\kappa_1),$$

$$B(\alpha_1, \kappa_1) = \frac{1}{12} E_1 \alpha_1^4 \frac{1}{l_1^3} \int_0^1 \bar{a}_1^4 Y_1''^2 dx = E_1 \alpha_1^4 \frac{1}{l_1^3} f_B(\kappa_1),$$

$$D(\alpha_1, \kappa_1) = \frac{1}{12} \eta_1 \alpha_1^4 \frac{1}{l_1^3} \int_0^1 \bar{a}_1^4 Y_1''^2 dx = \eta_1 \alpha_1^4 \frac{1}{l_1^3} f_D(\kappa_1),$$

$$E = k \frac{1}{l_1^2} \left\{ \int_0^1 Y_1'^2 dx \right\}^2 = k \frac{1}{l_1^2} f_E, \quad \bar{E} = k \frac{1}{l_2^2} \left\{ \int_0^1 Y_2'^2 dx \right\}^2 = k \frac{1}{l_2^2} f_{\bar{E}},$$

(4.7)

$$\bar{A}(\alpha_2, \kappa_2) = \varrho_2 l_2 \alpha_2^2 \int_0^1 \bar{a}_2^2 Y_2^2 dx = \varrho_2 l_2 \alpha_2^2 f_{\bar{A}}(\kappa_2),$$

$$\bar{B}(\alpha_2, \kappa_2) = \frac{1}{12} E_2 \alpha_2^4 \frac{1}{l_2^3} \int_0^1 \bar{a}_2^4 Y_2''^2 dx = E_2 \alpha_2^4 \frac{1}{l_2^3} f_{\bar{B}}(\kappa_2),$$

$$\bar{D}(\alpha_2, \kappa_2) = \frac{1}{12} \eta_2 \alpha_2^4 \frac{1}{l_2^3} \int_0^1 \bar{a}_2^4 Y_2''^2 dx = \eta_2 \alpha_2^4 \frac{1}{l_2^3} f_{\bar{D}}(\kappa_2),$$

$$\bar{C} = E_1 \left[\frac{dI_1(x_1)}{dx_1} Y_1''(x_1) + I_1(x_1) Y_1'''(x_1) \right]_{x_1=0} \frac{1}{l_2} \int_0^1 [Y_2]^2 dx,$$

$$\Gamma_1 = \gamma_1 l_1 \int_0^1 Y_1 dx = f_{\Gamma}.$$

W sytuacji z tablicy 1 relacje między częstościami są następujące:

$$(4.8) \quad \omega \approx \omega_{01} = \sqrt{\frac{B(\alpha_1, \kappa_1)}{A(\alpha_1, \kappa_1)}}$$

$$(4.9) \quad \omega_{01} = 2\omega_{02} = 2 \sqrt{\frac{\bar{B}(\alpha_2, \kappa_2)}{\bar{A}(\alpha_2, \kappa_2)}}$$

Przy analizowaniu zależności amplitudy R_2 od częstotliwości warunek (4.9) spełniamy w sposób ścisły, natomiast ω zmieniamy w małym otoczeniu ω_{01} pozostając w ten sposób cały czas w pobliżu rezonansu wewnętrznego. Korzystając z oznaczeń wprowadzonych w (4.7), mamy

$$(4.10) \quad \frac{f_A}{f_B} - 4\mu \frac{f_A}{f_B} = 0,$$

gdzie

$$\mu = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) \left(\frac{E_2}{E_1}\right) \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^4.$$

Ze względu na dodatkowy warunek stałej objętości możliwe są cztery następujące przypadki, które przedyskutujemy oddzielnie:

- 1) $V_2 = \text{const.}$
- 2) $V_1 = \text{const.}$
- 3) $V_1 + V_2 = \text{const.}$
- 4) $V_1 = \text{const.}, \quad V_2 = \text{const.}$

Ponadto w każdym z tych przypadków można rozważać sytuacje szczególne, gdy jeden z prętów jest przyzmatyczny, a przekrój drugiego zmienia się w sposób określony.

Rozważmy kolejno przypadki.

Sytuacja 1. Żądamy, aby objętość pręta, w którym zachodzi rezonans autparametryczny pozostawała stała:

$$(4.12) \quad V_2 = \int_0^{l_2} a_2^2 dx = l_2 \alpha_2^2 \int_0^1 (1 - \kappa_2 x)^2 dx = l_2 \alpha_2^2 \left(1 - \kappa_2 + \frac{1}{3} \kappa_2^2\right) = \text{const.}$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe, mamy

$$(4.13) \quad \left(\frac{l_2}{l_1}\right) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \left(1 - \kappa_2 + \frac{1}{3} \kappa_2^2\right) = \frac{V_2}{l_1 \alpha_1^2} = \bar{V}.$$

