

## ZASTOSOWANIE OSOBLIWEGO ELEMENTU SKOŃCZONEGO W NOWEJ DOŚWIADCZALNEJ METODZIE WYZNACZANIA ODPORNOŚCI NA PĘKANIE

WIKTOR GAMBIN (WARSZAWA), PAWEŁ LIPIŃSKI,  
GUY PLUVINAGE (METZ)

W pracy [4] została zaproponowana nowa doświadczalna metoda wyznaczania odporności na pękanie zarówno w warunkach dynamicznych, jak i quasi-statycznych. W metodzie tej wykorzystano standardową próbkę *CT* o zmodyfikowanym kształcie. Aby metodę móc zastosować w praktyce, potrzebna jest znajomość funkcji podatności nowej próbki. W pracy niniejszej przedstawiono obliczenie tej funkcji metodą elementów skończonych. W tym celu wprowadzono trójwęzłowy element z osoblwą funkcją kształtu, który umożliwia ścisły opis osoblwości zarówno dla materiałów sprężystych jak i sprężysto-plastycznych. Macierz sztywności tego elementu podana jest w sposób jawny i nie wymaga żadnych dodatkowych obliczeń numerycznych. Wyniki obliczeń porównano z analitycznymi rozwiązaniami opisującymi pole naprężeń. Ponadto przedyskutowano różnicę pomiędzy funkcjami podatności dla standardowej próbki *CT* i próbki zmodyfikowanej.

### 1. WPROWADZENIE

Pole naprężeń i odkształceń w ciałach sprężystych w otoczeniu wierzchołka szczeliny są polami osoblwymi i mogą być opisane jednym parametrem, współczynnikiem intensywności naprężeń  $K_I$ . Krytyczna wartość tego parametru, w przypadku płaskiego stanu odkształcenia, nazywana odpornością materiału na pękanie  $K_{IC}$ , jest stałą materiałową. Sposoby pomiaru tej wielkości opisane są w normach (np. [1]) i opierają się na wynikach badań linicwej teorii zniszczenia. Zgodnie z nimi wprowadza się współczynnik uwolnionej energii potencjalnej

$$(1.1) \quad \mathcal{G} = -\frac{\partial \pi}{\partial a},$$

gdzie  $\pi$  oznacza energię potencjalną oraz  $a$  długość szczeliny. Dla próbki używanej w próbie zniszczenia  $\mathcal{G}$  może być określone wzorem

$$(1.2) \quad \mathcal{G} = \frac{1}{2} P^2 \left( \frac{\partial C}{\partial a} \right) / B,$$

gdzie  $P$  oznacza dane obciążenie,  $C = \delta/P$  podatność próbki,  $\delta$  przemieszczenie rozwierające szczelinę (rys. 1), a  $B$  grubość próbki.

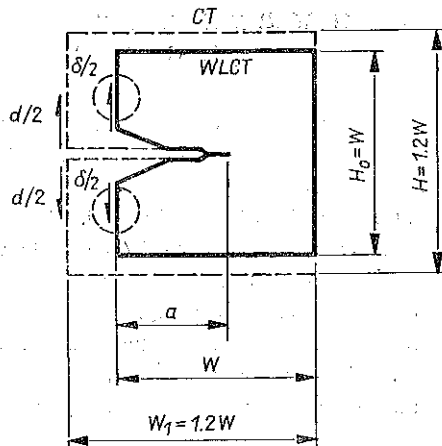
Z drugiej strony wyprowadzony jest następujący związek pomiędzy  $\mathcal{G}$  i  $K_I$ :

$$(1.3) \quad \mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2),$$

gdzie  $E$  i  $\nu$  oznaczają odpowiednio moduł Younga i współczynnik Poissona. Z (1.2) i (1.3) wynika, że współczynnik intensywności naprężeń  $K_I$  określony jest wzorem

$$(1.4) \quad K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} \sqrt{\frac{BWE}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial C}{\partial a}},$$

gdzie  $W$  oznacza szerokość próbki.



Rys. 1. Kształt próbek WLCT i CT

Bezwymiarowa wielkość we wzorze (1.4) nazywana jest funkcją podatności

$$(1.5) \quad Y\left(\frac{a}{W}\right) = \sqrt{\frac{BWE}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial C}{\partial a}},$$

i jej wartość dla danego  $a/W$  jest stała dla danej próbki.

