

## CIĄGŁE USZKADZANIE, SPOWODOWANE JEDNOOSIOWYM STANEM NAPRĘŻENIA, MATERIAŁÓW SPRĘŻYSTO-KRUCHYCH I SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH

TOMASZ SADOWSKI (LUBLIN)

W pracy rozpatrzono ciągły proces uszkodzania materiałów sprężysto-kruchych o odcinkowo zmiennym module sprężystości oraz materiałów sprężysto-idealnie plastycznych i sprężysto-plastycznych z liniowym wzmocnieniem. Wprowadzono kilka modeli degradacji materiału, w których uszkodzenie opisano skalarnym parametrem Kaczanowa uzależnionym od odkształceń całkowitych. Wpływ procesów uszkodzania materiału na udźwig konstrukcji zilustrowano analizą nośności statycznie niewyznaczalnej konstrukcji prętowej.

### 1. WPROWADZENIE

#### 1.1. Charakterystyka problemu

Odształcane materiały konstrukcyjne poddane działaniu obciążeń zewnętrznych ulegają uszkodzaniu np. w wyniku rozwoju mikropęknięć, szczelin i pustek. Jedną z możliwości opisu takiego procesu i jego skutków na odkształcalność oraz udźwig konstrukcji daje teoria ciągłego uszkodzania (continuous damage mechanics). Zakłada ona, że uszkodzenie następuje w sposób ciągły wraz ze wzrostem odkształceń materiału, aż do chwili utraty spójności. Podejście takie zaproponował KACZANOW [1] rozpatrując uszkodzenie przekroju poddanego naprężeniu rozciągającemu. Wprowadza on parametr wewnętrzny uszkodzenia, określony w zależności od powierzchni przenoszącej naprężenia. Ewolucja tego parametru wewnętrznego określona jest więc przez zmianę w stosunku do pola powierzchni, która jeszcze nie utraciła spójności.

Teorię ciągłego uszkodzania materiałów sprężysto-kruchych oraz sprężysto-idealnie plastycznych w stanach jednoosiowego rozciągania rozwinęli JANSON i HULT [2], uzależniając wartość skalarnego parametru Kaczanowa od wielkości odkształcenia całkowitego.

Niniejsza praca przedstawia rozszerzenie teorii [2] na zakres materiałów sprężysto-kruchych o odcinkowo-liniowym module Younga oraz materiałów sprężysto-plastycznych z liniowym wzmocnieniem. W tym ostatnim przypadku uszkodzenie może rozwijać się bądź w strefach sprężystej i plastycznej, albo wyłącznie w strefie plastycznej. W obydwu przypadkach materiałów proces

uszkodzenia traktujemy jako nieodwracalny. Odwracalne są natomiast odkształcenia w zakresie sprężystym. Rozpatrzono kilka modeli ośrodka, dla których wyznaczono wielkości charakterystyczne stanu uszkodzenia odpowiadającego utracie spójności materiału (lub stateczności jego zależności naprężenie odkształcenie). Przedstawiony jest zestaw odpowiednich wartości krytycznych dla rozpatrywanych modeli początkowej sprężysto-plastyczności pręta i charakteru rozwoju parametru uszkodzenia. Prawo ewolucji parametru uszkodzenia może bowiem być inne w zakresie sprężystym i w obszarze wzmocnienia.

Dla ilustracji skutków uszkodzenia dla materiałów sprężysto-kruchych i sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem rozpatrzono przykład statycznie niewyznaczalnej konstrukcji prętowej wyznaczając jej udźwig oraz odkształcalność w zależności od przebiegu procesu uszkodzania.

## 1.2. Przyjęta teoria uszkodzania

Podstawą teorii jest założenie, że intensywność uszkodzania jest uzależniona od odkształceń. JANSON i HULT [2], stosując metodę Kaczanowa, przyjęli następującą definicję parametru uszkodzenia:

$$(1.1) \quad \omega = \left(1 - \frac{A}{A_0}\right),$$

gdzie  $A_0$  przedstawia pole powierzchni początkowej rozciąganego przekroju, podczas gdy  $A$  odnosi się do pola przekroju uszkodzonego. Oznaczając naprężenie nominalne przez  $\sigma$ , a naprężenie efektywne w niezniszczonych obszarach rozpatrywanego przekroju przez  $S$ , otrzymuje się z warunku równowagi funkcję

$$(1.2) \quad \sigma = (1 - \omega) S,$$

wykorzystywaną przez RABOTNOWA [3]. Jeśli związać parametr uszkodzenia z naprężeniem efektywnym np. w formie

$$(1.3) \quad \omega = \frac{S}{D},$$

gdzie  $D$  oznacza stałą materiałową charakteryzującą uszkodzalność materiału i ponadto przyjąć liniowo sprężyste zachowanie się materiału względem bieżącego naprężenia w nieuszkodzonym materiale, tzn.  $S = E\varepsilon$ , to wykorzystując (1.1) i (1.3) otrzymujemy następującą postać zależności naprężenia od odkształcenia:

$$(1.4) \quad \sigma = E\varepsilon \left(1 - \frac{E}{D} \varepsilon\right).$$

Jest to funkcja nieliniowa względem odkształceń. JANSON i HULT [2] rozpatrywali również przypadek, gdy parametr uszkodzenia jest w postaci

$$(1.5) \quad \omega = \ln \frac{A_0}{A}.$$

Wówczas zamiast (1.2) otrzymujemy

$$(1.6) \quad \sigma = S(e^\omega)^{-1}.$$

Istotnym elementem stosowanej tu teorii jest fakt związania uszkodzenia z odkształceniem, jak to np. w przypadku prostej proporcjonalności przedstawione jest w (1.3). Do uzależnienia uszkodzenia z odkształceniem można dojść w wyniku rozpatrzenia związków ewolucji uszkodzenia oraz wymagań, aby prędkość zmiany tego parametru była stała w czasie całego procesu. Otrzymuje się wówczas tensorowy parametr uszkodzenia. Zagadnienie to rozpatrywał SAWCZUK [4].

