

DRGANIA GIĘTNE BELKI WSPORNIKOWEJ O ZMIENNYM PRZEKROJU

JERZY J A R O S Z E W I C Z (BIAŁYSTOK) i LONGIN Z O R Y J (LWÓW)

W artykule zastosowano metodę szeregów charakterystycznych do rozwiązywania zagadnienia brzegowego swobodnych drgań giętnych belki wspornikowej o dowolnie zmiennym przekroju z zamocowaną na niej masą skupioną. Otrzymano pierwsze współczynniki szeregu charakterystycznego z wykorzystaniem funkcji Cauchy'ego, przedstawionej w postaci szeregu potęgowego względem parametru częstości. Do wyznaczenia podstawowej częstości drgań zastosowano dwustronne estymatory Bernstejna. Jako przykład szczegółowo rozpatrzono przypadek belki wspornikowej w kształcie stożka, dla której zbadano wpływ masy skupionej i parametru zbieżności stożka na częstość podstawową. Podano wzór służący do obliczania częstości drgań, układu zastępczego (odpowiadającego rozpatrywanej belce) o jednym stopniu swobody i określono warunek jego stosowalności.

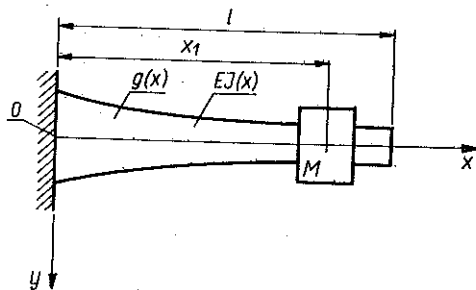
1. WSTĘP

W szeregu praktycznych przypadków badania drgań giętnych elementów maszyn i konstrukcji nośnych zachodzi konieczność uwzględnienia zmiennej sztywności spowodowanej zmianą ich poprzecznego przekroju. Szczególnie liczną grupę wśród nich stanowią elementy, które dają się sprowadzić do modelu belki lub wału zamocowanych wspornikowo, takich jak skrzydła samolotów, łopatki turbin lub wrzeciona obrabiarek.

Powszechnie do zbadania zagadnienia brzegowego drgań giętnych takich układów stosuje się metody przybliżone, w których problem dokładności rozwiązywania pozostaje bez odpowiedzi. W pracy [1] określono metodą elementów skończonych cztery pierwsze częstości i formy wspornikowej belki w kształcie stożka i klina. Tylko w nielicznych przypadkach możliwe jest ściśle rozwiązanie problemu. W pracy [2] określono podstawową częstość drgań giętnych belki wspornikowej w kształcie stożka za pomocą funkcji Bessela.

Do wyznaczania podstawowej częstości i obciążeń krytycznych takich układów wygodnie jest stosować metodę szeregów charakterystycznych, która polega na zbudowaniu szeregu charakterystycznego i zastosowaniu do niego dwustronnych estymatorów dla określenia niższych częstości drgań własnych

i obciążeń krytycznych [3]. Metoda ta pozwala otrzymać wzory analityczne dla niższych częstości i obciążeń krytycznych w przypadku układów dyskretno-ciągłych o zmiennym przekroju i o zmiennym obciążeniu osiowym z żadaną dokładnością [4 i 5].



Rys. 1. Model zastępczy belki: $EJ(x)$ — zmienna (sztywność, $g(x)$ — masa jednostki długości belki, M — masa skupiona, l — długość belki, x_1 — odległość zamocowania masy skupionej M od początku układu współrzędnych, x, y — współrzędne

W niniejszej pracy wyznacza się podstawową częstość drgań giętych belki wspornikowej o zmiennym przekroju z zamocowaną na niej masą skupioną (rys. 1) za pomocą metody szeregów charakterystycznych. Jako przykład szczegółowo rozpatrzono przypadek belki w kształcie stożka.