Wobec tego

$$(4.14) \quad \mu_1^2 \left(\frac{l_2}{l_1}\right) = \frac{\bar{V}}{f_2(\kappa_2)},$$

gdzie

$$\mu_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad f_2 = 1 - \kappa_2 + \frac{1}{3} \kappa_2^2, \quad \bar{V} > 0.$$

W tym przypadku warunek rezonansowy ma postać

$$(4.15) \quad \frac{f_{\bar{A}}(\alpha_2)}{f_{\bar{B}}(\alpha_2)} = 4\mu_2 \frac{\bar{V}}{f_2(\alpha_2)} \frac{f_A(\alpha_1)}{f_B(\alpha_1)},$$

gdzie

$$\mu_2 = \left(\frac{E_2}{E_1}\right) \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^5.$$

Współczynniki μ , μ_1 i μ_2 spełniają związek

$$(4.16) \quad \mu = \mu_1^2 \left(\frac{l_2}{l_1}\right) \mu_2 = \mu_1^2 \frac{1}{\mu_4} \mu_2,$$

gdzie

$$\mu_4 = \frac{l_1}{l_2}.$$

Sytuacja 2. W tym przypadku żądamy stałej objętości elementu I, który jest wymuszany harmonicznie, i w którym zachodzi rezonans główny:

$$(4.17) \quad V_1 = \int_0^{l_1} a_1^2 dx = l_1 \alpha_1^2 \left(1 - \frac{4}{3} \alpha_1 + \frac{8}{15} \alpha_1^2\right) = \text{const.}$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe, mamy

$$(4.18) \quad \frac{l_1(\alpha_1)^2}{l_2(\alpha_2)^2} \left(1 - \frac{4}{3} \alpha_1 + \frac{8}{15} \alpha_1^2\right) = \frac{V_1}{l_2 \alpha_2^2} = \bar{V}.$$

Wobec tego

$$(4.19) \quad \frac{l_2}{l_1} \mu_1^2 = \frac{f_1(\alpha_1)}{\bar{V}},$$

gdzie

$$f_1 = 1 - \frac{4}{3} \alpha_1 + \frac{8}{15} \alpha_1^2, \quad \bar{V} > 0.$$

Warunek rezonansowy ma postać

$$(4.20) \quad \frac{f_{\bar{A}}(\alpha_2)}{f_{\bar{B}}(\alpha_2)} = 4\mu_2 \frac{f_1(\alpha_1)}{\bar{V}} \frac{f_A(\alpha_1)}{f_B(\alpha_1)}$$

Sytuacja 3. Suma objętości obydwu elementów I, II powinna pozostawać stała. Warunek ten narzuca większe ograniczenie na parametry rozważanego układu. Obecnie

$$(4.21) \quad l_1 \alpha_1^2 \left(1 - \frac{4}{3} \alpha_1 + \frac{8}{15} \alpha_1^2\right) + l_2 \alpha_2^2 \left(1 - \alpha_2 + \frac{1}{3} \alpha_2^2\right) = V = \text{const.}$$

Natomiast wprowadzając zmienną bezwymiarową, mamy

$$(4.22) \quad \mu_1^2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right) = \frac{\bar{V} - f_1(x_1)}{f_2(x_2)}$$

gdzie

$$\bar{V} = \frac{V}{l_1 \alpha_1^2}$$

Warunek rezonansowy ma obecnie postać

$$(4.23) \quad \frac{f_A(x_2)}{f_B(x_2)} = 4\mu_2 \frac{\bar{V} - f_1(x_1)}{f_2(x_2)} \frac{f_A(x_1)}{f_B(x_1)}$$

Sytuacja 4. Objętości obu elementów pozostają stałe:

$$(4.24) \quad l_1 \alpha_1^2 f_1 = V_1 = \text{const} \quad \text{oraz} \quad l_2 \alpha_2^2 f_2 = V_2 = \text{const}$$

Po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej, mamy

$$(4.25) \quad \frac{l_2}{l_1} \mu_1^2 = \frac{\bar{\bar{V}} - f_1(x_1)}{f_2(x_2)}$$

gdzie

$$\bar{\bar{V}} = \frac{V_2}{V_1} = \text{const}$$

Warunek rezonansowy jest następujący:

$$(4.26) \quad \frac{f_A(x_2)}{f_B(x_2)} = 4\mu_2 \frac{\bar{\bar{V}} - f_1(x_1)}{f_2(x_2)} \frac{f_A(x_1)}{f_B(x_1)}$$

Warunek rezonansowy we wszystkich czterech sytuacjach można zapisać jednym wzorem:

$$(4.27) \quad \frac{f_A(x_2)}{f_B(x_2)} - 4\mu_2 f(x_1, x_2) \frac{f_A(x_1)}{f_B(x_1)} = 0,$$

gdzie

$$(4.28) \quad f = \frac{\bar{V}}{f_2}, \quad f = \frac{f_1}{\bar{V}}, \quad f = \frac{\bar{V} - f_1}{f_2}, \quad f = \frac{\bar{\bar{V}} - f_1}{f_2}$$

odpowiednio w sytuacji 1, 2, 3, 4.