Ciągły proces uszkodzania opisują związki konstytutywne o postaci

$$(1.7) \quad \sigma = \sigma(\varepsilon, \omega)$$

oraz równanie ewolucji parametru uszkodzenia, o którym założyliśmy że jest tensorem i jedynym parametrem wewnętrznym

$$(1.8) \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}(\varepsilon, \omega).$$

Postulując stałość zmiany uszkodzenia w czasie,

$$(1.9) \quad \dot{\omega} = \text{const},$$

otrzymuje się bezpośredni związek pomiędzy tensorami uszkodzenia i odkształcenia:

$$(1.10) \quad \omega = f(\varepsilon).$$

Wówczas równanie konstytutywne (1.7) uzależnia naprężenia nominalne od odkształceń. Jako najprostszy przypadek tego związku SAWCZUK i SADOWSKI [5] zaproponowali

$$(1.11) \quad \omega = c\varepsilon$$

i zbadali jego konsekwencje dla zginania płyt, tzn. gdy stan naprężenia nie jest jednoosiowy. Jeśli zastosować do (1.10) prawa wynikające z teorii reprezentacji funkcji tensorowych, to otrzymuje się

$$(1.12) \quad \omega = \alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\varepsilon^2,$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  są skalarnymi funkcjami niezmienników tensora odkształcenia,  $\delta$  zaś oznacza symbol Kroneckera. Postać (1.11) jest szczególną formą zależności (1.12), a (1.3) może być traktowane jako konsekwencja wymagania (1.9). Tensorowe, wektorowe i skalarnie parametry uszkodzenia mogą być definio-

wane inaczej np. na podstawie określonych założeń fizycznych. W niniejszej pracy zajmiemy się jedynie zbadaniem skutków definicji (1.1) i (1.5), jeśli idzie o wynikające zależności naprężeń od odkształceń, a w konsekwencji wpływu na odkształcalność i udźwig konstrukcji.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

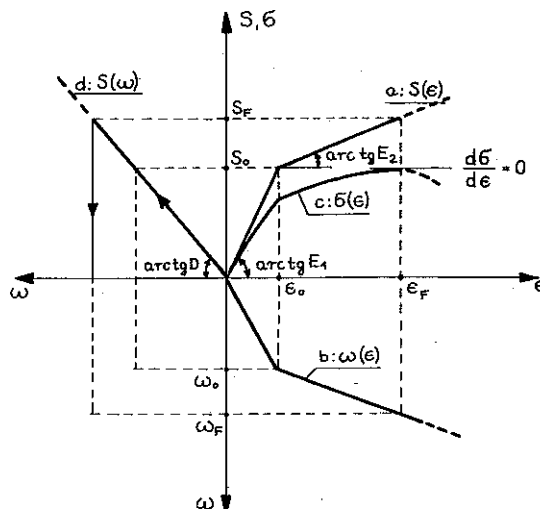
### 2.1. Określenie własności mechanicznych

Rozpatrywać będziemy materiały, które opisane są odcinkowo-liniowymi zależnościami pomiędzy naprężeniem rzeczywistym  $S$  i odkształceniem całkowitym  $\epsilon$ . Stałe określające proporcjonalność zmieniają się skokowo przy pewnej wartości naprężenia  $S_0$ . Moduły Younga lub w drugiej fazie moduł liniowego wzmocnienia zmieniają się następująco:

$$(2.1) \quad E = \begin{cases} E_1, & \text{jeśli } 0 \leq S \leq S_0; \\ E_2, & \text{jeśli } S > S_0. \end{cases}$$

Odpowiednie zależności naprężenie-odkształcenie przedstawiono na rys. 1 linią łamaną  $a$ .

Parametr uszkodzenia  $\omega$  będzie przyjmowany bądź w postaci (1.1) lub (1.5). Jeśli ograniczymy się w tym miejscu do przypadku (1.3), to zależność tę

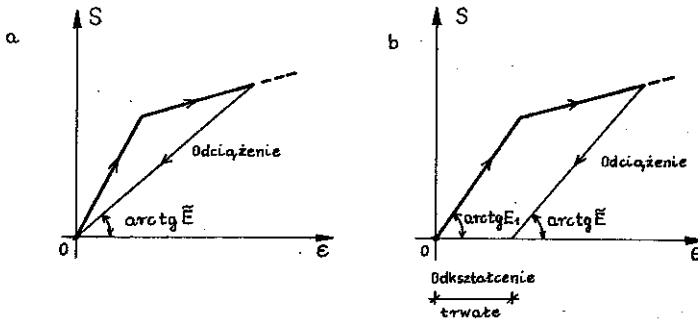


Rys. 1

ilustruje linia łamana  $b$  na rys. 1. Oznacza to, że funkcja parametru uszkodzenia jest odcinkowo-liniowa i w ogólnym przypadku różne są moduły uszkodzenia na pierwszym i drugim odcinku:

$$(2.2) \quad \omega = \begin{cases} \omega_1 = \frac{E_1}{D_1} \varepsilon, & \text{jeśli } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0; \\ \omega_2 = \frac{E_2}{D_2} (\varepsilon - \varepsilon_0), & \text{jeśli } \varepsilon > \varepsilon_0, \end{cases}$$

gdzie  $\varepsilon_0$  stowarzyszone jest z  $S_0$  i oznacza odkształcenie, przy którym następuje zmiana parametru uszkodzenia w rezultacie osiągnięcia przez naprężenia wartości  $S_0$ . W dalszych rozważaniach ograniczymy się do prostszego przypadku, gdy moduły uszkodzenia spełniają warunek  $D_1 = D_2 = D$ .



Rys. 2

Dla odciążenia moduł odkształcenia może zależeć od tego, czy rozpatrujemy sprężysto-kruche zachowanie się materiału, czy też zachowanie się takie, które daje trwałe odkształcenie w stanie nienaprzężonym, jak to zilustrowano odpowiednio na rys. 2a i 2b. Obserwacje doświadczalne LEMAITRE'A i CHABOCHE'A [6] oraz LEMAITRE'A, CORDEBOISA i DUFALLY'EGO [7] wskazują, że w przypadku metali obserwuje się zarówno odkształcenie trwałe jak i zmniejszenie modułu sprężystości w wyniku uszkodzenia. Ilustruje to rys. 2b.

## 2.2. Warunek utraty stateczności materiału

Ciągły proces uszkodzania powoduje, że związek pomiędzy naprężeniem nominalnym a odkształceniem całkowitym ma charakter nieliniowy typu (1.4) i może nastąpić utrata stateczności materiału w sensie Druckera, związana z warunkiem

$$(2.3) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0.$$

Jeśli wykorzystamy dla (2.3) zależność pomiędzy naprężeniami nominalnymi i rzeczywistymi (1.2), to otrzymamy warunek ten w następującej postaci:

$$(2.4) \quad (1 - \omega) \frac{dS}{d\varepsilon} - S \frac{d\omega}{d\varepsilon} = 0.$$

Kryterium (2.3) możemy wykorzystać również dla ustalenia zależności (1.6) pomiędzy  $\sigma$  i  $S$ . Wówczas dostaniemy

$$(2.5) \quad \frac{dS}{d\varepsilon} - S \frac{d\omega}{d\varepsilon} = 0.$$

Zależności (2.4) i (2.5) będą stanowiły podstawę do wyznaczenia charakterystyk stanu zniszczenia materiału. W przypadku materiałów kruchych zakładamy, że po osiągnięciu stanu (2.3) materiał ulega zniszczeniu, natomiast w przypadku ośrodków plastycznych warunek (2.3) stanowi kryterium stanu plastycznego płynięcia ośrodka lub przejścia w zakres niestatecznych deformacji plastycznych dla materiałów ze wzmocnieniem.

### 2.3. Najprostszy model zachowania się materiału uszkodzonego

Jako wprowadzenie oraz ilustrację sposobu postępowania przy wyznaczaniu wielkości określających uszkodzenie rozpatrzmy przypadek, gdy stosuje się prawo

$$(2.6) \quad S = D\omega$$

przedstawione na rys. 1 przez krzywą  $d$ . W dalszych rozważaniach traktować będziemy (2.6) jako jeden z definiowanych modeli, który w naszej klasyfikacji oznaczymy numerem 1.