2. RÓWNIANIE CHARAKTERYSTYCZNE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO DRGAŃ BELKI

Badanie małych drgań giętych rozpatrywanego układu (rys. 1) sprowadza się do rozwiązania zagadnienia brzegowego opisanego równaniem

$$(2.1) \quad L[y] - \alpha_1 a_1(x_1) \delta(x - x_1) y(x_1) = 0,$$

przy następujących warunkach brzegowych:

$$(2.2) \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0,$$

gdzie

$$L[y] = y^{IV} + \frac{2f'(x)}{f(x)} y''' + \frac{f''(x)}{f(x)} y'' - \omega^2 v(x) y,$$

oraz

$$f(x) = EJ(x), \quad a_1 = f(x_1), \quad \alpha_1 = \omega^2 M, \quad v(x) = g(x)/f(x),$$

oraz gdzie δ oznacza funkcję Diraca, ω parametr częstości, I pochodną względem X .

Zgodnie z metodą szeregów charakterystycznych w celu wyznaczenia podstawowej częstości własnej układu określi się trzy pierwsze współczynniki odpowiedniego szeregu charakterystycznego.

Rozwiązania równania (2.1) poszukuje się w postaci [4]

$$(2.3) \quad y(x, \alpha) = c_0 Q(x, \alpha) + c_1 \dot{Q}(x, \alpha) + c_2 \ddot{Q}(x, \alpha) + c_3 \dddot{Q}(x, \alpha),$$

gdzie $Q(x, \alpha) = K(x, \alpha) + r_1 K(x_1, \alpha) K(x, x_1)$, $r_1 = \alpha a_1$; c_0, c_1, c_2, c_3 w tych równaniach oznaczają dowolne stałe, $K(x, \alpha)$ funkcję Cauchy'ego równania $L[y] = 0$, α parametr oraz o pochodną względem α .

W rezultacie podstawienia wyrażenia (2.3) do warunków brzegowych (2.2) otrzymanorównanie charakterystyczne:

$$(2.4) \quad \Delta \equiv (K_{xx}^{\text{II}} \dot{K}_{xx}^{\text{III}} - K_{xx}^{\text{III}} \dot{K}_{xx}^{\text{II}}) + r_1 (\dot{K}_{xx}^{\text{III}} K_{x_1}^{\text{II}} K_{1\alpha} + \\ + K_{xx}^{\text{II}} K_{x_1}^{\text{III}} \dot{K}_{1\alpha} - K_{xx}^{\text{III}} K_{x_1}^{\text{II}} \dot{K}_{1\alpha} - \dot{K}_{xx}^{\text{II}} K_{x_1}^{\text{III}} K_{1\alpha}) = 0 \Big|_{\substack{x=l, \\ \alpha=0}}$$

gdzie w celu skrócenia zapisu przyjęto oznaczenia $K(x_1, \alpha) = K_1 \alpha$, $K(x, x_1) = K_{x_1}$ oraz $\alpha = 0$, co jest możliwe przy ograniczeniu $F(0) \neq 0$. W praktyce najczęściej spotyka się przypadek $x_1 = l$, dla którego równanie (2.4) można uprościć do postaci

$$(2.5) \quad \Delta \equiv F_{01} - r_1 F_4^1 = 0 \Big|_{\substack{x=x_1=l, \\ \alpha=0}}$$

gdzie

$$(2.6) \quad F_{01} = K_{xx}^{\text{II}} \dot{K}_{xx}^{\text{III}} - K_{xx}^{\text{III}} \dot{K}_{xx}^{\text{II}}, \\ F_4^1 = \dot{K}_{xx}^{\text{II}} K_{xx} - K_{xx}^{\text{II}} \dot{K}_{xx}.$$

W równaniu (2.5) uwzględniono, że $K^{\text{II}}(l, l)$ i $K^{\text{III}}(l, l) = 1$, co wynika z samego określenia funkcji Cauchy'ego. Można zauważyć, że równanie (2.5) przy $M \rightarrow \infty$ przyjmuje postać

$$F_4^1 = 0 \Big|_{\substack{x=x_1=l, \\ \alpha=0}}$$

co odpowiada przegubowemu podparciu prawego końca belki.