Ponieważ w pracy przeprowadzamy przybliżoną analizę, przeto zaniebujemy wpływ zmiany współczynników kształtu na formy drgań elementów I i II. Zależność form od współczynników kształtu można uwzględnić, stosując na przykład metodę Ritz'a.

5. OBLICZENIA NUMERYCZNE I WNIOSKI

W celu wykonania obliczeń numerycznych wprowadzamy następujące zmienne bezwymiarowe:

$$(5.1) \quad \bar{X}_1 = \frac{X_1}{l_1^2}, \quad \bar{X}_2 = \frac{X_2}{l_2^2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_{01}}$$

oraz współczynniki bezwymiarowe

$$(5.2) \quad \bar{\eta}_1 = \frac{\eta_1 \alpha_1^4}{kl_1^3}, \quad \bar{\eta}_2 = \frac{\eta_2 \alpha_2^4}{kl_2^3},$$

$$\bar{\varrho}_1 = \frac{\varrho_1 E_1 l_1^4}{\eta_1^2 \alpha_1^2}, \quad \bar{\varrho}_2 = \frac{\varrho_2 E_2 l_2^4}{\eta_2^2 \alpha_2^2}.$$

Wówczas równanie stopnia trzeciego ma postać

$$(5.3) \quad \bar{a}_1 \bar{X}_1^3 + \bar{b}_1 \bar{X}_1^2 + \bar{c}_1 \bar{X}_1 + \bar{d}_1 = 0,$$

gdzie

$$(5.4) \quad \bar{a}_1 = 1, \quad \bar{b}_1 = 2\bar{\eta}_1 \frac{f_D(x_1)}{f_E},$$

$$\bar{c}_1 = \bar{\eta}_1^2 \left\{ \frac{4\bar{\varrho}_1 f_A(x_1) f_B(x_1)}{f_E^2} (1-\Omega)^2 + \left[\frac{f_D(x_1)}{f_E} \right]^2 \right\},$$

$$\bar{d}_1 = -\frac{1}{4} \bar{\varrho}_1 \bar{\eta}_1^2 \frac{f_F^2 f_A(x_1)}{f_E^2 f_B(x_1)}.$$

Natomiast równanie kwadratowe (3.3) ma postać

$$(5.5) \quad \bar{X}_2 = \bar{\eta}_2 \frac{f_D(x_2)}{f_E} \left[-1 + \left\{ \bar{\varrho}_2 \frac{f_A(x_2) f_B(x_2)}{f_D(x_2)^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \left[\left(\frac{E_1}{E_2} \right)^2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^4 \frac{1}{\mu_1^8} \frac{f_C^2}{f_B^2(x_2)} \bar{X} - 4(1-\Omega)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right].$$

Obliczymy obecnie funkcje $f_A, f_B \dots$ itd. W tym celu należy określić formy elementów I i II. Uzyskamy je rozwiązując problem brzegowy dla oddzielnych prętów, które na podstawie założenia 4) traktujemy jako swobodne. Jak wspomiano poprzednio, zanedbujemy również wpływ współczynników kształtu na formy drgań.

Dla pręta poziomego mamy więc

$$(5.6) \quad Y_1 = \sin \pi \frac{x_1}{l_1},$$

natomiast dla elementów pionowych mamy

$$(5.7) \quad Y_2 = -\cos \lambda_1 \left[\sin \lambda_1 \frac{x_2}{l_2} - \operatorname{sh} \lambda_1 \frac{x_2}{l_2} - \operatorname{tg} \lambda_1 \left(\cos \lambda_1 \frac{x_2}{l_2} - \operatorname{ch} \lambda_1 \frac{x_2}{l_2} \right) \right],$$

gdzie $\lambda_1 = 3,9266$.

Korzystając ze wzorów (5.6), (5.7) oraz ze wzoru na współczynnik \bar{C} w postaci (4.7), mamy:

$$(5.8) \quad \bar{C}(\alpha_1) = E_1 I_1(0) X_1'''(0) \frac{1}{l_2} \int_0^1 Y_2'^2 dx = E_1 \frac{\alpha_1^4}{l_1^3 l_2} f_C,$$