Przy obciążeniu mamy następujące zależności:

$$(2.7) \quad S = \begin{cases} E_1 \varepsilon, & \text{jeśli } 0 \leq S \leq S_0, \\ E_2 \varepsilon + \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) S_0, & S > S_0. \end{cases}$$

Dla odciążenia zachodzi

$$(2.8) \quad S = \bar{E}\varepsilon,$$

gdzie  $\bar{E} \leq E_1$  (rys. 2). W szczególnym przypadku, jeśli założymy, że  $\bar{E} = E_1$ , to odciążenie dla krzywej  $\sigma(\varepsilon)$  będzie odbywało się według wzoru (1.2) przy stałej wartości parametru uszkodzenia  $\omega$ :

$$(2.9) \quad \sigma = (1 - \omega) E_1 \varepsilon_s,$$

gdzie  $\varepsilon_s$  jest częścią sprężystą odkształceń całkowitych  $\varepsilon$ . Wynika stąd, że bieżąca wartość modułu sprężystości przy odciążeniu  $E^*$  jest mniejsza od wartości początkowej  $E_1$ , przy czym

$$(2.10) \quad E^* = (1 - \omega) E_1.$$

Wykorzystując ten tok myślenia, LEMAITRE i CHABOCHE [6] oraz LEMAITRE, CORDEBOIS i DUFALLY [7] przeprowadzili badania doświadczalne wyznaczania modułów sprężystości przy odciążaniu  $E$  dla różnych materiałów. Na pod-

stawie (2.10) możliwe jest wtedy wyznaczenie parametru  $\omega$ . Otrzymana tą drogą funkcja  $\omega(\varepsilon)$  w zakresie plastycznym ma charakter zbliżony do liniowego. W niniejszej pracy nie będziemy szczegółowo rozpatrywać przypadków odciążania.

Przy założeniu (2.6) oraz uwzględnieniu związków konstytutywnych (2.7) uzyskujemy prawo uszkodzania:

$$(2.11) \quad \omega = \begin{cases} \frac{E_1}{D} \varepsilon & , \quad \text{jeśli} \quad 0 \leq S \leq S_0, \\ \frac{E_2}{D} \varepsilon + \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \frac{S_0}{D}, & \text{jeśli} \quad S > S_0. \end{cases}$$

Krzywa  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  pokazana jest na rys. 1 linią *c*. Utrata stateczności zachodzi przy pewnej wartości odkształcenia  $\varepsilon_F$ . W przypadku materiału sprężysto-kruchego stan ten jest związany z utratą spójności elementu. Dla materiałów sprężysto-plastycznych proces deformacji staje się niestateczny. Dla modelu przedstawionego schematycznie na rys. 1 w przypadku definicji uszkodzania (1.1) odpowiednie wartości  $\omega_F$ ,  $\varepsilon_F$ ,  $\sigma_F$  i  $S_F$  wynoszą

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_F = \frac{1}{2}, \\ \varepsilon_F = \frac{D}{2E_2} - \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \frac{S_0}{E_2}, \\ \sigma_F = \frac{D}{4}, \\ S_F = \frac{D}{2}. \end{array} \right.$$

Natomiast dla definicji (1.5) odpowiedni układ tych wielkości jest następujący:

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_F = 1, \\ \varepsilon_F = \frac{D}{E_2} - \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \frac{S_0}{E_2}, \\ \sigma_F = De^{-1}, \\ S_F = D. \end{array} \right.$$

Szczególnym przypadkiem modelu 1 jest materiał liniowo-sprężysty rozważany przez JANSONA i HULTA [2]. Charakterystyki uszkodzenia dla tego materiału uzyskujemy z (2.12) lub (2.13) przy założeniu  $E_1 = E_2$ .

Rozpatrywany przykład ilustruje, jakie są konsekwencje założeń, jaka metoda postępowania w analizie zagadnienia uszkodzenia oraz jakie wielkości otrzymujemy jako wynik. W podobny sposób postępować będziemy dla

innych przypadkach prawa uszkodzenia niż (2.11) oraz związków pomiędzy naprężeniem a uszkodzeniem. W rezultacie dla przyjętego prawa uszkodzenia otrzymujemy krytyczne odkształcenie  $\varepsilon_F$  związane z osiągnięciem punktu utraty stateczności materiału (2.3) oraz stowarzyszonych z tym parametru uszkodzenia  $\omega_F$ , naprężeń nominalnych  $\sigma_F$  i rzeczywistych  $S_F$ , jak to przedstawiają wzory (2.12) i (2.13).

### 3. MODELE SZCZEGÓŁOWE USZKODZENIA MATERIAŁÓW SPRĘŻYSTO-KRUCHYCH

#### 3.1. Rozpatrywane modele

Rozważymy tu trzy propozycje modeli materiałów ulegających uszka-dzaniu. Przyjęte założenia podstawowe dotyczące prawa uszka-dzania oraz wynikające zeń konsekwencje zestawiono w tablicy 1. Dla pełności porównania dołączono również charakterystyki dotyczące modelu 1. Kolejność uporząd-kowania modeli 1, 2 i 3 wynika z faktu wzrostu intensywności procesu uszka-dzania w zakresie deformacji materiału powyżej punktu granicznego  $S_0$ . Intensywność ta najniższa jest dla modelu 1, najwyższa w przypadku modelu 3 ( $E_3 > E_1$ ). Model 2 stanowi granicę pomiędzy modelami 1 i 3, gdyż założono tu prawo uszka-dzania w postaci linii prostej w całym obszarze procesu deformacji, aż do chwili utraty spójności materiału.

W modelu 4 przyjęto, że uszkodzenie rozwija się na drugim odcinku liniowej sprężystości, powyżej granicy  $S_0$ . Natomiast w pierwszej fazie materiał zachowuje się jak idealnie sprężysty; tzn. naprężenia rzeczywiste równe są naprężeniom nominalnym.

#### 3.2. Wartości krytyczne

Wartości krytyczne dla rozpatrywanych modeli otrzymano przy wykorzy-staniu warunku stateczności materiału (2.3) krzywej  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . Dla każdego modelu obliczono te charakterystyki dla dwóch definicji parametru uszko-dzenia (1.1) i (1.5). Wyznaczone wielkości zestawiono w tablicy 2.

#### 3.3. Zależności naprężenia od odkształcenia

Zestawione w tablicach 1 i 2 związki charakteryzujące poszczególne modele można przedstawić w sposób graficzny tak jak na rys. 3. Rysunki 3a, 3b i 3c odnoszą się kolejno do modeli 2, 3 i 4.

