

## MODEL MATEMATYCZNY MECHANICZNYCH HIPOTEZ PEŁZANIA

EUGENIUSZ MIELESZKO (BIAŁYSTOK)

Dla jednoosiowego stanu naprężenia zaproponowano uogólnienie hipotez pełzania w postaci

$$\Phi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \frac{d\Phi(f(\sigma, \tau))}{df(\sigma, \tau)} \frac{\partial f(\sigma, s)}{\partial s} d\tau,$$

gdzie  $s = t - \tau$  albo  $\tau$  — w zależności od wpływu historii obciążenia na proces pełzania. Stosując operator potęgowy  $\Phi(X) = X^p$  w proponowanej hipotezie można opisać pełzanie różnych materiałów. Równania pełzania klasycznych hipotez są szczególnymi przykładami uogólnionego równania lub jego przybliżeniami.

### 1. WPROWADZENIE

Brak ogólnej teorii opisu zjawisk reologicznych spowodował powstanie wielu różnych hipotez pełzania oraz ich wariantów. Ogólne równanie pełzania w jednoosiowym stanie naprężenia jest związkem naprężenia, odkształcenia i czasu w postaci funkcji [1]

$$(1.1) \quad F(\sigma, \dot{\varepsilon}, t, p_1, p_2, \dots) = 0,$$

gdzie  $p_i$  oznacza parametry, np.  $\varepsilon, \int g(\sigma) d\varepsilon$ .

W zależności od wyboru argumentów równania (1.1) otrzymamy różne hipotezy pełzania. Do opisu pełzania stopów metali oraz tworzyw stosowane są hipotezy, które możemy podzielić na dwa zbiory: hipotezy bez pamięci i hipotezy z pamięcią (z dziedzicznością).

Klasycznymi przykładami hipotez bez pamięci są:

hipoteza starzenia

$$(1.2) \quad F(\sigma, \varepsilon, t) = 0,$$

hipoteza płynięcia

$$(1.3) \quad F(\sigma, \dot{\varepsilon}) = 0,$$

hipoteza umocnienia Odqvista

$$(1.4) \quad F(\sigma, \dot{\varepsilon}, p) = 0, \quad p = \varepsilon,$$

hipoteza umocnienia RABOTNOWA [1]

$$(1.5) \quad p = \int g(\sigma) d\varepsilon,$$

hipoteza kombinowana [2]

$$(1.6) \quad F(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, t) = 0.$$

Do zbioru hipotez dziedziczności należy hipoteza Rabotnowa

$$(1.7) \quad \varphi(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma(\tau) K(t-\tau) d\tau,$$

i Rozowskiego

$$(1.8) \quad \varepsilon = \int_0^t \psi(\sigma(\tau)) R(t-\tau) d\tau.$$

W zastosowaniu budowy równań konstytutywnych pełzania w postaci (1.1) napotyka się często na trudności przy wyborze hipotezy i wykazaniu jej jednoznaczności, określeniu zależności funkcyjnych występujących w równaniu, wyznaczeniu stałych, rozwiązaniu zbudowanego równania różniczkowego lub całkowego.

Do opisu pełzania wielu tworzyw, z powodu braku adekwatnych równań, dokonywane są modyfikacje i uogólnienia hipotez [3 i 4].

Dla ominięcia wymienionych trudności przy budowie równań konstytutywnych w pracy przedstawiono odmienne od (1.1) uogólnienie, które wynika z czysto formalnych matematycznych przekształceń równania opisującego pełzanie dla stałych naprężeń.

## 2. UOGÓLNIENIE HIPOTEZ PEŁZANIA

Idea mechanicznych hipotez pełzania polega na tym, że zjawiska reologiczne, jak pełzanie przy niestacjonarnych naprężeniach lub relaksację naprężeń, opisuje się na podstawie danych zaczerpniętych z pełzania przy stałym naprężeniu. Warunkiem koniecznym poprawności równania konstytutywnego (hipotezy) będzie zgodność rozwiązania z danymi doświadczalnymi pełzania przy stałym obciążeniu. Wynika stąd, że wyjściowym równaniem do budowy hipotezy pełzania powinna być zależność na odkształcenie pełzania przy stacjonarnych naprężeniach w postaci

$$(2.1) \quad \varepsilon(t) = f(\sigma, t).$$

Na podstawie analizy budowy równań podstawowych hipotez pełzania (1.2)–(1.8) łatwo wykazać, że równania te możemy otrzymać ze związku (2.1) dokonując następujących operacji:

- 1) przekształcenia funkcyjnego (operatorowego) obu stron równania

$$(2.2) \quad \Phi(\varepsilon(t)) = \Phi(f(\sigma, t));$$

2) różniczkowania względem czasu obu stron równania (2.2) przy stałym naprężeniu;

3) do wyznaczenia odkształceń, przy zmiennym naprężeniu, wykonujemy operacje odwrotne.