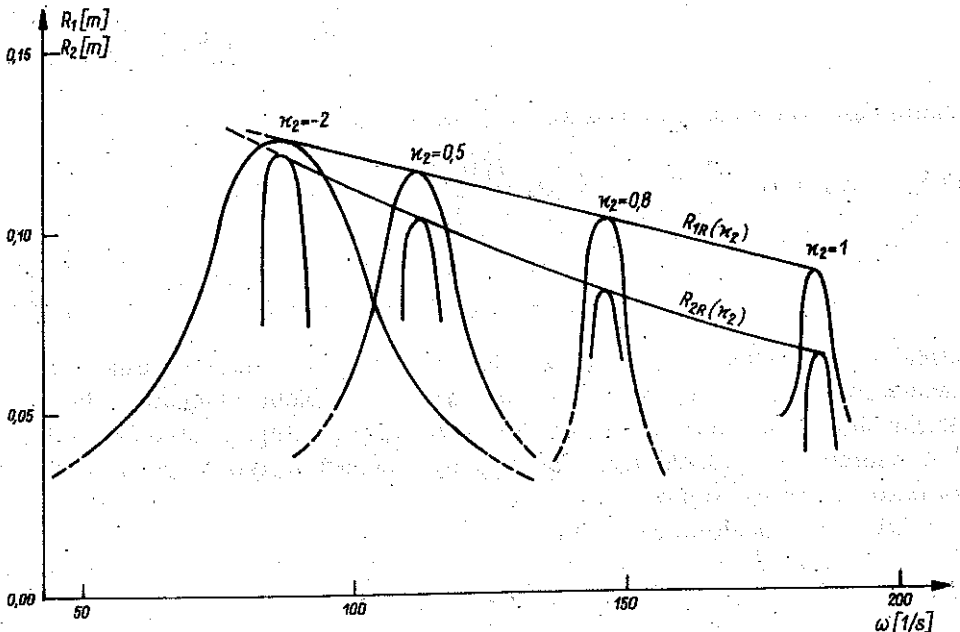
gdzie $f_C = -14,40$.

Przystępujemy obecnie do określenia amplitudy zewnętrznego wymuszania harmonicznego. Przyjmujemy, że amplituda gęstości liniowej obciążenia dynamicznego, niewiele się różni od gęstości liniowej obciążenia statycznego. Korzystając ze wzoru na strzałkę ugięcia dla belki pryzmatycznej swobodnie podpartej, obciążonej w sposób ciągły ($q_1 = \text{const}$) oraz przyjmując, że odkształcenia względne są rzędu kilku procent, mamy

$$(5.9) \quad q_1 = \gamma_1 = \frac{3,84}{5} \frac{E_1 I_1}{l_1^3} \quad \text{oraz} \quad F_1 = f_r = 85,5 \cdot 10^7 \text{ N,} \quad \text{gd}y \quad \alpha_1 = 0,5 \text{ m.}$$

Obliczenia przeprowadzamy dla prętów stalowych. W celu określenia współczynnika η dla stali skorzystano z [6]. Aby oszacować wartość współczynnika k posłużono się monografią [5].

Ostatecznie przyjęto:



Rys. 3. Wykresy $R_1(\alpha_1 \kappa_2 \omega)$, $R_2(\alpha_1 \kappa_2 \omega)$ przy $V_2 = \text{const}$, $\alpha_1 = 0,3 \text{ m}$

$$(5.10) \quad E_1 = E_2 = 2,2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad \varrho_1 = \varrho_2 = 7,7 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$\eta_1 = \eta_2 = 1 \cdot 10^7 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}, \quad k = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Obliczenia zostały przeprowadzone dla belek o długościach $l_1 = 8 \text{ m}$, $l_2 = 14 \text{ m}$.

Wymiary poprzeczne belek przyjmowały wartości:

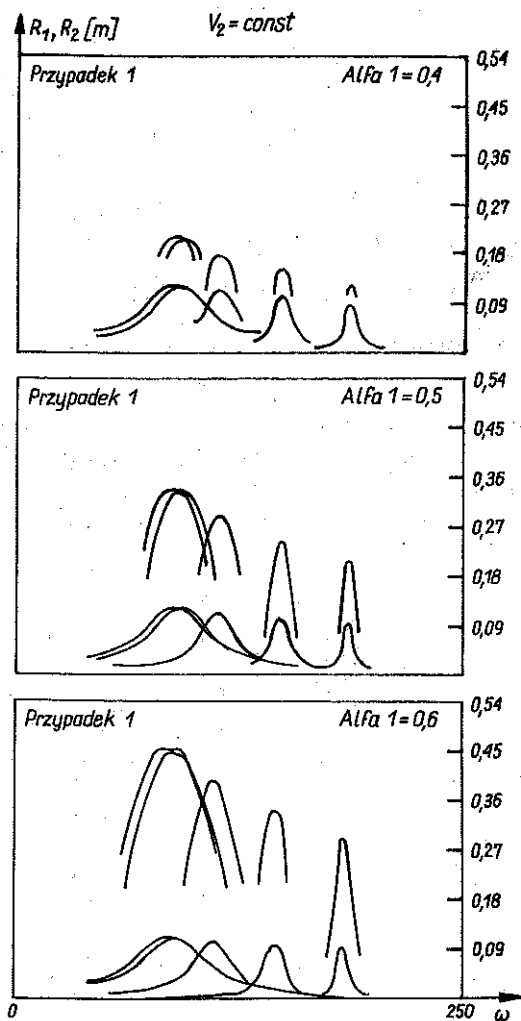
$$(5.11) \quad \alpha_1, \alpha_2 \in [0,3, 0,4, 0,5, 0,6] \text{ m}.$$

W zależności od przypadku (por. (4.11)) przyjęliśmy: $V_1 = \text{const} = 1 \text{ m}^3$, $V_2 = \text{const} = 2 \text{ m}^3$, $V = V_1 + V_2 = 3 \text{ m}^3$.