W ogólnym przypadku funkcję Cauchy'ego można zbudować w postaci szeregów potęgowych względem zmiennej x lub względem kwadratu parametru częstości ω^2 [4]. W rozpatrywanym przypadku wykorzystuje się drugi sposób, co daje następującą postać funkcji $K(x, \alpha)$:

$$(2.7) \quad K(x, \alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} (-\omega)^{2i} K_i(x, \alpha),$$

gdzie

$$K_0 = f(\alpha) \int_{\alpha}^x \frac{(x-s)(s-\alpha)}{f(s)} ds,$$

$$K_i(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x v(t) K_0(x, t) K_{i-1}(t, \alpha) dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$J_0(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{(x-s)(s-\alpha)}{f(s)} ds,$$

$$J_i(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x g(t) J_0(x, t) J_{i-1}(t, \alpha) dt,$$

szereg (2.7) można napisać w postaci

$$(2.8) \quad K(x, \alpha) = f(\alpha) \sum_{i=0}^{\infty} (-\omega)^{2i} J_i(x, \alpha),$$

funkcje zaś (2.6) będą określone następującymi wzorami:

$$F_{01} = f^2(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (-\omega)^{2k} a_k, \quad F_4^1 = f^2(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (-\omega)^{2k} b_k,$$

gdzie

$$(2.9) \quad a_k = \sum_{i=0}^k (J_i^{\text{II}} J_{k-1}^{\text{III}} - J_i^{\text{III}} J_{k-1}^{\text{II}}),$$

$$b_k = \sum_{i=0}^k (J_i J_{k-1}^{\text{II}} - J_i^{\text{II}} J_{k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

3. WYZNACZENIE CZĘSTOŚCI PODSTAWOWEJ

Drogą odpowiednich przekształceń z uwzględnieniem wyrażeń (2.9) z równania (2.5) otrzymano szereg charakterystyczny:

$$(3.1) \quad \Delta \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-\omega)^{2k} A_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

którego trzy pierwsze współczynniki określono wzorami

$$(3.2) \quad A_0 = 1,$$

$$A_1 = \int_0^l g(t) \int_0^t \frac{(t-s)^2}{f(s)} ds dt + M \int_0^l \frac{(l-s)^2}{f(s)} ds;$$

$$(3.3) \quad A_2 = \int_0^l g(t) \left\{ \int_0^t g(u) J_0(t, u) \left[\int_0^u \frac{(u-s)(s-t)}{f(s)} ds \right] du \right\} dt +$$

$$+ \left\{ \int_0^l g(t) \int_0^t \frac{s(t-s)}{f(s)} ds dt \right\} \left\{ \int_0^l g(t) \int_0^t \frac{t(s-t)}{f(s)} ds dt \right\} +$$

$$+ \left\{ \int_0^l g(t) \int_0^t \frac{ts(t-s)}{f(s)} ds dt \right\} \left\{ \int_0^l g(t) \int_0^t \frac{(t-s)}{f(s)} ds dt \right\} +$$

$$+ M \left\{ \int_0^l g(t) J_0(l, t) \left[\int_0^l \frac{(t-s)(s-l)}{f(s)} ds \right] dt \right\} +$$

$$+ \int_0^l g(t) (l-t) [J_0(l, 0) J_0(t, 0) - J_0(l, 0) J_0(t, 0)] dt.$$

Dysponując współczynnikami A_0 , A_1 , A_2 szeregu (3.1) można wyznaczyć podstawową częstość drgań własnych modelu, stosując dwustronne estymatory BERNSTEINA [3]:

$$(3.4) \quad \frac{A_0}{\sqrt{A_1^2 - 2A_0 A_2}} \leq \omega_0^2 \leq \frac{2A_0}{A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_0 A_2}}.$$