Normy podają funkcję podatności standardowych próbek, ich parametry geometryczne oraz warunki, w jakich powinna być przeprowadzona próba zniszczenia.

Zatem jeżeli znana jest krytyczna wartość obciążenia  $P_c$ , to odporność na pękanie  $K_{IC}$  jest określona formułą

$$(1.6) \quad K_{IC} = \frac{P_c}{B\sqrt{W}} Y\left(\frac{a}{W}\right).$$

## 2. ODPORNOŚĆ NA PĘKANIE POD WPLYWEM OBCIĄŻEŃ DYNAMICZNYCH

W praktyce inżynierskiej często ważne jest określenie odporności na pękanie pod wpływem obciążeń dynamicznych. W tym celu wprowadza się parametr prędkości obciążenia

$$(2.1) \quad \dot{K}_I = \frac{dK_I}{dt} [\text{MPa} \sqrt{\text{m/s}}].$$

W wielu przypadkach parametr ten osiąga wartość  $10^5$  MPa  $\sqrt{\text{m/s}}$ . Dobrym przykładem jest pęknięta szyna kolejowa. Przy prędkości pociągu 300 km/h,  $K_I$  jest rzędu  $5 \cdot 10^5$  MPa  $\sqrt{\text{m/s}}$ . Ostatnio maszyny wytrzymałościowe o zamkniętej pętli sterowania są w stanie osiągnąć prędkość obciążenia do  $K_I = 10^4$  MPa  $\sqrt{\text{m/s}}$ . Próby uderzeniowe na specjalnym oprzyrządowaniu zwiększają tę granicę do wielkości rzędu  $10^5$  MPa  $\sqrt{\text{m/s}}$ . Aby osiągnąć wyższe prędkości obciążenia, potrzebne są metody oparte na propagacji fali obciążenia w badanej próbce. Tego typu metody zostały zaproponowane na Uniwersytecie w Brown [3] oraz w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN przez J. KLEPACZKĘ [4]. W tej ostatniej próbce obciążona klinowym trzpieniem umieszczona jest między dwoma prętami. Klin umożliwia dynamiczne zniszczenie próbki przez ściskającą falę podłużną. Kształt klinowo obciążonej próbki (WLCT — „wedge loaded compact tension”) i standardowej (CT — „compact tension”) pokazany jest na rys. 1.

Dla określenia  $K_{IC}$  przyjęto wzór (1.6). Z powodu nietypowego sposobu obciążenia i nowego kształtu próbki WLCT ważne jest określenie jej funkcji podatności  $Y(a/W)$ . Wartości tej funkcji dla różnych długości szczeliny mogą być wyznaczone numerycznie lub doświadczalnie przez obliczenie  $C = \delta/P$ .

Podejście doświadczalne jest bardziej kosztowne i mniej dokładne. Z tego powodu zdecydowano się na obliczenie metodą elementów skończonych.

### 3. ELEMENT Z OSOBLIWĄ FUNKCJĄ KSZTAŁTU

Z powodu dużej koncentracji pola naprężeń i odkształceń w pobliżu wierzchołka szczeliny, zastosowanie standardowych elementów trójkątnych daje niezadowalające wyniki. Zachodzi to nawet dla bardzo drobnej siatki elementów w otoczeniu wierzchołka szczeliny. Z tego powodu dla tego typu zadań budowane są elementy trójkątne, które umożliwiają opis osobliwych pól naprężeń i odkształceń. W pracy niniejszej zastosowano podejście wywodzące się z koncepcji dużych elementów [5]. Inne zastosowanie tej koncepcji, do obliczania współczynników intensywności naprężenia było pokazane w pracy [6]. Nasze sformułowanie prowadzi do wyników podobnych do otrzymanych przez Blackburne'a [7]. Jednakże przedstawiony w niniejszej pracy element ma macierz sztywności daną w sposób jawny, bez potrzeby numerycznego całkowania.

Rozważmy element trójkątny pokazany na rys. 2 o wierzchołkach  $N_i$ ,  $N_j$ ,  $N_m$ .