Uzyskane rezultaty zilustrujemy wykresami przedstawionymi na rysunkach oraz tablicami zawierającymi wyniki obliczeń. Rysunek 3 i tablica 2 przedstawiają funkcje $R_1(\alpha_1, \alpha_2, \omega)$, $R_2(\alpha_1, \alpha_2, \omega)$ przy $V_2 = \text{const}$. Przyjęto, że wymiar poprzeczny belki $\alpha_1 = 0,3 \text{ m}$, co oznacza, że sprzężenie elemen-

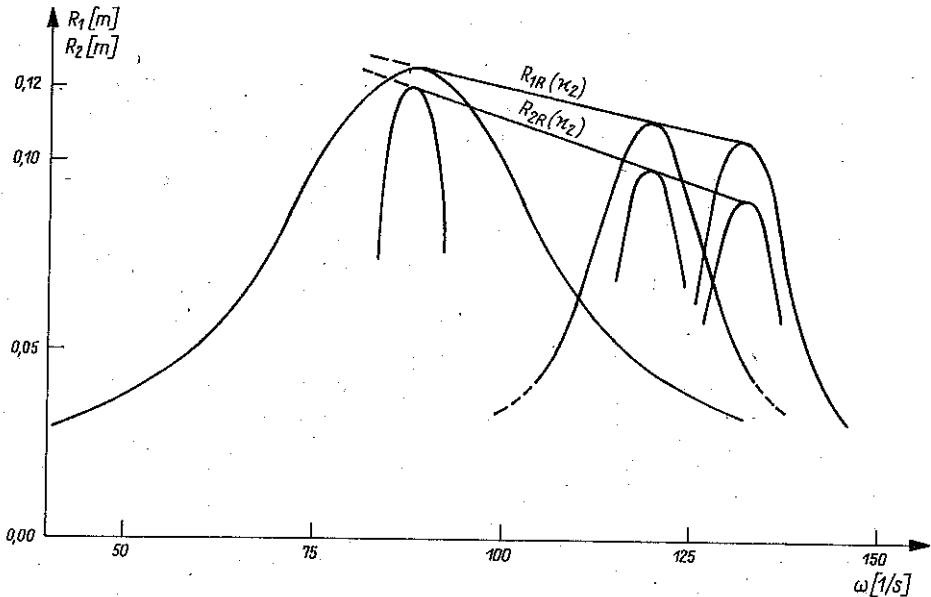
Tablica 2

α_2	α_1	$\omega_{\text{REZ}} [s^{-1}]$	$R_{1\text{REZ}} [m]$	$R_{2\text{REZ}} [m]$
$V_2 = \text{const} \quad \alpha_1 = 0,3$				
-2,0	-0,2663	88,17	0,1256	0,1220
0,0	-0,3216	91,70	0,1240	0,1187
0,5	-0,6486	112,8	0,1154	0,1025
0,8	-1,171	146,7	0,1030	0,0823
1,0	-1,760	185,1	0,08584	0,06480
$V_2 = \text{const} \quad \alpha_1 = 0,4$				
-2,0	0,08510	88,17	0,1246	0,2173
0,0	0,04209	91,69	0,1231	0,2117
0,5	-0,2096	111,6	0,1154	0,1844
0,8	-0,6070	146,7	0,1047	0,1531
1,0	-1,052	185,3	0,09003	0,1249
$V_2 = \text{const} \quad \alpha_1 = 0,5$				
-2,0	0,3063	88,17	0,1203	0,3341
0,0	0,2699	91,69	0,1191	0,3259
0,5	0,0603	112,7	0,1129	0,2859
0,8	-0,2644	146,7	0,1049	0,2411
1,0	-0,6242	185,2	0,0940	0,2022
$V_2 = \text{const} \quad \alpha_1 = 0,6$				
-2,0	0,4649	88,17	0,1087	0,4576
0,0	0,4320	91,69	0,1079	0,4472
0,5	0,2468	112,7	0,1047	0,3969
0,8	-0,3197	146,7	0,1012	0,3416
1,0	-0,3363	186,2	0,0951	0,2947