Z przedstawionego zestawienia w tablicy 2 wynika, że wzrost intensywności uszka-dzania  $\omega(\varepsilon)$  przyczynia się do szybszego zniszczenia materiału poddanego jednoosiowemu stanowi naprężenia. Oznacza to, że zniszczenie następuje najszybciej dla modelu 3, w którym intensywność uszka-dzania jest

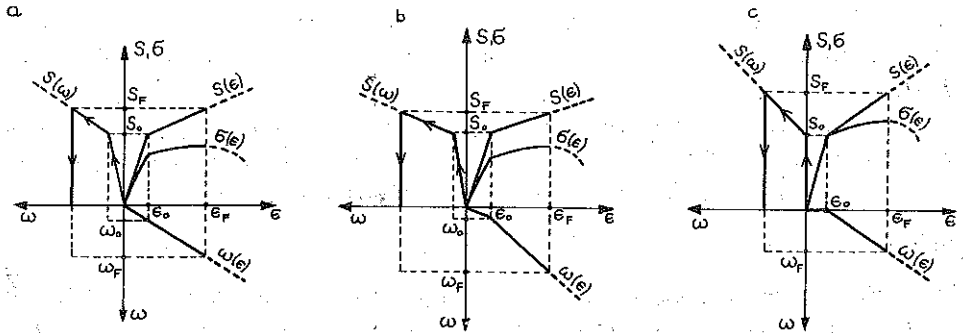


Tablica 1

	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Zakres
Założenie	$S = D\omega$	$\omega = \frac{E_1}{D} \varepsilon$	$\omega = \frac{E_1}{D} \varepsilon$	$\omega = 0$	$0 \leq S \leq S_0$
Wyniki	$\omega = \frac{E_1}{D} \varepsilon + \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \frac{S_0}{D}$	$S = D\omega$	$\omega = \frac{E_3}{D} \varepsilon + \left(1 - \frac{E_3}{E_1}\right) \frac{S_0}{D}$	$\omega = \frac{E_2}{D} (\varepsilon - \varepsilon_0)$	$S > S_0$
	$S = \frac{E_2}{E_1} D\omega + \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) S_0$		$S = D\omega$	$S = \sigma$	$0 \leq S \leq S_0$
				$S = D\omega + S_0$	$S > S_0$

Tablica 2

Model	$\omega$	$\omega_F$	$e_F$	$\sigma_F$	$S_F$
1	$1 - \frac{A}{A_0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{D}{2E_2} - \left(1 - \frac{E_2}{E_2}\right) \frac{S_0}{E_2}$	$\frac{D}{4}$	$\frac{D}{2}$
	$\ln \frac{A_0}{A}$	1	$\frac{D}{E_2} - \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \frac{S_0}{E_2}$	$De^{-1}$	$D$
2	$1 - \frac{A}{A_0}$	$\frac{1}{2} - \left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right) \frac{S_0}{2D}$	$\frac{D}{2E_1} - \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \frac{S_0}{2E_2}$	$\frac{[E_2 D + (E_1 - E_2) S_0]^2}{4E_1 E_2 D}$	$\frac{DE_2 + (E_1 - E_2) S_0}{2E_1}$
	$\ln \frac{A_0}{A}$	$1 - \left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right) \frac{S_0}{D}$	$\frac{D}{E_1} - \left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right) \frac{S_0}{E_1}$	$\frac{E_2}{E_1} D \exp \left[ \left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right) \frac{S_0}{D} - 1 \right]$	$\frac{E_2}{E_1} D$
3	$1 - \frac{A}{A_0}$	$\frac{1}{2} - \left(\frac{E_3}{E_2} - 1\right) \frac{S_0}{2D}$	$\frac{D}{2E_3} - \frac{E_1(E_2 + E_3) - 2E_2 E_3}{2E_1 E_2 E_3} S_0$	$\frac{[E_2 D + (E_3 - E_2) S_0]^2}{4E_2 E_3 D}$	$\frac{DE_2 + (E_3 - E_2) S_0}{2E_3}$
	$\ln \frac{A_0}{A}$	$1 - \left(\frac{E_3}{E_2} - 1\right) \frac{S_0}{D}$	$\frac{D}{E_3} - \left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right) \frac{S_0}{E_1}$	$\frac{E_2}{E_3} D \exp \left[ \left(\frac{E_3}{E_2} - 1\right) \frac{S_0}{D} - 1 \right]$	$\frac{E_2}{E_3} D$
4	$1 - \frac{A}{A_0}$	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_0}{D}\right)$	$\frac{D}{2E_2} - \left(\frac{E_1}{2E_2} - 1\right) \frac{S_0}{E_1}$	$\frac{(D + S_0)^2}{4D}$	$\frac{1}{2} (D + S_0)$
	$\ln \frac{A_0}{A}$	$1 - \frac{S_0}{D}$	$\frac{D - S_0}{E_2} + \frac{S_0}{E_1}$	$D \exp \left( \frac{S_0}{D} - 1 \right)$	$D$



Rys. 3

największa, natomiast najwolniej w przypadku modelu 1 o najmniejszej intensywności uszkodzania. Najniższe liczbowo wartości krytyczne odpowiadają modelowi 3, najwyższe zaś modelowi 1.

Model 1 i 4, w którym uszkodzenie pojawia się na drugim odcinku sprężystym, charakteryzują się tym, że  $\omega_F$ ,  $\sigma_F$  i  $S_F$  nie zależą od modułów sprężystości  $E_1$  i  $E_2$ . Odkształcenia krytyczne  $\epsilon_F$  zależą natomiast od  $E_1$  i  $E_2$ .

Z uzyskanych wartości krytycznych dla każdego z modeli możemy przy wprowadzeniu pewnych założeń upraszczających otrzymać wartości krytyczne dla modelu liniowo-sprężystego rozważanego przez JANSONA i HULTA [2]. I tak w przypadku modeli 1 i 2 zakładamy, że  $E_1 = E_2$ ; dla modelu 3  $E_1 = E_2 = E_3$ . Natomiast w modelu 4 przyjmujemy, że  $E_1 = E_2$  oraz  $S_0 = 0$ .

#### 4. MODEL SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY

##### 4.1. Materiał sprężysto-idealnie plastyczny

Model materiału początkowo sprężysto-idealnie plastycznego, który podlega uszkodzaniu wprowadzili JANSON i HULT [2]. Związki konstytutywne opisujące ten materiał są następujące:

$$(4.1) \quad S = \begin{cases} E\epsilon, & \text{jeżeli } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0; \\ S_0, & \text{jeżeli } \epsilon > \epsilon_0, \end{cases}$$

gdzie  $S_0$  i  $\epsilon_0$  są odpowiednio granicą plastyczności i odkształceniem jej odpowiadającym. Prawo uszkodzenia opisano [2] krzywą potęgową

$$(4.2) \quad \omega = K\epsilon^{v_0},$$

co w przypadku przyjęcia  $v_0 = 0, 1, 2$  odpowiada częściom składowym ogólnej

zależności (1.12).  $\nu_0$  i  $K$  oznaczają tu stałe materiałowe. Gdy  $\nu_0 = 1$  otrzymujemy liniową funkcję  $\omega(\varepsilon)$  i wówczas zgodnie z (1.3) stała  $K$  jest równa  $E/D$ .