W przypadku szczególnym, gdy masa skupiona M jest znacznie większa od masy ciągłej belki, co można określić warunkiem

$$\int_0^l \rho(x) S(x) dx \ll M,$$

gdzie $\rho(x)$ i $S(x)$ oznaczają odpowiednio gęstość i pole poprzecznego przekroju belki, równanie charakterystyczne (2.5) można napisać w postaci

$$(3.5) \quad 1 + r_1 f(x_1) [(x-\alpha) J_0(x, \alpha) - J_0(x, \alpha)] = 0 \Big|_{\substack{x=x_1=l \\ \alpha=0}}$$

Stąd otrzymano następujący wzór na kwadrat częstości własnej odpowiedniego układu zastępczego o jednym stopniu swobody:

$$(3.6) \quad \omega_0^2 = \left[M \int_0^l \frac{(l-t)}{f(t)} dt \right]^{-1}.$$

4. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

Jako przykład rozpatrzono jednorodną belkę w postaci stożka ściętego, której oś x skierowana jest wzdłuż osi stożka z początkiem w środku dolnej podstawy o promieniu R . Wprowadzając następujące oznaczenia: H — wysokość stożka, pełnego, będącego dopełnieniem ściętego, l — wysokość stożka, ρ — gęstość materiału stożka oraz $\gamma = H/l$ — współczynnik zbieżności, otrzymano wyrażenia dla sztywności i masy belki:

$$(4.1) \quad f(x) = EJ_0 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^4, \quad g(x) = m_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2,$$

gdzie $J_0 = \frac{1}{4} \pi R^4$ oznacza moment bezwładności przekroju podstawy oraz $m_0 = \pi \rho R^2$ masę jednostki długości u podstawy. Współczynnik γ może przyjmować wartości od 0 do 1, przy czym $\gamma = 0$ odpowiada postaci walca, $\gamma = 1$ zaś postaci stożka pełnego. Masę skupioną M wygodnie jest uwzględnić za pomocą stosunku $\mu = M/m_0 l$. Przypadek $\gamma = 1$ i $\mu \neq 0$ ma charakter osobliwy z uwagi na zerową sztywność stożka pełnego na jego wierzchołku.

Uwzględniając wzory (4.1), obliczono całki występujące w wyrażeniach (3.2), (3.3) i otrzymano następującą postać szeregu charakterystycznego (2.5):

$$(4.2) \quad 1 + \left[\frac{5-\gamma}{60} + \frac{\mu}{3(1-\gamma)} \right] a \omega^2 + \frac{1}{360} \left[\frac{1}{8} + \frac{\varphi_1(\gamma)}{28\gamma^8} + \right. \\ \left. + \mu \frac{\varphi_2(\gamma)}{\gamma^7(1-\gamma)} \right] a^2 \omega^4 - \dots = 0,$$

gdzie

$$(4.3) \quad \varphi_1(\gamma) = 4\gamma^7 + 14\gamma^6 + 84\gamma^5 - 875\gamma^4 + 1820\gamma^3 - 1470\gamma^2 + \\ + 420\gamma + 420(1-\gamma)^4 \ln(1-\gamma),$$

$$(4.4) \quad \varphi_2(\gamma) = \gamma^7 + \gamma^6 + 3\gamma^5 + 15\gamma^4 - 110\gamma^3 + 150\gamma^2 - 60\gamma - 60(1-\gamma)^3 \ln(1-\gamma), \\ a = m_0 l^4 / EJ_0.$$