Rys. 4. Wykresy $R_1(\alpha_1, \kappa_2, \omega)$, $R_2(\alpha_1, \kappa_2, \omega)$ przy $V_2 = \text{const}$, $\alpha_1 = [0,4, 0,5, 0,6]$ m

tów I i II jest ustalone. Na rysunku tym przedstawiono również funkcje $R_{1\text{REZ}}(\kappa_2)$ oraz $R_{2\text{REZ}}(\kappa_2)$. Widać, że ze wzrostem wartości współczynnika κ_2 amplitudy rezonansowe maleją. Wartości amplitud elementu II wymuszanego parametrycznie są mniejsze od amplitud elementu I. Na wykresach widzimy wyraźny wpływ współczynnika kształtu na częstotliwość rezonansową oraz na szerokość obszaru częstotliwości, w którym zjawisko zachodzi. Rysunek 4 i tablica 2 przedstawiają wartości funkcji $R_1(\alpha_1, \kappa_2, \omega)$ i $R_2(\alpha_1, \kappa_2, \omega)$ dla różnych wartości parametrów $\alpha_1 \in [0,4, 0,5, 0,6]$ m, tzn. przy różnych wartościach sił sprzęgających. Przy ustalonym κ_2 wzrost α_1 powoduje znaczny wzrost amplitudy elementu II wymuszanego parametrycznie. Zjawisko zachodzi również w coraz większym obszarze częstotliwości. Amplitudy elementu II



Rys. 5. Wykresy $R_1(\alpha_1, \kappa_2, \omega)$, $R_2(\alpha_1, \kappa_2, \omega)$ przy $V_1 + V_2 = \text{const}$, $\alpha_1 = 0,3 \text{ m}$

wymuszanego parametrycznie są w tym przypadku dużo większe od amplitud elementu I. Widać również, że ze wzrostem wartości współczynnika α_1 współczynnik kształtu κ_2 ma większy wpływ na wartości amplitud w rezonansie parametrycznym. Rysunki 5, 6 i 7 i tablica 3 odnoszą się do problemu optymalizacji parametrycznej przy warunku $V_1 + V_2 = \text{const}$. Przedstawiono analogiczne zależności. Jakościowo wyniki są podobne z tym zastrzeżeniem, że wpływ współczynnika kształtu na częstość rezonansową jest mniejszy (rys. 4 i 6). Na rysunku 7 przedstawiamy układ optymalny.

Elementy układu mają optymalny kształt, tzn. parametry układu α_1 , α_2 , β_1 , β_2 zostały dobrane tak, aby amplituda rezonansowa drgań belki pionowej II przyjmowała wartość minimalną. Rysunek 8 i tablica 4 ilustrują przypadek przy warunku $V_1 = \text{const}$, $V_2 = \text{const}$. Widać wyraźnie różnice jakościowe w porównaniu z poprzednimi przypadkami. Dla wszystkich wartości współczynnika κ_2 rezonans wewnętrzny występuje w bardzo małym obszarze częstości. Zjawisko to zachodzi przy częstościach wyższych. Wartości amplitud na przykład przy $\alpha_1 = 0,6$ są dużo mniejsze niż w poprzednich przypadkach. Tutaj optymalny kształt uzyskujemy dla $\kappa_2 = 0$, tzn. dla pręta II przyrządnego. Dla dodatnich wartości κ_2 rozwiązania nie istnieją.

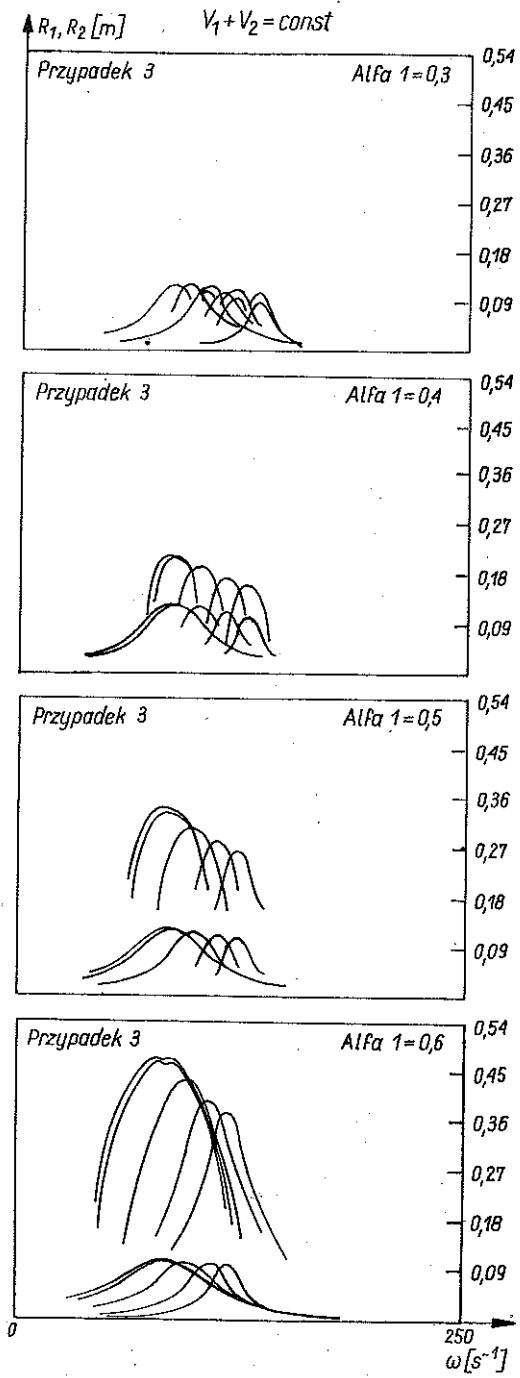
Przeanalizowano również przypadek $V_1 = \text{const}$. Na podstawie uzyskanych rezultatów stwierdziliśmy, że przy ustalonym α_2 współczynnik kształtu κ_2 bardzo wpływa na amplitudy, natomiast nie obserwujemy w ogóle wpływu na częstość rezonansową i szerokość obszaru częstości, w którym zjawisko zachodzi.