Wprowadzony model zastosowano [2] w analizie zachowania się materiału w wierzchołku szczeliny Dougdala. W chwili osiągnięcia granicy plastyczności przez materiał, uszkodzenie wywołane deformacjami sprężystymi wynosi

$$(4.3) \quad \omega_0 = K\varepsilon_0^{\nu_0}.$$

Wartość ta nie wynika z warunku utraty stateczności materiału (2.3). Po osiągnięciu granicy plastyczności  $S_0$  rozpoczyna się płynięcie materiału, a uszkodzenie narasta w niestatecznym obszarze zależności  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  według następującej funkcji:

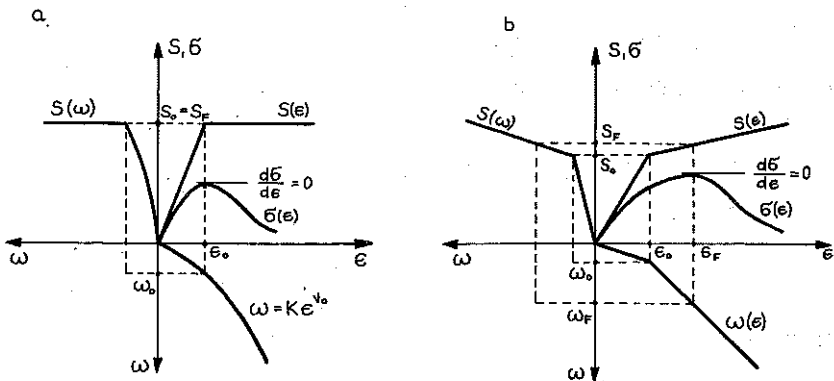
$$(4.4) \quad \omega = \omega_0 \left( \frac{d}{\xi} \right)^{\nu_0},$$

gdzie  $d$  jest długością obszaru uplastycznionego materiału w wierzchołku szczeliny, natomiast  $\xi \in (0; d)$ . Naprężenia nominalne  $\sigma$  równe są wówczas

$$(4.5) \quad \sigma = S_0 (e)^{-\omega}.$$

W punkcie wierzchołkowym szczeliny ( $\xi = 0$ ) naprężenia  $\sigma = 0$ , a parametr uszkodzenia  $\omega$  dąży do nieskończoności.

W rozdziale tym rozpatrzemy podobnie jak SAWCZUK i SADOWSKI [5] materiał sprężysty, który w wyniku uszkodzenia odpowiadającego spełnieniu warunku utraty stateczności (2.3) przechodzi w stan plastycznego płynięcia. Takie zachowanie się materiału zaobserwowali doświadczalnie LITEWKA i SAWCZUK [8] dla stopów aluminium z wprowadzonym uszkodzeniem w postaci perforacji. Równania konstytutywne dla tego materiału mają postać (4.1). Prawo uszkodzenia przyjmujemy w formie (4.2). Model ten zilustrowany jest rysunkiem 4a. Utrata stateczności procesu deformacji materiału następuje



Rys. 4

w przypadku definicji uszkodzenia (1.1) w chwili, gdy wartości krytyczne wyniosą

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_F = \frac{1}{1 + \nu_0}, \\ \sigma_F = \frac{E \nu_0}{(K)^{1/\nu_0} (1 + \nu_0)^{1 + 1/\nu_0}}, \\ S_F = \frac{E}{[K (1 + \nu_0)]^{1/\nu_0}} = S_0, \\ \varepsilon_F = \frac{1}{[K (1 + \nu_0)]^{1/\nu_0}} = \varepsilon_0. \end{array} \right.$$

Natomiast dla definicji uszkodzenia (1.5) odpowiedni układ tych wielkości przyjmuje następujące wartości:

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_F = \frac{1}{\nu_0}, \\ \sigma_F = \frac{E}{(eK\nu_0)^{1/\nu_0}}, \\ S_F = \frac{E}{(K\nu_0)^{1/\nu_0}} = S_0, \\ \varepsilon_F = \frac{1}{(K\nu_0)^{1/\nu_0}} = \varepsilon_0. \end{array} \right.$$

Z układu wartości krytycznych (4.6) i (4.7) wynika, że wraz ze wzrostem parametru  $\nu_0$  maleje parametr uszkodzenia  $\omega_F$ , a rosną pozostałe trzy charakterystyki  $\sigma_F$ ,  $S_F$  i  $\varepsilon_F$ .

Gdy naprężenia rzeczywiste  $S_F$  równe są  $S_0$  rozpoczyna się płynięcie materiału, podczas którego uszkodzenie rośnie potęgowo według (4.2), powodując w efekcie końcowym zniszczenie materiału. Naprężenia nominalne  $\sigma$  obliczamy wtedy w zależności od postaci definicji uszkodzenia według następujących wzorów:

$$(4.8) \quad \sigma = (1 - \omega) S_0$$

lub

$$(4.9) \quad \sigma = S_0 (e)^{-\omega}.$$

Zniszczenie materiału następuje, gdy  $\sigma = 0$ . W pierwszym przypadku (4.8) odpowiada to parametrowi uszkodzenia  $\omega = 1$  (KACZANOW [1]), w drugim (4.9)  $\omega$  dąży do nieskończoności.

Wyznaczone wartości krytyczne (4.6) i (4.7) dotyczą również materiału liniowo-sprężysto-krucheego w przypadku gdy uszkodzenie opisujemy zależ-

nością nieliniową (4.2). JANSON i HULT [2] rozważali prostszy przypadek gdy  $v_0 = 1$ , tzn. liniowej funkcji  $\omega(\varepsilon)$ . Po osiągnięciu wartości krytycznych materiał ten traci spójność.

#### 4.2. Materiał sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem

Materiał sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem zdefiniowany jest równaniami konstytutywnymi (2.7). Prawo uszkodzenia wyraża funkcja (2.2). Rozpatrywany materiał różni się od modeli sprężysto-kruchych tym, że po przekroczeniu wartości krytycznych dalej odkształca się plastycznie, przy czym stan jego deformacji odwzorowany jest na niestatecznej części krzywej  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . Ilustruje to rys. 4b.

Wprowadzamy zatem dla materiałów sprężysto-plastycznych z liniowym wzmocnieniem analogiczne modele do modeli 1-4 (tablica 1). Modele te będą miały charakterystyki uszkodzenia odpowiednio według tablicy 2. Natomiast zachowanie się materiału po przekroczeniu wartości krytycznych zależeć będzie od przyjętego prawa uszkodzania (2.2). W ogólnym przypadku inny niż  $D_1$  lub  $D_2$  będzie dla tego zakresu deformacji moduł uszkodzania. Stąd możemy rozszerzyć (2.2) o kolejne równanie ewolucji uszkodzenia

$$(4.10) \quad \omega_3 = \frac{E_2}{D_3} (\varepsilon - \varepsilon_F), \quad \varepsilon > \varepsilon_F.$$

W niniejszej pracy nie będziemy szczegółowo analizowali niestatecznej fazy deformacji materiału. Jednak dla pełności teoretycznego opisu tego stanu, wynikającego z przyjętego modelu, dodamy że wartości naprężeń nominalnych wyznaczamy na podstawie

$$(4.11) \quad \sigma = [1 - (\omega_F + \omega_3)] S$$

lub

$$(4.12) \quad \sigma = S (e)^{-(\omega_F + \omega_3)}$$

odpowiednio przy definicji uszkodzenia (1.1) lub (1.5). Materiał ulega zniszczeniu ( $\sigma = 0$ ), gdy  $\omega_F + \omega_3 = 1$  w pierwszym przypadku lub  $\omega_F + \omega_3 \rightarrow \infty$  w drugim przypadku.

