

O ZASTOSOWANIU PODWÓJNYCH SZEREGÓW TRYGONOMETRYCZNYCH DO OBLICZEŃ W TEORII PŁYT

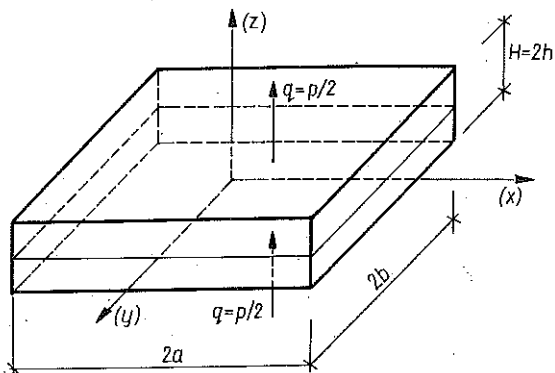
JERZY MOSSAKOWSKI (WARSZAWA)

Przeprowadzono analizę zastosowania podwójnych szeregów trygonometrycznych do efektywnych obliczeń w teorii płyt. Na przykładzie pewnych warunków brzegowych wyznaczono dla m, n -tego wzoru szeregu błąd względny wielkości fizycznych i geometrycznych teorii technicznej płyt i teorii Reissnera w stosunku do rozwiązania ścisłego teorii sprężystości. Wykazano, że błąd ten nie zależy od warunków brzegowych i rodzaju obciążenia. Zaproponowano kryterium, które ogranicza od góry liczbę wyrazów szeregów trygonometrycznych w zależności od rodzaju przyjętej teorii przybliżonej.

Rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej przyczynił się nie tylko do opracowania nowych metod rozwiązywania zagadnień technicznych (np. metody elementów skończonych) lecz także znacznie zwiększył zakres zastosowań znanych i od dawna stosowanych metod analitycznych. Przykładem takiej metody może być metoda podwójnych szeregów trygonometrycznych. Zastosowania tej metody w teorii płyt i powłok, przy tradycyjnych metodach obliczeń, ograniczały się do zsumowania kilkunastu lub kilkudziesięciu wyrazów rozwinięcia ($m, n < 10$). Obecnie elektroniczna technika obliczeniowa pozwala na znaczne zwiększenie liczby wyrazów szeregu ($m, n < 100$). Zachodzi jednak pytanie, czy uwzględnienie tak dużej liczby wyrazów szeregu zwiększa dokładność obliczeń i czy przybliża nas do wyznaczenia rzeczywistego stanu naprężenia i przemieszczenia w płycie lub powłoce. Przedstawiono poniżej przykład z teorii płyt będzie próbą częściowej odpowiedzi na to pytanie.

Rozważmy obszar przedstawiony na rysunku 1. Zakładamy, że materiał zajmujący ten obszar jest sprężysty i podlega prawu Hooke'a. Na powierzchniach górnej (h) i dolnej ($-h$) działa obciążenie symetryczne względem osi x i y i antysymetryczne względem płaszczyzny $z = 0$. Zakładamy, że na powierzchniach bocznych obszaru rozwiązanie ma spełnić warunki

$$(1) \quad w(s, z) = 0, \quad \sigma_{nn}(s, z) = 0, \quad \varepsilon_{sz}(s, z) = 0.$$



Rys. 1

Jeżeli stosunek h/a jest mały, to rozwiązania możemy poszukiwać w ramach teorii płyt cienkich. Równaniem, które należy rozwiązać, będzie równanie różniczkowe ugięcia powierzchni środkowej $W(x, y)$

$$(2) \quad D \nabla^2 \nabla^2 W(x, y) = p(x, y) = 2q(x, y),$$

gdzie

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}.$$

Rozłóżmy obciążenie w podwójny szereg trygonometryczny

$$(3) \quad \frac{p(x, y)}{2} = q(x, y) = \sum_{m, n} q_{m, n} \cos \lambda_1 x \cos \lambda_2 y = \sum_{m, n} q_{m, n} [c_x c_y].$$

Wprowadzono tu i w dalszych rozważaniach oznaczenia

$$\lambda_1 = \frac{m\pi}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{n\pi}{2b}, \quad \lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

oraz skrócone zapisy

$$(4) \quad [c_x c_y] = \cos \lambda_1 x \cos \lambda_2 y, \\ [s_x s_y] = \sin \lambda_1 x \sin \lambda_2 y.$$

Rozwiązanie równania (2) przy warunkach brzegowych (1) zostało podane przez Naviera. Ma ono postać

$$(5) \quad W(x, y) = \frac{2}{D} \sum_{m, n} q_{mn} \frac{1}{\lambda^4} [c_x c_y], \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$$