Tablica 3

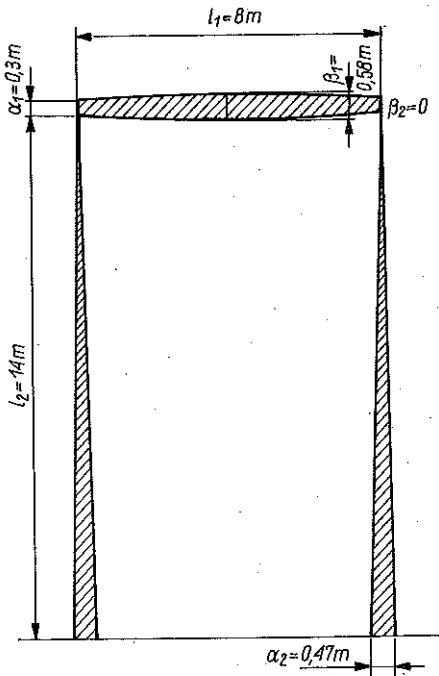
α_2	α_1	$\omega_{REZ} [s^{-1}]$	$R_{1REZ} [m]$	$R_{2REZ} [m]$
$V_1 + V_2 = \text{const} \quad \alpha_1 = 0,3$				
-2,0	-0,2655	88,12	0,1260	0,1220
0,0	-0,3040	90,59	0,1245	0,1197
0,5	-0,5087	103,71	0,1189	0,1090
0,8	-0,7573	119,8	0,1128	0,09880
1,0	-0,9505	131,0	0,1060	0,0920
$V_1 + V_2 = \text{const} \quad \alpha_1 = 0,4$				
-2,0	0,1118	85,98	0,1255	0,2209
0,0	0,08280	88,35	0,1245	0,2170
0,5	-0,06826	100,85	0,1195	0,1989
0,8	-0,2493	116,11	0,1143	0,1813
1,0	-0,3884	129,2	0,1105	0,1698
$V_1 + V_2 = \text{const} \quad \alpha_1 = 0,5$				
-2,0	0,3522	83,78	0,1219	0,34515
0,0	0,3285	86,04	0,1211	0,3394
0,5	0,2073	97,87	0,1171	0,3129
0,8	0,06537	112,3	0,1131	0,2871
1,0	-0,04197	124,6	0,1104	0,2706
$V_1 + V_2 = \text{const} \quad \alpha_1 = 0,6$				
-2,0	0,5275	77,63	0,1110	0,4800
0,0	0,5067	79,63	0,1100	0,4700
0,5	0,4000	94,97	0,1070	0,4381
0,8	0,2850	108,3	0,1051	0,4062
1,0	0,1977	118,6	0,1043	0,3861

Tablica 4

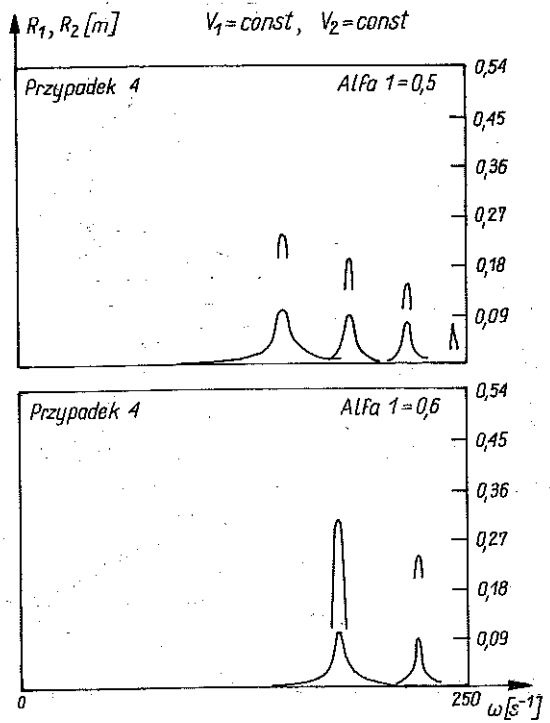
α_2	α_1	$\omega_{REZ} [s^{-1}]$	$R_{1REZ} [m]$	$R_{2REZ} [m]$
$V_1 = \text{const} \quad V_2 = \text{const} \quad \alpha_1 = 0,5$				
-2,0	-0,2764	148,0	0,1046	0,2362
0,0	-0,6207	184,9	0,09416	0,1930
0,1	-0,9223	217,5	0,07787	0,1457
0,15	-1,165	243,9	0,0501	0,06683
$V_1 = \text{const} \quad V_2 = \text{const} \quad \alpha_1 = 0,6$				
-2,0	-0,2764	177,6	0,09692	0,2972
0,0	-0,6207	221,9	0,08290	0,2327