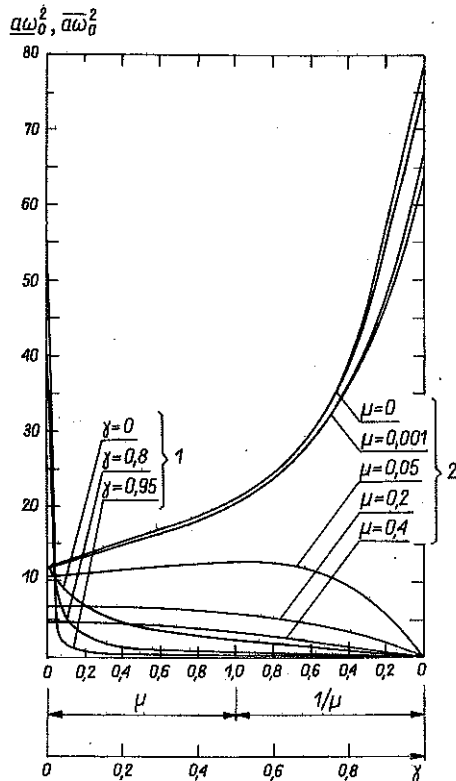
W przypadkach gdy γ przyjmuje małe wartości, do obliczenia funkcji $\varphi_1(\gamma)$ i $\varphi_2(\gamma)$ korzystnie jest stosować zamiast ścisłych wzorów (4.3), (4.4) odpowiadające im szeregi:

$$\frac{\varphi_1(\gamma)}{\gamma^8} = -420 \cdot 24 \left(\frac{3!}{8!} + \frac{4!}{9!} \gamma + \frac{5!}{10!} \gamma^2 + \dots \right),$$

$$\frac{\varphi_2(\gamma)}{\gamma^7} = 1 - 360 \left(\frac{3!}{7!} + \frac{4!}{8!} \gamma + \frac{5!}{9!} \gamma^2 + \dots \right).$$

Dla szczególnego przypadku $\gamma \rightarrow 0$ szereg (4.2) przejmie postać

$$(4.5) \quad 1 + \frac{1}{12} (1 + 4\mu) a \omega^2 + \frac{1}{7!} (1 + 8\mu) a^2 \omega^4 + \dots = 0,$$



Rys. 2. Wykresy zależności dolnych $a\omega_0^2$ i górnych $\bar{a}\bar{\omega}_0^2$ kwadratu podstawowej częstości drgań od stosunku mas μ (krzywe 1) i od parametru zbieżności γ (krzywe 2)

dla $\mu = 0$ zaś odpowiednio

$$(4.6) \quad 1 + \left(\frac{5-4\gamma}{60} \right) a\omega^2 + \frac{1}{360} \left(\frac{1}{8} + \frac{\varphi_1(\gamma)}{28\gamma^8} \right) a^2 \omega^4 + \dots = 0,$$

co zgadza się z wynikami otrzymanymi w pracy [5].

Na podstawie wzorów (3.4) z uwzględnieniem szeregów (4.2), (4.5) i (4.6) otrzymano wykresy (rys. 2) dolnych $\underline{a\omega_0^2}$ i górnych $\overline{a\omega_0^2}$ estymatorów kwadratu częstości podstawowej dla stosunku mas μ przy wybranych wartościach parametru zbieżności γ (krzywe 1) i zależności tych estymatorów od γ przy różnych wartościach μ (krzywe 2).

Z przedstawionych na rys. 2 wykresów wynika, że przy $\mu = 0$ i odpowiednio małych μ , estymatory $\underline{a\omega_0^2}$ i $\overline{a\omega_0^2}$ rosną wraz ze wzrostem γ . Począwszy od $\mu \geq 0,05$ — $\underline{a\omega_0^2}$ i $\overline{a\omega_0^2}$ maleją i zbiegają do 0 tym intensywniej, im większe jest γ i μ .

Począwszy od $\mu = 4$ do 5 dalszy wzrost stosunku wpływa znikomo na zmianę kwadratu częstości podstawowej, której wartość zbliża się do wartości odpowiedniego układu o jednym stopniu swobody. W takich przypadkach