## 5. PORÓWNANIA LICZBOWE

### 5.1. Porównanie

Wprowadzone modele materiałów różnią się intensywnością narastania uszkodzenia  $\omega_2$  według (2.2), tzn. w zakresie powyżej punktu granicznego  $S_0$ . Graficznie ilustrują to rys. 1 i 3.

W rozdziale tym porównamy wartości krytyczne z tablicy 2 wszystkich

Tablica 3

Charakterystyki uszkodzenia	Model liniowo-sprężysty wg [2]	Model 1		Model 2		Model 3		Model 4	
		$E_2: E_1 = 1:2$	$E_2: E_1 = 1:4$	$E_2: E_1 = 1:2$	$E_2: E_1 = 1:4$	$E_3: E_1: E_2 = 1:2:4$	$E_3: E_1: E_2 = 1:2:8$	$E_2: E_1 = 1:2$	$E_2: E_1 = 1:4$
$\omega_F$	0,5	0,5	0,5	0,45	0,35	0,35	0,15	0,45	0,45
$\sigma_F$	0,25 D	0,25 D	0,25 D	0,151 D	0,106 D	0,106 D	0,09 D	0,303 D	0,303 D
$S_F$	0,5 D	0,5 D	0,5 D	0,275 D	0,163 D	0,163 D	0,106 D	0,55 D	0,55 D
$\varepsilon_F$	$0,5 \frac{D}{E_1}$	$0,9 \frac{D}{E_1}$	$1,7 \frac{D}{E_1}$	$0,45 \frac{D}{E_1}$	$0,35 \frac{D}{E_1}$	$0,225 \frac{D}{E_1}$	$0,125 \frac{D}{E_1}$	$\frac{D}{E_1}$	$\frac{D}{E_1}$

Tablica 4

Charakterystyki uszkodzenia	Model liniowo-sprężysty wg [2]	Model 1		Model 2		Model 3		Model 4	
		$E_2 : E_1 = 1:2$	$E_2 : E_1 = 1:4$	$E_2 : E_1 = 1:2$	$E_2 : E_1 = 1:4$	$E_3 : E_1 : E_2 = 1:2:4$	$E_3 : E_1 : E_2 = 1:2:8$	$E_2 : E_1 = 1:2$	$E_2 : E_1 = 1:4$
$\omega_F$	1	1	1	0,9	0,7	0,7	0,3	0,9	0,9
$\sigma_F$	0,368 D	0,368 D	0,368 D	0,203 D	0,124 D	0,124 D	0,093 D	0,407 D	0,407 D
$S_F$	D	D	D	0,5 D	0,25 D	0,25 D	0,125 D	D	D
$\varepsilon_F$	$\frac{D}{E_1}$	$1,9 \frac{D}{E_1}$	$3,7 \frac{D}{E_1}$	$0,9 \frac{D}{E_1}$	$0,7 \frac{D}{E_1}$	$0,4 \frac{D}{E_1}$	$0,2 \frac{D}{E_1}$	$1,9 \frac{D}{E_1}$	$3,7 \frac{D}{E_1}$



Tablica 5

Charakterystyka uszkodzenia	Model liniowo-sprężysty wg [2]	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
		$E_2 : E_1 = 1 : 2$		$E_3 : E_1 : E_2 = 1 : 2 : 4$	$E_2 : E_1 = 1 : 2$
$\varepsilon_F$		$0,5 \frac{D}{E_1}$			
Moduł uszkodzenia	$D$	$0,556 D$	$1,111 D$	$2,222 D$	$0,5 D$
$\omega_F$	0,5	0,5	0,45	0,35	0,45
$\sigma_F$	$0,25 D$	$0,139 D$	$0,168 D$	$0,236 D$	$0,152 D$
$S_F$	$0,5 D$	$0,278 D$	$0,306 D$	$0,362 D$	$0,275 D$
$\frac{\sigma_F}{S_F}$	0,5	0,5	0,549	0,652	0,553

wprowadzonych modeli. Do przeprowadzenia obliczeń przyjęto następujące założenia:

$$S_0 = 0,1 D;$$

$$\omega_0 = 0,1 \text{ dla modeli 1, 2, 3;}$$

$$E_2 : E_1 = 1 : 2 \text{ i } 1 : 4 \text{ modeli 1, 2 i 4;}$$

$$E_3 : E_1 : E_2 = 1 : 2 : 4 \text{ i } 1 : 2 : 8 \text{ dla modelu 3.}$$

Ponadto  $\sigma_F$  i  $S_F$  wyrażono jako funkcję  $D$ , natomiast  $\varepsilon_F$  jako funkcję  $E_1$  i  $D$ . W tablicy 3 zestawiono wyznaczone wartości krytyczne dla definicji uszkodzenia (1.1), natomiast w tablicy 4 odpowiednie dla definicji (1.5). W drugiej kolumnie podano charakterystyki dla modelu JANSONA i HULTA [2]. Porównanie modeli możemy przeprowadzić przy założeniu, że wartości odkształceń krytycznych  $\varepsilon_F$  są dla wszystkich modeli jednakowe. To założenie przy  $E_1 = \text{const}$  powoduje, że różne są wielkości modułów uszkodzenia materiałów. Jeśli  $\varepsilon_F = 0,5 D/E_1$ , to przy definicji uszkodzenia (1.1) charakterystyki poszczególnych modeli są zestawione w tablicy 5.

Otrzymane wyniki zilustrowano na rys. 5 krzywymi  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ .

## 5.2. Wnioski wynikające z porównań

Przeprowadzone porównania (tablice 3 i 4) umożliwiają sformułowanie następujących stwierdzeń:

1) modele 1 i liniowo-sprężysty [2] mają identyczne wartości krytyczne

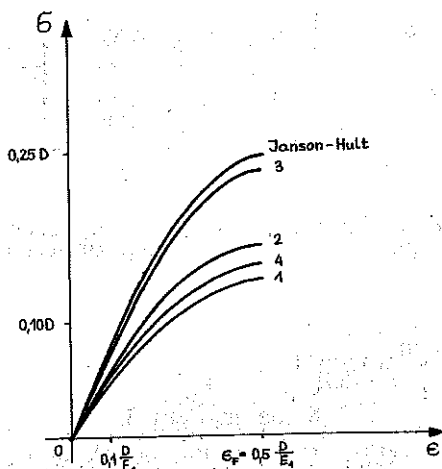
$\omega_F$ ,  $\sigma_F$ ,  $S_F$ , natomiast  $\varepsilon_F$  jest większe w pierwszym przypadku i rośnie wraz ze zmniejszeniem się stosunku  $E_2:E_1$ ;

2) ze wzrostem intensywności uszkodzania (modele 1 — 2 — 3) maleją wszystkie wartości krytyczne w porównaniu z modelem 1;

3) zmniejszanie stosunku modułów  $E_2:E_1$  w modelach 2 i 3 powoduje zmniejszanie się wartości krytycznych;

4) w modelu 4 charakterystyki uszkodzenia  $\omega_F$ ,  $\sigma_F$ ,  $S_F$  są stałe, natomiast  $\varepsilon_F$  rośnie wraz ze zmniejszaniem się  $E_2:E_1$ .