Rys. 6. Wykresy $R_1(\alpha_1, \kappa_2, \omega)$, $R_2(\alpha_1, \kappa_2, \omega)$ przy $V_1 + V_2 = const$ oraz przy $\alpha_1 \in [0,4, 0,5, 0,6] m$



Rys. 7. Układ optymalny przy warunku $V_1 + V_2 = \text{const}$, $\alpha_1 = 0,3 \text{ m}$



Rys. 8. Wykresy $R_1(\alpha_1 \times_2 \omega)$, $R_2(\alpha_1 \times_2 \omega)$ przy $V_1 = \text{const}$, $V_2 = \text{const}$, $\alpha_1 \in [0,5, 0,6] \text{ m}$

6. ZAKOŃCZENIE

Na podstawie uzyskanych rezultatów widać wyraźny wpływ parametrów kształtu na amplitudy rezonansowe R_1 i R_2 . Szczególnie interesujące jest to dla tego elementu, w którym zachodzi rezonans autoparametryczny. Dobierając odpowiednie kształty prętów w przyjętej klasie funkcji, tzn. zmieniając współczynnik κ_2 , co wiąże się ze zmianą współczynnika κ_1 , (pozostajemy cały czas w pobliżu rezonansu wewnętrznego), uzyskujemy znaczne zmniejszenie amplitudy rezonansowej $R_2(\omega)$. Jest to ważny rezultat ze względu na szczególnie niebezpieczeństwo wystąpienia tego typu zjawisk w realnych konstrukcjach. Przy optymalnych wartościach współczynników kształtu rezonans o charakterze parametrycznym występuje również w mniejszym obszarze częstości. Przez zmianę współczynników kształtu rezonans autoparametryczny zostaje przesunięty w inne obszary częstości.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. FORYŚ, *Drgania i stabilność dynamiczna wybranych układów prętowych*, Praca doktorska, Polit. Krakowska, 1981.
2. A. FORYŚ, *Vibrations and dynamical stability of some system of rods in nonlinear approach*, Zagad. Drgań Nielin. [w druku].
3. A. TONDL, *Some problems of rotor dynamics*, Czech. Academy of Sciences, Prague 1965.
4. R. CIESIELSKI, E. MACIĄG, A. ZIĘBA, *Badania dynamiczne hali podlegającej drganiom wywołaną pracą maszyn o niskich obrotach*, Mechanika, 11, 1981.
5. В. В. Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Изд. Теор. Лит., Москва 1956.
6. В. С. Постников, *Внутреннее трение в металлах*, Изд. „Металлургия”, Москва 1969.

РЕЗЮМЕ

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ СЕЧЕНИЯМИ В УСЛОВИЯХ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА

Темой работы является параметрическая оптимизация системы трех стержней, с переменными сечениями, соединенных шарнирным образом. Система находится в условиях внутреннего резонанса. Анализируется влияние коэффициентов формы на резонансные амплитуды элементов системы. В описании учтено нелинейное затухание, как тоже сопряжение элементов системы через внутренние продольные силы, будучие поперечными силами на концах соседних стержней.

Анализируемый внутренний резонанс имеет автопараметрический характер. На основе полученных результатов констатировано отчетливое влияние параметров формы на резонансные амплитуды. Подбирая соответствующие значения коэффициентов можно получить значительное уменьшение значений амплитуд. При оптимальных значениях этих коэффициентов резонанс параметрического характера выступает тоже в меньшей области частот. Путем изменения коэффициентов формы автопараметрический резонанс остается сдвинутым в другие области частот.

SUMMARY

ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF A SYSTEM OF RODS WITH VARIABLE CROSS-SECTIONS UNDER THE CONDITIONS OF INTERNAL RESONANCE

The paper deals with parametric optimization of a system of three bars pinned together and having variable cross-sections; the system is subject to the conditions of internal resonance. The effect to geometric parameters on the resonance amplitudes is analyzed. Nonlinear damping and coupling of individual elements by longitudinal and transversal forces is taken into account. The resonance analyzed is of autoparametric character. Proper selection of parameters may lead to considerable reduction of the resonance amplitudes and of the frequency region in which the resonance occurs. Modification of the geometric parameters shifts the autoparametric resonance to different frequency regions.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 maja 1984 r.