Na przykład dla operatora  $\Phi(X)$  o własności

$$(2.3) \quad \Phi(f(\sigma, t)) = S(\sigma)t,$$

otrzymamy

$$(2.4) \quad \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon} = S(\sigma).$$

Jeśli  $\Phi(X) = X$  to jest hipoteza płynięcia (1.3). Dla  $\Phi(X) \neq X$  możemy napisać równanie (2.4) w postaci hipotezy Odqvista (1.4):

$$(2.5) \quad \dot{\varepsilon} = S(\sigma)\varphi(\varepsilon),$$

hipotezy Rabortnowa (1.5)

$$(2.6) \quad \dot{\varepsilon} = S(\sigma)\varphi(\varepsilon) = S(\sigma)\psi(\sigma)\varphi(p),$$

gdzie  $\psi(\sigma)\varphi(p) = \varphi(\varepsilon)$ ,  $p = g(\sigma)\varepsilon = \int_0^\varepsilon g(\sigma) d\varepsilon$  dla  $\sigma = \text{const}$ .

Jeżeli  $\sigma(t)$  zmienia się w sposób ciągły, to krzywe odkształcenia pełzania będące rozwiązaniami równań (2.4)–(2.6) pokrywają się, natomiast są różne dla skokowej zmiany naprężenia.

Stosując powyższe przekształcenia na równaniu (2.1) możemy napisać uogólnione równania hipotez w następującej postaci:

$$(2.7) \quad \Phi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \frac{d\Phi(f(\sigma, \tau))}{df(\sigma, \tau)} \frac{\partial f(\sigma, s)}{\partial s} d\tau,$$

gdzie  $s = (t - \tau)$  albo  $\tau$ , odpowiednio dla hipotez dziedziczności albo hipotez bez pamięci.

Zmieniając operator  $\Phi$  w równaniu (2.7), dla danego programu obciążeń otrzymamy różne krzywe pełzania. Można dobrać taki operator  $\Phi$ , dla którego krzywa wyznaczona z równania (2.7) będzie optymalnie przybliżała dane doświadczalne.

### 3. OPERATOR PEŁZANIA

Ze względu na to, że doświadczalną funkcję (2.1) można przedstawić za pomocą różnych klas funkcji, dla każdej klasy istnieją operatory  $\Phi$ , które równanie (2.7) sprowadzają do wybranej hipotezy.

W praktyce ta różnorodność operatorów jest pozorna, ponieważ mamy jedną zależność funkcyjną, a różne wzory empiryczne, które tę funkcję opisują.

Krzywe izochroniczne I okresu pełzania spełniają na ogół własność podobieństwa [1], tzn.

$$(3.1) \quad f(\sigma, t) = S(\sigma) v(t).$$

Dążąc do dokładnego opisu danych doświadczalnych pełzania, funkcję  $S(\sigma)$  i  $v(t)$  przyjmujemy w najrozmaitszych postaciach od prostych do bardzo złożonych [4].

Należy stwierdzić, że dane doświadczalne wystarczająco dobrze przybliżają funkcje potęgowe w postaci

$$(3.2) \quad \varepsilon(t) = a\sigma^\beta t^\alpha.$$

Rozpatrując zagadnienie doboru operatora  $\Phi$  uogólnionego równania (2.7), łatwo przekonać się, że dla wzoru (3.2) uniwersalnym operatorem jest operator potęgowy

$$(3.3) \quad \Phi(X) = X^p, \quad p > 0.$$

Uwzględniając (3.2) i (3.3), uogólnionemu równaniu (2.7) nadamy postać

$$(3.4) \quad \varepsilon^p(t) = a \int_0^t \sigma_{(\tau)}^{\beta p} \frac{d s^{\alpha p}}{d s} d\tau.$$