Współrzędne globalne tych wierzchołków w prostokątnym układzie współrzędnych  $x$ ,  $y$  są następujące:  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$ ,  $(x_m, y_m)$ . Wprowadzimy też lokalny układ współrzędnych  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $0 \leq \rho, \eta \leq 1$ . Wachlarz  $\rho$ -linii ( $\eta = \text{constans}$ ) ma początek w wierzchołku  $N_i$ , który odpowiada wierzchołkowi szczeliny. Współrzędne lokalne wierzchołków trójkąta są następujące:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ . Związki między globalnymi i lokalnymi współrzędnymi dowolnego punktu we wnętrzu trójkąta są następujące:

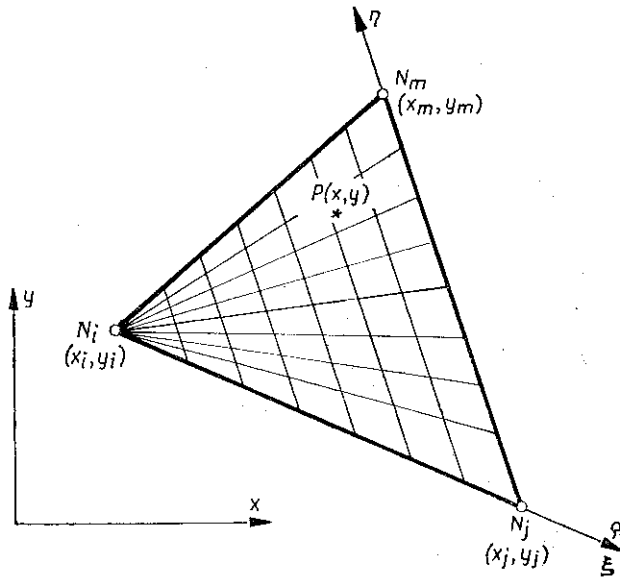
$$(3.1) \quad \begin{aligned} x &= x_i (1 - \rho) + x_j \rho (1 - \eta) + x_m \rho \eta, \\ y &= y_i (1 - \rho) + y_j \rho (1 - \eta) + y_m \rho \eta \end{aligned}$$

lub

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x &= x_i + a_x \rho + b_x \rho \eta, \\ y &= y_i + a_y \rho + b_y \rho \eta, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} a_x &= x_j - x_i, & b_x &= x_m - x_j, \\ a_y &= y_j - y_i, & b_y &= y_m - y_j. \end{aligned}$$



Rys. 2. Kształt osobliwego elementu trójkątnego

W notacji wektorowej będziemy mieli

$$(3.4) \quad \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} (1-\rho) + \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \rho (1-\eta) + \begin{Bmatrix} x_m \\ y_m \end{Bmatrix} \rho \eta$$

lub

$$(3.5) \quad \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix} \rho + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \rho \eta.$$

Jeżeli oznaczymy przemieszczenia wierzchołków trójkąta w kierunkach  $x$  i  $y$  przez  $(u_i, v_i)$ ,  $(u_j, v_j)$  oraz  $(u_m, v_m)$ , to wektor wszystkich przemieszczeń węzłowych będzie miał postać

$$(3.6) \quad \{\delta\} = \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m\}^T.$$

Niech  $u$  i  $v$  będą składowymi wektora przemieszczenia punktu leżącego wewnątrz trójkąta. Oznaczając wektor przemieszczenia przez  $\{u, v\}^T$ , przyjmijmy następującą aproksymację pola przemieszczeń:

$$(3.7) \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} (1-\xi) + \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \xi (1-\eta) + \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \xi \eta,$$

gdzie

$$(3.8) \quad \xi = \rho^\lambda.$$

Dla  $\lambda=1$  otrzymujemy liniową funkcję kształtu przyjmowaną w standardowych trójwęzłowych elementach trójkątnych (np. [8]). W tym przypadku równania (3.4) i (3.7) mają tę samą postać. Ponieważ dla materiału sprężystego pole przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka szczeliny zmienia się wraz z odległością od tego wierzchołka tak, jak pierwiastek kwadratowy tej odległości, przeto współrzędne  $(\rho, \eta)$  w (3.4) powinny być przetransformowane do  $\sqrt{\rho}, \eta$  w (3.7).

Tak więc osobliwość pól naprężeń i odkształceń w przypadku materiału sprężystego może być opisana przez przyjęcie  $\lambda=1/2$ .