Tablica 1

Lp.	γ	μ	$\underline{a\omega_0^2}$	$\overline{a\omega_0^2}$	$a\omega_0^2$	ε [%]
1	0,1	1,0	2,260589	2,260655	2,700	19,437
2		2,0	1,230687	1,230709	1,350	9,694
3		5,0	0,519878	0,519892	0,540	3,860
4		10,0	0,264876	0,264877	0,270	1,925
5		20,0	0,133707	0,133711	0,135	0,972
6	0,4	1,0	1,649875	1,649929	1,800	9,097
7		2,0	0,860930	0,860943	0,900	4,542
8		5,0	0,353601	0,353594	0,360	1,810
9		10,0	0,178385	0,178389	0,180	0,897
10		20,0	0,089595	0,089595	0,090	0,446
11	0,6	1,0	1,150676	1,150721	1,200	4,284
12		2,0	0,587449	0,587458	0,600	2,128
13		5,0	0,237969	0,237972	0,240	0,840
14		10,0	0,119490	0,119490	0,120	0,418
15		20,0	0,059873	0,059873	0,060	0,167
16	0,8	1,0	0,592943	0,592947	0,600	1,180
17		2,0	0,298226	0,298227	0,300	0,604
18		5,0	0,119716	0,119716	0,120	0,251
19		10,0	0,059929	0,059929	0,060	0,167
20		20,0	0,029982	0,029982	0,030	0,067

do wyznaczenia częstości podstawowej można stosować wzór

$$(4.7) \quad a\omega_0^2 = \frac{3(l-\gamma)}{\mu}$$

Wzór (4.7) można wyprowadzić ze wzoru (3.6), jak również otrzymać określając współczynniki (4.2) przy $\mu \rightarrow \infty$.

W tabelicy 1 porównano przykładowe wartości dolnych $a\omega_0^2$ i górnych $\bar{a}\omega_0^2$ estymatorów kwadratu częstości podstawowej (obliczone na podstawie wzorów (3.4) i (4.2)) z wartościami kwadratu częstości odpowiedniego układu dyskretnego $a\omega_0^2$ obliczonego ze wzoru (4.7). W ostatniej rubryce tabelicy napisano różnicę względną ε między $a\omega_{0sr}^2$ i $a\omega_0^2$, gdzie

$$a\omega_{0sr}^2 = \frac{1}{2} (a\omega_0^2 + \bar{a}\omega_0^2).$$

Analizując wyniki obliczeń przytoczone w tabelicy 1 można stwierdzić, że wartości kwadratu częstości obliczone ze wzoru (4.7) przewyższają wartość ścisłą mniej niż o 5% przy odpowiednio dużej wartości stosunku μ , który wynosi: 5 dla $\gamma = 0,1$; 2 dla $\gamma = 0,4$ oraz 1 dla $\gamma \geq 0,6$.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

1. Ogólne wzory (3.2) i (3.3) pozwalają otrzymać wzory na drugi i trzeci współczynnik szeregu charakterystycznego w postaci zamkniętej dla dowolnych funkcji sztywności po obliczeniu stosunkowo prostych całek.

2. Wzór (3.6) umożliwia otrzymanie wzoru na częstość własną układu zastępczego o jednym stopniu swobody dla dowolnie zmiennej sztywności przy dostatecznie dużej wartości masy skupionej.

3. Zastosowane najprostsze estymatory podstawowej częstości własnej dają dobrą dokładność obliczeń. Dla belki w kształcie stożka różnica względna między wartościami dolnych $a\omega_0^2$ i górnych $\bar{a}\omega_0^2$ estymatorów nie przekracza 0,10% przy dowolnych znaczeniach współczynnika zbieżności γ i stosunku mas μ , z wyjątkiem przypadków odpowiadających warunkom $0,8 \leq \gamma < 1$ i $\mu < 0,05$, dla których różnica nie przekracza 4%.

4. W wyniku badania wpływu parametru zbieżności i masy skupionej na częstość podstawową belki w kształcie stożka stwierdzono, że estymatory $a\omega_0^2$ i $\bar{a}\omega_0^2$ rosną ze wzrostem parametru γ przy stosunku mas $\mu = 0$ i bliskich zeru (np. $\mu = 0,001$), maleją zaś i zbiegają do zera przy $\mu \geq 0,05$.