Jeżeli

$$(3.5) \quad \sigma(t) = \sum_{i=0,1,2,\dots} (\sigma_i - \sigma_{i-1}) H(t - t_i), \quad \sigma_{-1} = 0, \quad 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots,$$

to dla  $s = (t - \tau)$  i  $s = \tau$  ze wzoru (3.4) otrzymamy odpowiednio

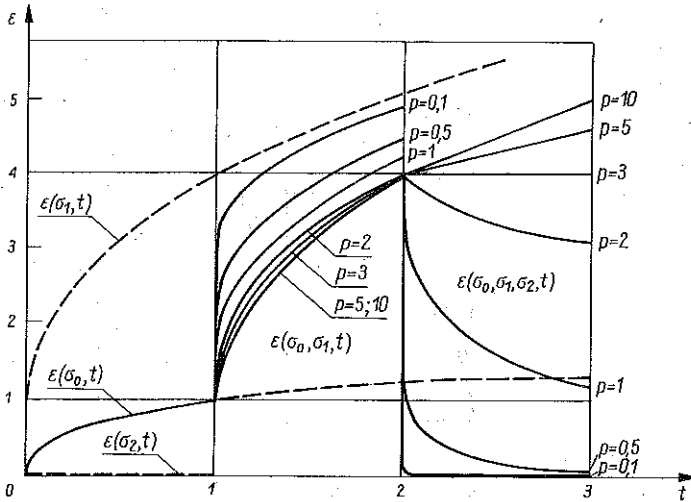
$$(3.6) \quad \varepsilon(t) = \left\{ \sum_i (\sigma_i^{\beta p} - \sigma_{i-1}^{\beta p}) (t - t_i)^{\alpha p} H(t - t_i) \right\}^{1/p}$$

oraz

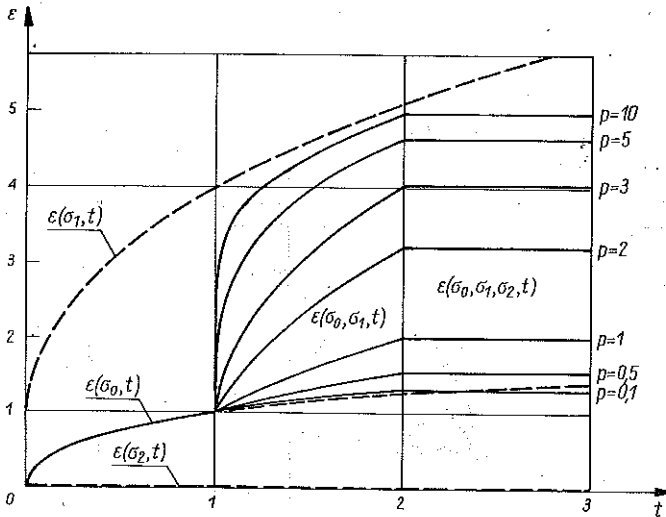
$$(3.7) \quad \varepsilon(t) = \left\{ \sum_i (\sigma_i^{\beta p} - \sigma_{i-1}^{\beta p}) (t^{\alpha p} - t_i^{\alpha p}) H(t - t_i) \right\}^{1/p}.$$

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono rodziny krzywych, określone równaniami (3.6) i (3.7) dla różnych wartości wykładnika  $p$  przy:  $a = 1$ ,  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 2$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ .

Na rys. 1 przedstawiono krzywe należące do pewnego zbioru hipotez dziedziczności  $p \in (0, 1/\alpha)$ , rozszerzonego na hipotezy umocnienia. Jeśli  $p = 1$ , to otrzymamy krzywą wg hipotezy Rozowskiego; jeśli  $p = 1/\beta = \frac{1}{2}$ , to krzywą wg hipotezy Rabotnowa, a w granicy  $p \rightarrow 0$  krzywą wg hipotezy starzenia i wreszcie dla  $p = 3$  krzywą wg hipotezy umocnienia Odqvista. Krzywe