Rozważmy teraz materiał sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem opisanym wzorem Ramberga-Osgooda:

$$(3.9) \quad \sigma = c\varepsilon^n,$$

gdzie  $\sigma$  i  $\varepsilon$  oznaczają odpowiednio ekwiwalentne naprężenie i odkształcenie,  $c$  stałą materiałową i  $n$ ,  $0 < n < 1$  parametr wzmocnienia. Rice i Rosengren [9] pokazali, że dla tego typu materiałów składowe odkształcenia mają osobliwość typu  $\rho^{-\frac{1}{1+n}}$ .

Dla  $n=1$  pojawia się przypadek sprężysty z osobliwością  $\rho^{-\frac{1}{2}}$ . Z drugiej strony jeżeli pole przemieszczeń jest typu  $\rho^\lambda$ , to pole odkształceń jest typu  $\rho^{\lambda-1}$ .

Zatem proponowana funkcja (3.7) może być zastosowana dla materiału Ramberga-Osgooda, jeżeli

$$(3.10) \quad \lambda = \frac{n}{1+n}, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}.$$

Układ współrzędnych  $\xi, \eta$ ,  $\xi = \rho^\lambda$  będzie przyjęty jako nowy lokalny układ współrzędnych, związany z układem globalnym związkiem

$$(3.11) \quad \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix} \xi^{\frac{1}{\lambda}} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \xi^{\frac{1}{\lambda}} \eta.$$

Wektor małych odkształceń jest następujący:

$$(3.12) \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix}.$$

W lokalnym układzie współrzędnych  $\xi, \eta$  mamy

$$(3.13) \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \xi_{,x} + u_{,\eta} \eta_{,x} \\ v_{,\xi} \xi_{,y} + v_{,\eta} \eta_{,y} \\ u_{,\xi} \xi_{,y} + u_{,\eta} \eta_{,y} + v_{,\xi} \xi_{,x} + v_{,\eta} \eta_{,x} \end{Bmatrix},$$

gdzie

$$(3.14) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} u_i \\ v_i \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} u_j \\ v_j \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} u_m \\ v_m \end{matrix} \right\} (1-\eta) + \left\{ \begin{matrix} u_i \\ v_i \end{matrix} \right\} \eta, \\ \left\{ \begin{matrix} u_i \\ v_i \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} u_j \\ v_j \end{matrix} \right\} \xi + \left\{ \begin{matrix} u_m \\ v_m \end{matrix} \right\} \xi. \end{cases}$$

W celu obliczenia pochodnych  $\xi_{,x}, \dots, \eta_{,y}$  zauważmy, że

$$(3.15) \quad [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix} = \det^{-1} [J] \begin{bmatrix} y_{,n} & -x_{,n} \\ -y_{,x} & x_{,x} \end{bmatrix},$$

gdzie  $[J]$  jest macierzą Jakobiego odwzorowania (3.11),

$$(3.16) \quad [J] = \begin{bmatrix} x_{,x} & x_{,n} \\ y_{,x} & y_{,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} (a_x + b_x \eta) \xi^{\frac{1}{\lambda}-1} & \lambda b_x \xi^{\frac{1}{\lambda}} \\ \frac{1}{\lambda} (a_y + b_y \eta) \xi^{\frac{1}{\lambda}-1} & \lambda b_y \xi^{\frac{1}{\lambda}} \end{bmatrix}$$

oraz

$$(3.17) \quad \det [J] = \frac{1}{\lambda} \rho^{2-\lambda} 2A$$

dla

$$(3.18) \quad 2A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \end{bmatrix} = a_x b_y - b_x a_y$$

będącego podwójnym polem elementu trójkątnego.

Przyjmując aproksymację (3.7) w (3.12) i wprowadzając (3.8), mamy

$$(3.19) \quad \{e\} = [B] \{\delta\},$$

gdzie

$$(3.20) \quad [B] = \frac{\rho^{\lambda-1}}{2A} \begin{bmatrix} -\lambda b_y & 0 & f_y & 0 & -f_y + \lambda b_y & 0 \\ 0 & \lambda b_x & 0 & -f_y & 0 & f_x - \lambda b_x \\ \lambda b_x & -\lambda b_y & -f_x & f_y & f_x - \lambda b_x & -f_y + \lambda b_y \end{bmatrix}$$

dla

$$(3.21) \quad \begin{cases} f_x = f_x(\lambda, \eta) = a_x + b_x [\lambda + \eta(1-\lambda)], \\ f_y = f_y(\lambda, \eta) = a_y + b_y [\lambda + \eta(1-\lambda)] \end{cases}$$

i  $\{\delta\}$  określonej wzorem (3.6).