5. Przytoczony wzór (4.7) na obliczenie częstości własnej układu zastępczego dla belki w kształcie stożka jest bardzo prosty i daje wystarczającą dokładność obliczeń przy stosunku $\mu \geq 5$. Różnica względna między wartością estymatorów $a\omega_{0sr}^2$ i wartością obliczoną ze wzoru (4.7) nie przekracza 5% przy $\mu = 5$ dla $\gamma = 0,1$, przy $\mu = 2$ dla $\gamma = 0,4$ i przy $\mu = 1$ dla $\gamma \geq 0,6$.

6. Dla przypadków szczególnych obliczono estymatory podstawowej częstości belki wspornikowej bez masy skupionej w kształcie walca ($\gamma = 0$, $\mu = 0$) i w kształcie stożka pełnego ($\gamma = 1$, $\mu = 0$), które wynoszą odpowiednio: $\underline{a\omega}_0^2 = 12,358$, $\overline{a\omega}_0^2 = 12,364$ oraz $\underline{a\omega}_0^2 = 74,828$, $\overline{a\omega}_0^2 = 78,196$ i zgadzają się z odpowiednimi wartościami ścisłymi, obliczonymi w pracy [2] i z wartościami przybliżonymi w pracach [1 i 3].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. V. KRISHNA MURTY, K. R. PRABHAKARAN, *Vibration of tapered cantilever beams and shafts*, Aeronautical Quarterly, **20**, p. 171, May 1969.
2. M. H. COVBLE, *Finite transform solution of the general conical cantilever beams problem*, Proc. 4 th Techn. Meet Soc. Eng. Sci., Raleigh, New York, 453—461, 1966, Recent Adv. Eng., 1968, vol. 3.
3. С. А. БЕРНШТЕЙН, К. К. КЕРОПЯН, *Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции*, Госстройиздат., 281 стр., Москва 1960.
4. Л. М. ЗОРЬИЙ, *Об универсальных характеристических уравнениях в задачах колебаний и устойчивости упругих систем*, Механика Твёрдого Тела, **6**, стр. 155—162, 1982.
5. Д. А. БАЙДК, Я. А. ЗОРЬИЙ, *О влиянии жесткости закрепления на частоты колебаний консольных стержней*, Физико-Химическая Механика Материалов, **5**, стр. 114—117, 1972.

РЕЗЮМЕ

СВОБОДНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

В работе применён метод характеристических рядов к краевой задаче о свободных изгибных колебаниях консольной балки произвольного поперечного сечения с прикреплённой к ней сосредоточенной массой. Построены три первые коэффициенты характеристического ряда с помощью функции Коши, представленной в виде степенного ряда по параметру частоты. Для определения основной частоты колебаний применены двусторонние оценки Бернштейна. В качестве примера детально рассмотрен случай консольной балки в форме конуса, для которой исследовано влияние сосредоточенной массы и параметра конусности на основную частоту. Приведена расчётная формула для частоты колебаний системы с одной степенью свободы соответствующей рассматриваемой балке и определено условие её применимости.

SUMMARY

FREE TRANSVERSAL VIBRATIONS OF A CANTILEVER BEAM WITH VARIABLE CROSS-SECTION

In this paper the characteristic series method is applied to solve the boundary-value problem of free transversal vibrations of a cantilever beam with variable cross-section with

an attached concentrated mass. First terms of the characteristic series are obtained by means of the Cauchy function expanded into a power series of the frequency parameter. In order to calculate the basic frequency, Bernstein's double estimators are used. As an example, a tapered cantilever beam is considered in detail. Influence of the attached mass and taper parameter on the basic frequency are investigated. The formula for the vibration frequency of the single degree-of-freedom system corresponding to the considered tapered cantilever is obtained. Conditions of applicability of this formula are investigated.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA
INSTYTUT MECHANIKI
I
LWOWSKI POLITECHNICZNY INSTYTUT
WYDZIAŁ BUDOWY MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 stycznia 1985 r.