Rozwiązanie to można napisać w inny sposób:

$$(6) \quad W(x, y) = \sum_{m, n} q_{mn} \left[\frac{3(1-\nu^2)h}{E\gamma_{mn}^4} \right] [c_x c_y].$$

Wprowadzono tu parametr

$$(7) \quad \gamma_{mn} = \lambda h = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi h}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi h}{2b}\right)^2},$$

który w dalszych rozważaniach będzie odgrywał istotną rolę. Wartość tego parametru zależy od całkowitych liczb m i n oraz od zmieniających się w sposób ciągły wymiarów płyty h , a , b . Możemy więc w dużych przedziałach traktować parametr γ_{mn} jako parametr zmieniający się w sposób ciągły (z wyjątkiem punktów $a = 0$ oraz $b = 0$).

Z rozwiązań (5) lub (6) można wyznaczyć wszystkie interesujące nas wielkości geometryczne lub statyczne.

Postawione zagadnienie zostało z matematycznego punktu widzenia rozwiązane. Przy wykonywaniu obliczeń numerycznych musimy jednak ograniczyć się do skończonej liczby wyrazów szeregu. Pierwszym warunkiem, jaki należy narzucić na liczbę wyrazów szeregu, jest warunek dobrego przybliżenia skończoną liczbą wyrazów obciążenia $q(x, y)$ we wzorze (3). Otrzymamy stąd $m \geq m_0$ i $n \geq n_0$ gdzie para (m_0, n_0) zależy tylko od rodzaju obciążenia i określa minimalną liczbę wyrazów szeregu, jaką należy uwzględnić w obliczeniach. Wyznaczenie drugiego warunku, który powinien zależeć od wymiarów geometrycznych płyty oraz rodzaju przybliżonej teorii (teoria techniczna, teoria Reissnera) jest celem naszej pracy.

Jak już powyżej przewidziano obliczenia przeprowadza się dla skończonej liczby wyrazów szeregu, każde więc obciążenie cząstkowe $q_{mn} [c_x c_y]$ możemy traktować niezależnie i wyznaczyć odpowiadający mu stan przemieszczeń i naprężeń. Stan końcowy otrzymamy jako superpozycję poszczególnych stanów. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do wybranej pary (m, n) i wyznaczmy odpowiadające tej parze naprężenia i przemieszczenia na pewnych charakterystycznych powierzchniach. Dla uproszczenia zapisu indeksy m i n będziemy zamieszczać tylko tam, gdzie to będzie niezbędne. W technicznej teorii płyt ze wzoru (6) i dla pary (m, n) otrzymamy

$$(8) \quad w^T = w_{mn}(x, y) = q_{mn} \left[\frac{3(1-\nu^2)h}{E\gamma^4} \right] [c_x c_y].$$

Możemy wyznaczyć teraz ekstremalne wartości naprężeń. Moment gnący M_{xx} wywołuje ekstremalne naprężenie, gdy $z = h$. Jest ono równe

$$\sigma_{xx} = \frac{3}{2h^2} M_{xx} = -\frac{3D}{2h^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] w = q_{mn} \frac{3}{\gamma^4} [\gamma_1^2 + \nu \gamma_2^2] [c_x c_y].$$

Wyznamy jeszcze sumę naprężeń normalnych

$$(9) \quad \sigma^T = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = q_{mn} \left[\frac{3(1+\nu)}{\gamma^2} \right] [c_x c_y].$$

W wyrażeniu powyższym występuje tylko parametr γ , co upraszcza w dużej mierze dalsze rozważania. Ekstremalne naprężenie związane z momentem skręcającym M_{xy} wystąpi na powierzchni $z = h$ i będzie równe

$$(10) \quad \tau_{xy}^T = -\frac{3}{2h^2} M_{xy} = -\frac{3(1-\nu)D}{2h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\ = -q_{mn} \left[\frac{3(1-\nu)\gamma_1 \gamma_2}{\gamma^4} \right] [s_x s_y].$$

Ekstremalne naprężenie wywołane siłą Q_x wystąpi na powierzchni $z = 0$ i będzie równe

$$(11) \quad \tau_{xy}^T = \frac{3}{4h} Q_x = -\frac{3D}{4h} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -q_{mn} \frac{3\gamma_1}{2\gamma^2} [s_x c_y].$$

Równania technicznej teorii płyt stosuje się na ogół, gdy stosunek $h:a \leq 1:20$. W przypadku płyt o większej grubości zaleca się stosowanie dokładniejszych teorii uwzględniających wpływ naprężeń tnących na ugięcie płyty. Spośród wielu dokładniejszych teorii zajmiemy się najbardziej znaną — teorią Reissnera. Równania tej teorii dadzą się napisać w postaci [1 i 2]:

$$(12) \quad (1 - \varrho \nabla^2) \mathbf{Q} - \frac{\varrho}{1-\nu} \text{grad div } \mathbf{Q} - D \text{ grad } \nabla^2 w = 0, \\ -\text{div } \mathbf{Q} = p = 2q.$$

gdzie $w(x, y)$ jest średnim ugięciem płyty; wektor $\mathbf{Q}(Q_x, Q_y)$ jest wektorem sił tnących oraz $\varrho = H^2:10 = 2h^2:5$.