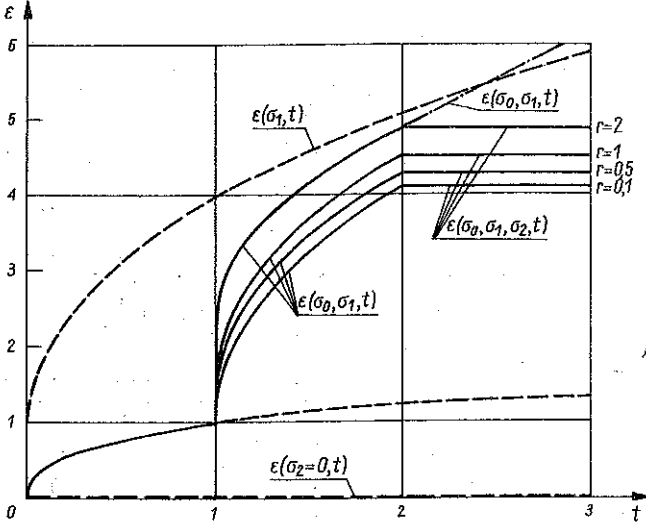
Rys. 1. Krzywe pełzania wyznaczone na podstawie hipotezy dziedziczności dla  $\Phi(X) = X^p$



Rys. 2. Krzywe pełzania wyznaczone na podstawie hipotezy umocnienia dla  $\Phi(X) = X^p$

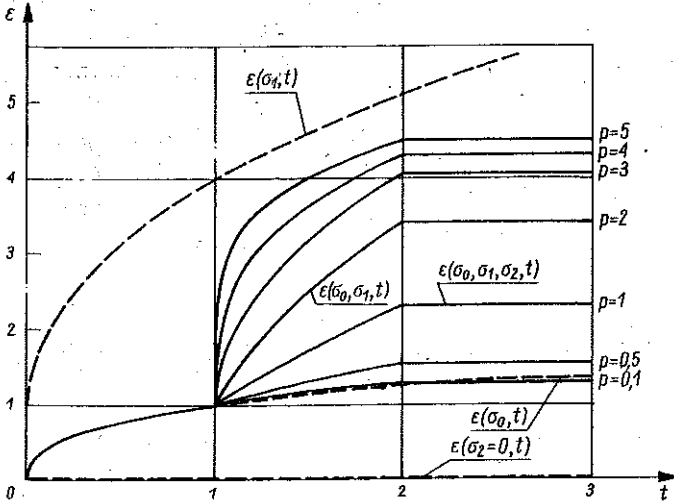
zbioru hipotez umocnienia przedstawiono na rys. 2:  $p=3$  — Odqvista,  $p=1$  — dla hipotezy płynięcia.

Dla potwierdzenia tezy, że równanie (3.4) przy  $s = \tau$  jest uogólnieniem hipotez umocnienia, przedstawiono na rys. 3 i 4 krzywe wyznaczone na podstawie hipotez z parametrami umocnienia Rabortnowa i kombinowanych.



Rys. 3. Krzywe pełzania wyznaczone na podstawie hipotezy z parametrem umocnienia Rabotnowa  $q = \int_0^t \sigma^r dt$

$$q = \int_0^t \sigma^r dt$$



Rys. 4. Krzywe pełzania wyznaczone na podstawie hipotezy kombinowanej  $\dot{\epsilon} = \alpha a^p \sigma^{6p} \epsilon^{1-p} t^{2p-1}$

Jeżeli parametr umocnienia Rabotnowa przyjmiemy w postaci

$$p = \int_0^t \sigma^r d\epsilon,$$

to przy uwzględnieniu (3.2) otrzymamy

$$(3.8) \quad \dot{\varepsilon} = \alpha a^{1/\alpha} \sigma^{\beta/\alpha - r(1-1/\alpha)} p^{1-1/\alpha}$$

Hipotezę kombinowaną napisano w postaci

$$(3.9) \quad \dot{\varepsilon} = \alpha a^p \sigma^{\beta p} \varepsilon^{1-p} t^{\alpha p - 1}$$

Równania różniczkowe (3.8) i (3.9) dla podanych wcześniej wartości liczbowych parametrów i przy różnych wartościach  $r$  oraz  $p$  rozwiązano numerycznie. Błąd przybliżenia rys. 3 i 4, na końcu przedziału całkowania, nie przekracza wartości 0,1.

Na podstawie analizy wykresów na rys. 3 i 4 oraz z porównania ich z rys. 2 można stwierdzić, że dane doświadczalne określone za pomocą wzorów (3.8) lub (3.9) będą opisane również wzorem (3.4).