Wymaganie równości odkształceń pęknięcia  $\varepsilon_F$  (tablica 5) powoduje zróżnicowanie wartości modułów uszkodzenia w poszczególnych modelach. Najwyższą wartość mamy w przypadku modelu 3, najniższą dla modelu 4. Istnieje relacja pomiędzy wartością parametru uszkodzenia  $\omega_F$  i wpływem uszkodzania na nośność materiału, tzn. stosunek  $\sigma_F/S_F$ . W modelu 3  $\omega_F$  przyjmuje naj-



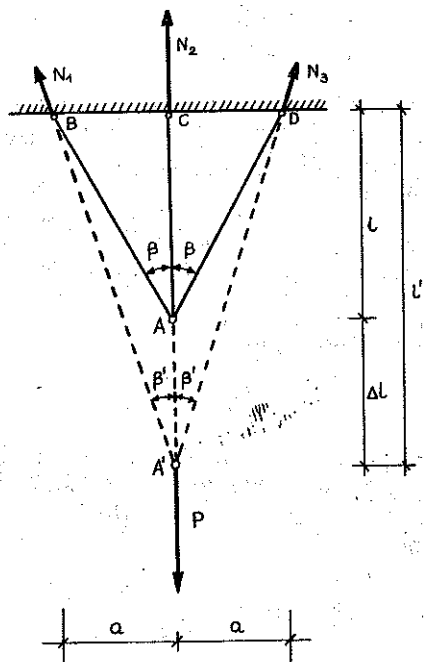
Rys. 5

niższą wartość 0,35, a stosunek  $\sigma_F/S_F$  największą 0,652. Jest to związane z wartością modułu uszkodzenia. Z ilustrującego zależności  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  (rys. 5) wynika, że w przyjętych założeniach najniższą nośność osiąga model 1, najwyższą model 3.

## 6. PRZYKŁAD

### 6.1. Opis konstrukcji

Zastosowanie proponowanego opisu uszkodzenia pokażemy na przykładzie analizy nośności statycznie niewyznaczalnej konstrukcji, która składa się z trzech prętów prostych połączonych przegubowo (rys. 6).



Rys. 6

Kształt konstrukcji określony jest w fazie przed obciążeniem wymiarami  $l$  i  $a$  oraz kątem  $\beta$ , który określamy jako

$$(6.1) \quad \beta = \arctg \frac{a}{l}.$$

Gdy na konstrukcję działa *quasi*-statycznie narastające obciążenie  $P$  wzrastają długości jej poszczególnych prętów. Kształt konstrukcji jest wówczas określony wymiarami  $l'$  i  $a$  oraz kątem  $\beta'$ :

$$(6.2) \quad \beta' = \arctg \frac{a}{l'}.$$

### 6.2. Charakterystyka materiału

W przykładzie przyjmujemy, że konstrukcja wykonana jest ze stali o następujących wielkościach charakterystycznych:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \sigma_0 &= 250 \text{ MN/m}^2, \\ \sigma_F &= 400 \text{ MN/m}^2, \\ E_1 &= 2,1 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2, \end{aligned}$$

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0 &= 0,12\% \\ \varepsilon_F &= 24\% \end{aligned}$$

Dane (6.3) umożliwiają znalezienie równań konstytutywnych (2.7) i (1.2). Przyjmując model 4 i definicję uszkodzenia (1.1), uzyskujemy następujące wzory konstytutywne na naprężenia rzeczywiste:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} S &= 2,1 \cdot 10^5 \varepsilon, & 0 \leq S \leq S_0 = 250 \text{ MN/m}^2; \\ S &= 1,63 \cdot 10^3 \varepsilon + 248, & S \geq S_0 = 250 \text{ MN/m}^2. \end{aligned}$$

Moduł wzmocnienia materiału wynosi

$$(6.5) \quad \mu = \frac{E_2}{E_1} \approx 0,008.$$

Wykorzystując zależność pomiędzy naprężeniami nominalnymi i rzeczywistymi (1.2) oraz (6.4) i dane z tablicy 1 i 2 otrzymujemy analogicznie do (6.4) równania konstytutywne na  $\sigma$ :

$$(6.7) \quad \begin{cases} \sigma = 2,1 \cdot 10^5 \varepsilon, & 0 \leq \sigma \leq \sigma_0 = 250 \text{ MN/m}^2; \\ \sigma = -2,57 \cdot 10^3 \varepsilon^2 + 1,25 \cdot 10^3 \varepsilon + 249, & \sigma > \sigma_0 = 250 \text{ MN/m}^2. \end{cases}$$

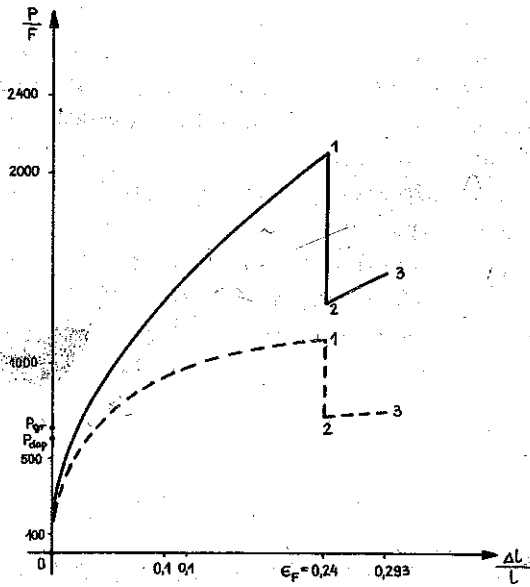
Uszkodzenie materiału odpowiadające osiągnięciu granicy plastyczności  $S_0$  równe jest  $\omega_0 = 0$ , natomiast w chwili utraty stateczności zgodnie z danymi tablicy 2  $\omega_F = 0,38$ .