Dla  $\lambda=1$  macierz  $[B]$  jest znaną stałą macierzą elementu trójkątnego z liniową funkcją kształtu. W tym przypadku  $[B]$  jest niezależne od  $\rho, \eta$  (np. [8]). Dla  $\lambda=1/2$  otrzymujemy macierz  $[B]$  nowego elementu osobliwego, z osobliwością sprężystego

pola odkształceń typu  $\rho^{-\frac{1}{2}}$ . Dla  $0 < \lambda < 1/2$  otrzymujemy macierz  $[B]$  dla materiału ze wzmocnieniem opisanym związkami (3.9) z osobliwością pola odkształceń typu  $\rho^{\lambda-1} = \rho^{-\frac{1}{1+n}}$ .

W dalszym ciągu założymy, że wektor naprężenia

$$(3.22) \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix},$$

związany jest z wektorem odkształcenia prawem Hooke'a

$$(3.23) \quad \{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\},$$

gdzie  $[D]$  jest macierzą sprężystości.

Macierz sztywności elementu jest następująca:

$$(3.24) \quad [K] = W \int_0^1 \int_0^1 [B]^T [D] [B] \det [J] d\xi d\eta = 2\Delta W \int_0^1 \int_0^1 [B]^T [D] [B] \rho d\rho d\eta,$$

gdzie  $W$  jest grubością elementu,  $2\Delta$  dane jest wzorem (3.18) i  $[B]$  wzorem (3.20).

Całkując (3.24) względem  $\rho$ , otrzymujemy

$$(3.25) \quad [K] = \frac{W}{4\Delta\lambda} \int_0^1 [B']^T [D] [B'] d\eta,$$

gdzie macierz

$$(3.26) \quad [B'] = \begin{bmatrix} -\lambda b_y & 0 & f_y & 0 & -f_y + \lambda b_y & 0 \\ 0 & \lambda b_x & 0 & -f_x & 0 & f_x - \lambda b_x \\ \lambda b_x & -\lambda b_y & -f_x & f_y & f_x - \lambda b_x & -f_y + \lambda b_y \end{bmatrix}$$

dla  $f_x$  oraz  $f_y$  danych wzorami (3.21) jest liniowa względem  $\eta$ . Całkując względem  $\eta$ , otrzymujemy ostatecznie

$$(3.27) \quad K = \frac{W}{4\Delta\lambda} \left( [B_1]^T [D] [B_1] + \frac{1}{2} [B_1]^T [D] [B_2] + \frac{1}{2} [B_2]^T [D] [B_1] + \frac{1}{3} [B_2]^T [D] [B_2] \right)$$