Jeżeli pełzanie przy stałym naprężeniu jest określone za pomocą wzoru różnego od wzoru (3.2), to dla uzyskania z uogólnienia (2.7) klasycznej hipotezy trzeba odpowiednio dobrać operator. Własności takiego operatora będą zbliżone do własności operatora potęgowego (3.3); podobnie jak w rozpatrywanym obszarze zbliżone są własności różnych funkcji opisujących te same doświadczenia.

Reasumując powyższe, można stwierdzić, że prostym i jednocześnie ogólnym operatorem równań konstytutywnych pełzania (2.7) jest operator potęgowy (3.3). Stosując ten sam operator do opisu pełzania różnych tworzyw, przypiszemy każdemu stałą materiałową  $p$  będącą wykładnikiem operatora potęgowego.

Należy zaznaczyć, że równanie (2.7) z operatorem (3.3) nie uogólnia wszystkich istniejących hipotez pełzania. Inny przebieg od przedstawionych krzywych pełzania przy zmiennym naprężeniu będą miały krzywe dla innych rodzajów operatora  $\Phi$ . Na przykład dla operatora

$$\Phi(X) = X/\sigma^r,$$

równanie (2.7), przy uwzględnieniu (3.2) i  $s = \tau$ , sprowadza się do hipotezy MALININA [5]

$$\varepsilon = a\sigma^r(t) \int_0^t \sigma_{(\tau)}^{\beta-r} \frac{d\tau^\alpha}{d\tau} d\tau.$$

#### 4. WNIOSKI

1. Przedstawione równanie pełzania jest uogólnieniem równań znanych hipotez oraz zbiór ten w sposób ciągły rozszerza.

2. Dla uogólnionych hipotez dziedziczności i umocnienia wystarczająco ogólnym i prostym operatorem jest operator potęgowy.

3. Zaletą przedstawionego uogólnienia jest możliwość przybliżonego wystarczająco dokładnego opisu danych doświadczalnych i uzyskania rozwiązania w postaci analitycznej.

4. Stosując operator potęgowy do opisu pełzania różnych tworzyw można dokonać ich klasyfikacji przez przypisanie stałej materiałowej  $p$ , będącej wykładnikiem potęgi operatora.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Ю. Н. РАБОТНОВ, *Ползучесть элементов конструкции*, Изд. „Наука”, Москва 1966.
2. R. K. PENNY, D. L. MARRIOTT, *Desing for creep*, Mc Graw-Hill, London 1971.
3. A. JAKOWLUK, E. MIELESZKO, *Descriptive method for creep of alloys by non-stationary loading on the exemple of creep in the aluminium alloy*, Bull. Polon. Sci., Série Sci. tech., **24**, 1977.
4. E. MIELESZKO, *Dobór optymalnej metody opisu pełzania, relaksacji i pełzania przy niestacjonarnych obciążeniach niektórych tworzyw*, Praca doktorska, Białystok 1977.
5. Н. Н. МАЛИНИН, *Прикладная теория пластичности и ползучести*, Изд. „Машиностроение”, Москва 1975.

#### РЕЗЮМЕ

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ПОЛЗУЧЕСТИ

Для одноосного напряженного состояния предположено обобщение гипотез ползучести в виде уравнения

$$\Phi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \frac{d\Phi(f(\sigma, \tau))}{df(\sigma, \tau)} \frac{\partial f(\sigma, s)}{\partial s} d\tau,$$

где  $s = t - \tau$  или  $\tau$ , в зависимости от влияния истории нагружения на процесс ползучести. Применяя степенной оператор  $\Phi(X) = X^p$  в предлагаемой гипотезе, можно описать ползучесть разных материалов. Уравнения ползучести согласно классическим гипотезам являются частными примерами обобщенного уравнения или его приближениями.

#### SUMMARY

#### A MATHEMATICAL MODEL OF THE MECHANICAL CREEP HYPOTHESES

For a uniaxial stress state a generalization of the creep hypotheses is proposed in the form of an equation:

$$\Phi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \frac{d\Phi(f(\sigma, \tau))}{df(\sigma, \tau)} \frac{\partial f(\sigma, s)}{\partial s} d\tau,$$

where:  $s = t - \tau$  or  $\tau$ , depending on the existence or non-existence of a loading history



effect on the creep process. Application of a power operator  $\Phi(X) = X^p$  in this equation makes it possible to describe the creep in different materials. The creep equations resulting from the classical hypotheses constitute particular cases of this generalized equation, or its approximations.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 grudnia 1983 r.*

---