### 6.3. Udźwig konstrukcji

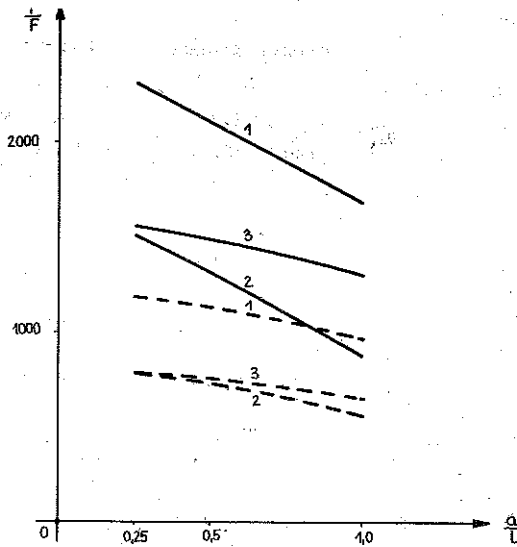
Rozpatrzmy tu udźwig konstrukcji (rys. 6) wykonanej z materiału o modelu 4, dla którego równania konstytutywne mają postać (6.7). W celu porównania rozważymy nośność tej samej konstrukcji, ale z materiału nie podlegającego uszkodzaniu, tzn. scharakteryzowanego równaniami konstytutywnymi (6.4). Zakładamy, że pręty konstrukcji mają takie same pola powierzchni przekroju poprzecznego, równe  $A_0$ .

Proces obciążania konstrukcji odbywa się *quasi*-statycznie narastającą siłą  $P$  do chwili osiągnięcia przez pręt środkowy wartości  $\varepsilon_F = 24\%$ . Stan ten odpowiada utracie stateczności materiału w tym pręcie. Przyjmujemy dla uproszczenia analizy, że przy dalszym narastaniu deformacji pręt środkowy nie przenosi obciążeń. Zmniejsza się więc skokowo nośność konstrukcji, bowiem siłę obciążającą  $P$  przenoszą tylko dwa boczne pręty. Zniszczenie konstrukcji następuje w chwili, gdy odkształcenie tych prętów wyniesie  $\varepsilon_F = 24\%$ .

Przykładowy proces deformacji rozpatrywanej konstrukcji o wymiarach  $a = l/2$  zilustrowano na rys. 7. Linia przerywana dotyczy konstrukcji wykonanej z materiału uszkodzającego się, natomiast linia ciągła konstrukcji z materiału nie podlegającemu uszkodzaniu. Na wykresie obciążenie  $P$ –przemieszczenie  $\Delta l$  punktu  $A$  liczbami 1, 2, 3 zaznaczono omówione trzy



Rys. 7



Rys. 8

charakterystyczne punkty procesu deformacji. Wykres (linia przerywana) na odcinku  $[0; 1]$  jest silnie nieliniowy, co związane jest zarówno z nieliniowością fizyczną materiału, jak również i nieliniowością geometryczną konstrukcji. Wpływ nieliniowości fizycznej powodowanej uszkodzeniem materiału

pokazują różnice rzędnych linii ciągłej i przerywanej (rys. 7). Ponadto na osi obciążeń zaznaczono dwa punkty dotyczące konstrukcji wykonanej z materiału uszkadzającego się.  $P_{\text{dop}}$  odpowiada osiągnięciu granicy plastyczności w przecie środkowym, natomiast  $P_{\text{gr}}$  obciążeniu granicznemu, które powoduje płygnięcie wszystkich prętów konstrukcji.

Podobne wykresy można sporządzić dla konstrukcji o różnych wymiarach  $a$  i  $l$ . Każda jednak z tych zależności będzie określona punktami 1, 2, 3 odpowiadającymi poszczególnym fazom pracy konstrukcji. Dlatego dla różnych wymiarów konstrukcji można w sposób syntetyczny przedstawić przebieg procesu deformacji wykreślając rozkłady siły  $P$  w punktach 1, 2, 3 jak na rys. 8. Wraz ze wzrostem stosunku  $a/l$  wykresy te mają charakter malejący.

## 7. UWAGI KOŃCOWE

Powiązanie ciągłego procesu uszkodzania materiału z odkształceniami całkowitymi, w przypadku *quasi*-statycznie narastającego obciążenia, umożliwia opracowanie bardzo prostych w opisie matematycznych modeli materiałów. Liniowa lub potęgowa postać prawa uszkodzenia pozwala przedstawić różnorodne procesy degradacji.

Pokazana na przykładzie prostej konstrukcji prętowej łatwość praktycznego zastosowania proponowanego opisu w analizie nośności stwarza możliwość szerszego wykorzystania modeli rzeczywistego zachowania się materiału do obliczeń numerycznych bardziej złożonych konstrukcji inżynierskich.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Л. М. Качанов, *О времени разрушения в условиях ползучести*, Изв. Акад. Наук СССР, Отд. Тех. Наук, 8, 26—31, 1958.
2. J. JANSON, J. HULT, *Fracture mechanics and damage mechanics, a combined approach*, J. Méc. Appl., 1, 69—84, 1977.
3. JU. N. RABOTNOW, *Creep rupture*, Proc. XII Int. Congr. Appl. Mech., Stanford 1968 (ed. M. HETÉNYI, W. G. VINCENTI), Springer, Berlin 1969.
4. A. SAWCZUK, *On modeling of creep of damage of steady rate of internal variable change*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech. [w druku].
5. A. SAWCZUK, T. SADOWSKI, *On anisotropic continuous damage of plates in flexure*, Eng. Struct., 5, 234—238, 1983.
6. J. LEMAITRE, J. CHABOCHE, *Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement*, J. Méc. Appl., 2, 317—365, 1978.
7. J. LEMAITRE, J. P. CORDEBOIS, J. DUFAILY, *Sur le couplage endommagement-élasticité*, Compt. Rend. Acad. Sc. Paris, Série B, 208, 391—394, 1979.
8. A. LITEWKA, A. SAWCZUK, *Experimental evaluation of the overall anisotropic material response at continuous damage*, Mechanics of material behaviour, Drucker Anniversary Volume (ed. G. J. DVORAK, R. T. SHIELD), Elsevier, Amsterdam 1983.

## РЕЗЮМЕ

НЕПРЕРЫВНОЕ ПОВРЕЖДЕНИЕ, ВЫЗВАННОЕ ОДНООСНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ  
УПРУГО-ХРУПКИХ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

В работе рассматривается непрерывный процесс повреждения упруго-хрупких материалов с кусочно-переменным модулем упругости и упруго-идеально пластических, а также упруго-пластических материалов с линейным упрочнением. Введено несколько моделей деградации материала, в которых повреждение описано скалярными параметрами Качанова, зависящими от полных деформаций. Влияние процессов повреждения материала на грузоподъемность конструкции проиллюстрировано анализом статической грузоподъемности неопределимой стержневой конструкции.

## SUMMARY

CONTINUOUS DAMAGE OF ELASTIC-BRITTLE AND ELASTIC-PLASTIC  
MATERIALS IN UNAXIAL STATE OF STRESS

Continuous damage process of piece-wise linear brittle-elastic, elastic-perfectly plastic and elastic-plastic hardening materials is considered in the paper. Several models of damage are introduced in which the damage is described by means of Kachanov's scalar parameter depending on the total strain. The effect of material damage on the load carrying capacity of the structure is illustrated by the load capacity analysis of a statically indeterminate rod structure.

POLITECHNIKA LUBELSKA  
ZESPÓŁ MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 lutego 1984 r.*

---