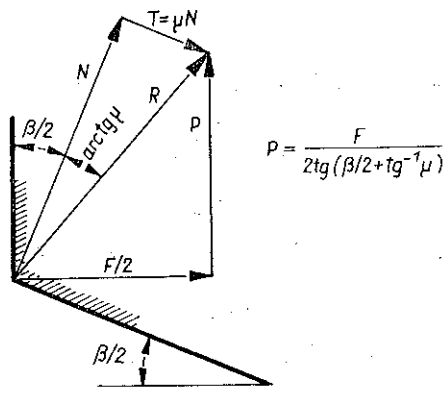
gdzie

$$(3.28) \quad [B_1] = [B']|_{\eta=0}, \quad [B_2] = ([B'] - [B_1])|_{\eta=1}$$

#### 4. OBLICZANIE FUNKCJI PODATNOŚCI DLA PRÓBKII WLCT

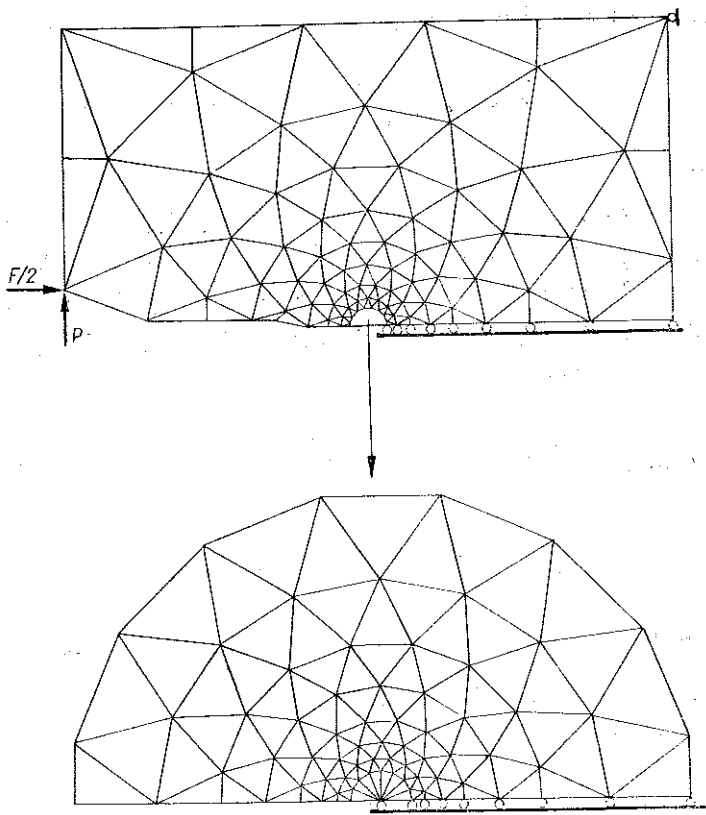
W celu obliczenia odporności na pęknięcie  $K_{IC}$  przyjęto następującą regułę rozkładu sił (rys. 3) we wzorze (1.6):

$$(4.1) \quad P_c = \frac{F_c}{2 \operatorname{tg} \left( \frac{\beta}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu \right)},$$



$$P = \frac{F}{2 \operatorname{tg}(\beta/2 + \operatorname{tg}^{-1} \mu)}$$

Rys. 3. Siatka elementów skończonych dla obliczeń próbki WLCT



Rys. 4. Rozkład sił działających na próbkę WLCT



gdzie  $F_c$  oznacza siłę ściskającą klin,  $\beta$  kąt nacięcia próbki oraz  $\mu$  współczynnik tarcia pomiędzy klinem a próbką. Podstawiając (4.1) do (1.6), otrzymujemy krytyczną wartość współczynnika intensywności naprężeń

$$(4.2) \quad K_{Ic} = \frac{F_c}{2B\sqrt{W} \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \operatorname{arc\,tg} \mu\right)} Y\left(\frac{a}{W}\right).$$

Przedstawimy szczegóły obliczenia funkcji  $Y$ . Wszystkie obliczenia były wykonane dla trzech  $\mu=0,0; 0,1$  oraz  $0,2$ .

Przyjęta siatka elementów skończonych pokazana jest na rys. 4. Są tam 272 elementy z 316 stopniami swobody. Wokół wierzchołka szczeliny umieszczono 8 osobliwych elementów trójkątnych. Funkcję podatności, jak również pole przemieszczeń, odkształceń i naprężeń obliczono dla 8 różnych długości szczeliny, funkcję  $Y$  aproksymowano następującym wielomianem:

$$(4.3) \quad Y\left(\frac{a}{W}\right) = A_0 \left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{1}{2}} + A_1 \left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}} + A_2 \left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{5}{2}} + A_3 \left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{7}{2}} + A_4 \left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{9}{2}}.$$

Współczynniki tego wielomianu dla  $\mu=0,0; \mu=0,1$  oraz  $\mu=0,2$  są następujące:

$\mu$	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
0,0	-12,7459	138,474	-357,673	446,958	-175,262
0,1	-14,0418	147,627	-384,913	479,136	-189,571
0,2	-17,0004	168,741	-447,494	553,184	-222,422

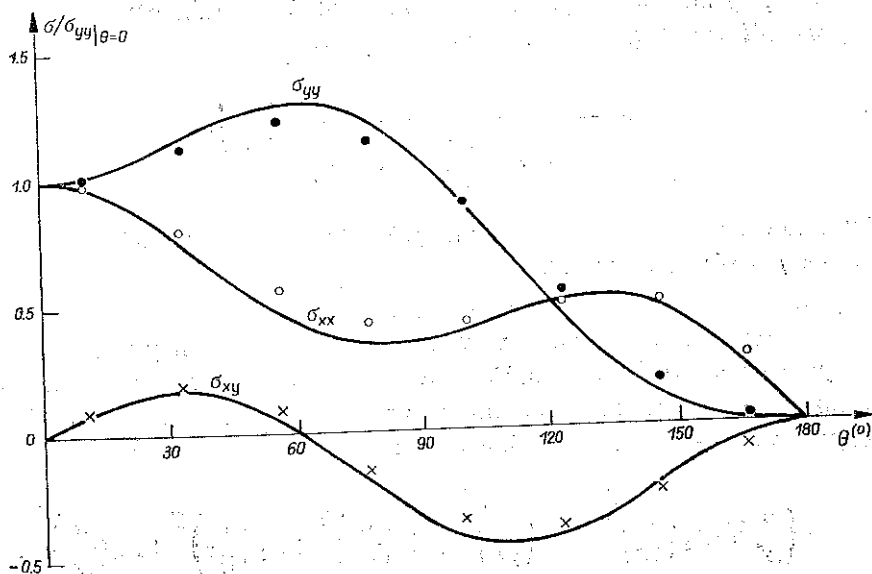
Jeżeli znana jest krytyczna wartość  $F$  i długość szczeliny  $a$ , to równania (4.2) i (4.3) z odpowiednimi współczynnikami  $A_0, \dots, A_4$ , umożliwiają wyznaczenie krytycznej wartości  $K_{Ic}$ .

## 5. DYSKUSJA WYNIKÓW I WNIOSKI

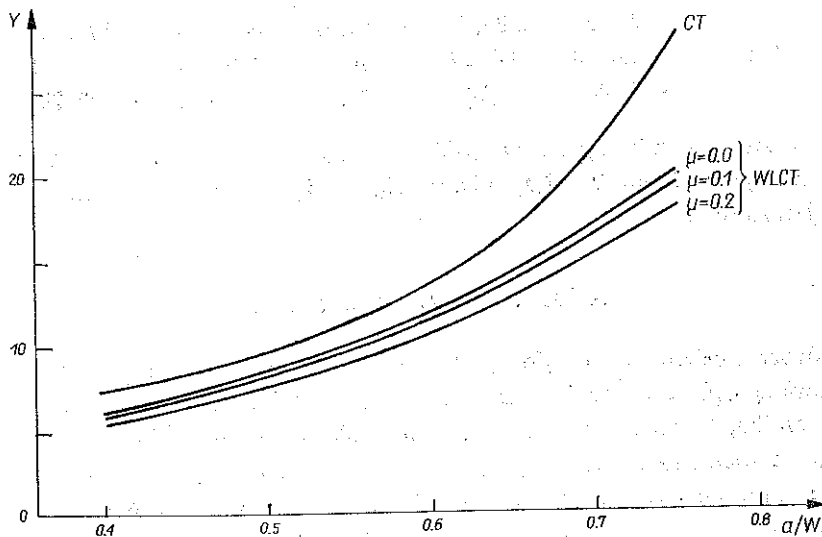
Głównym celem pracy było zbudowanie takich osobliwych elementów, które umożliwiają opis osobliwości szczeliny z wystarczającą dokładnością. Ze wzoru (3.20) wynika, że zmiany pola odkształceń i pola naprężeń wzdłuż promienia biegnącego od wierzchołka szczeliny są opisane w sposób ściśły. Na rys. 5 pokazano zmianę naprężeń  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  oraz  $\sigma_{xy}$  na okręgu o środku w wierzchołku szczeliny.

Naprężenia unormowano względem wartości  $\sigma_{yy}|_{\theta=0}$  przyjmując jako  $\rho$ ,  $\theta$  współrzędne układu biegunowego. Linie ciągłe na rysunku przedstawiają teoretyczne wartości naprężeń, a punkty dyskretne — wyniki obliczeń numerycznych. Zauważamy wystarczająco dobrą zgodność wyników.

Otrzymane wykresy funkcji podatności  $Y(a/W)$  pokazane są na rys. 6. Na rysunku tym możemy też porównać funkcję podatności próbki WLCT dla trzech wartości współczynnika tarcia z funkcją podatności próbki CT.



Rys. 5. Naprężenia  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  — dane teoretyczne i wyniki obliczeń numerycznych



Rys. 6. Funkcje podatności dla próbek WLCT i CT

Możemy zauważyć, że funkcja  $Y$  maleje, jeżeli stosunek  $F_c/P_c$  wzrasta. Zatem wzrost siły ściskającej  $F_c$  czyni próbkę jak gdyby sztywniejszą w porównaniu z próbką CT. Inną przyczyną powodującą różnicę pomiędzy funkcjami  $Y$  dla próbek WLCT i CT jest różny sposób określenia długości szczeliny.

Zgodnie z rys. 1 długość  $a$  dla próbki CT jest mierzona od wierzchołka szczeliny do punktu przecięcia z osią obciążenia próbki, ale przemieszczenie  $d$  jest mierzone na końcu nacięcia próbki. Dla próbki WLCT powyższy punkt przecięcia i miejsce pomiaru przemieszczenia  $\delta$  znajdują się w tym samym punkcie, to jest na końcu próbki.

#### PODZIĘKOWANIE

Wszystkie obliczenia wykonane zostały na maszynie cyfrowej Uniwersytetu w Metz. Za umożliwienie przeprowadzenia tych obliczeń autorzy składają Kierownictwu Uniwersytetu serdeczne podziękowanie. Z wdzięcznością zostały przyjęte również wszelkie cenne sugestie Profesora A. SAWCZUKA i Doc. J. KLEPACZKI.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. ASTM Standard No E 399-78
2. J. F. KNOTT, *Fundamental of fracture mechanics*, Butterworths, London 1973.
3. L. S. COSTIN, J. DUFFRY, L. B. FREUND, *Fracture initiation in metals under stress wave loading conditions*, ASTM STP, 627, 1977.
4. J. R. KLEPACZKO, *Application of the split Hopkinson pressure bar to fracture dynamics*, Mechanical Properties at High Rates of Strain, Proc. Inst. Phys. Conf., Ser, 47, Bristol 1979.
5. W. GAMBIN, *A method of large finite elements*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 11, 351-365, 1977.
6. W. GAMBIN, Y. YAMADA, *Crack tip singularity analysis by global-local model of large finite elements*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 27, 147-154, 1979.
7. R. S. BLACKBURN, *Calculation of stress intensity factors at crack tips using special finite elements* The Mathematics of Finite elements and Applications, Academic Press, London 1975.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method in engineering science*, Mc Graw-Hill 1971.
9. J. R. RICE, G. F. ROSENGREN, *Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material*, J. Mech. Phys. Solids, 16, 1-12, 1968.

#### Резюме

#### ПРИМЕНЕНИЕ ОСОБНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В НОВОМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОЙКОСТИ НА РАЗРУШЕНИЕ

В работе [4] предложен новый экспериментальный метод определения стойкости на разрушение так в динамических, как и квазистатических условиях. В этом методе использован стандартный образец CT с модифицированной формой. Чтобы метод можно было применять на практике, необходимо знать функции податливости нового образца. В настоящей работе представлены расчеты этой функции методом конечных элементов. С этой целью введен трехузловый элемент, с особой функцией формы, который дает возможность точно описать особенности так для упругих материалов, как и для упруго-пластических материалов. Матрица жесткости этого элемента приведена явным образом и не требует никаких дополнительных численных расчетов. Результаты расчетов сравнены с аналитическими решениями, описывающими поле напряжений. Кроме этого обсуждена разница между функциями податливости для стандартного образца CT и модифицированного образца.

## SUMMARY

## APPLICATION OF A SINGULAR FINITE ELEMENT IN THE NEW EXPERIMENTAL METHOD OF THE FRACTURE RESISTANCE DETERMINATION

In paper [4] the new experimental method has been proposed for determination of the fracture resistance under dynamic and quasi-static conditions. In this method the standard  $CT$  specimen with a modified shape is used. For practical applications of the method a knowledge of compliance function of the new sample is necessary. To this end the three-node element with a singular shape function is introduced; this enables an exact description of singularities for elastic as well as elastic-plastic materials. The stiffness matrix of the above element is given in an explicit way and no additional numerical calculations are required. The results of calculations are compared with the analytical solutions for stress field. Moreover, the differences between compliance functions for the standard  $CT$  specimen and the modified one are discussed.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

oraz

UNIWEERSYTET W METZ, FRANCJA.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1983 r.*