Wektor obrotu normali $\mathfrak{B}(\beta_x, \beta_y)$ wyraża się wzorem

$$(13) \quad \mathfrak{B} = -\text{grad } w + \frac{1}{D} \cdot \frac{2\varrho}{1-\nu} \mathbf{Q}.$$

Po podstawieniu do [12]

$$(14) \quad \mathbf{Q} = D [\nabla^2 - \text{grad div}] \nabla^2 \Psi - D \text{ grad } \nabla^2 \Psi, \\ w = [1 - \varrho \nabla^2] \text{div } \Psi + \left[1 - \frac{2-\nu}{1-\nu} \varrho \nabla^2 \right] \Psi,$$

układ równań [12] da się rozwickłać:

$$(15) \quad \nabla^2 \nabla^2 [1 - \rho \nabla^2] \bullet = 0,$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 \Psi = p = 2q.$$

Wyznamy rozwiązanie tych równań przy warunkach brzegowych (1) dla dowolnej pary (m, n) i obciążeniu $p_{mn} = 2q_{mn} [c_x c_y]$. Rozwiązaniem takim będzie

$$(16) \quad \bullet \equiv 0,$$

$$\Psi = q_{mn} \left[\frac{3(1-\nu^2)h}{E\gamma^4} \right] [c_x c_y].$$

Możemy wyznaczyć ugięcie płyty oraz interesujące nas wielkości naprężeń

$$(17) \quad w^R = q_{mn} \frac{3(1-\nu^2)h}{E\gamma^4} \left[1 + \frac{2-\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2}{5} \gamma^2 \right] [c_x c_y].$$

Kąt obrotu normali ze wzoru (13)

$$(18) \quad \beta_x = - \left[1 + \frac{\nu}{1-\nu} \rho \nabla^2 \right] \frac{\partial}{\partial x} \Psi =$$

$$= q_{mn} \frac{3(1-\nu^2)\gamma_1}{E\gamma^4} \left[1 - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2}{5} \gamma^2 \right] [s_x c_y].$$

Moment zginający

$$M_{xx} = D \left[\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right] + \frac{2\nu}{1-\nu} \rho q =$$

$$= -D \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \nu \rho \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi.$$

Suma naprężeń zginających dla $z = h$

$$(19) \quad \sigma^R = \frac{3}{2h^2} (M_{xx} + M_{yy}) = - \frac{3}{2h^2} D \left[(1+\nu) - \frac{2\nu}{5} h^2 \nabla^2 \right] \nabla^2 \Psi =$$

$$= q_{mn} \cdot \frac{3}{\gamma^2} \left[(1+\nu) + \frac{2\nu}{5} \gamma^2 \right] [c_x c_y].$$

Napężenie wywołane momentem M_{xy}

$$(20) \quad \tau_{xy}^R = \frac{3}{2h^2} M_{xy} = \frac{3}{2h^2} D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = \\ = -D [(1-\nu) + \nu \varrho \nabla^2] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -q_{mn} \frac{3\gamma_1 \gamma_2}{\gamma^4} \left[(1-\nu) - \frac{2\nu}{5} \gamma^2 \right] [s_x s_y].$$

Ekstremalne napężenie wywołane siłą Q_x wynosi

$$(21) \quad \tau_{xz}^R = \frac{3}{4h} Q_x = -\frac{3}{4h} D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi = -q_{mn} \frac{3\gamma_1}{2\gamma^2} [s_x c_y].$$

Równania teorii Reissnera uważane są za dokładniejsze i zaleca się ich stosowanie w przypadku płyt o średniej grubości ($h:a \leq 1:5$).

Postawione na początku tej pracy zagadnienie (rys. 1) przy warunkach brzegowych danych związkami (1) można rozwiązać w sposób ścisły wychodząc z równań teorii sprężystości. Wyjdźmy z równań przemieszczeniowych tej teorii [3 i 4]:

$$(22) \quad \nabla^2 u_i + k e_{,i} = 0, \quad i, j = x, y, z,$$

gdzie

$$e = u_{j,j}, \quad k = (\lambda + \mu) : u = 1 : (1 - 2\nu);$$

$$(23) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \left[\varepsilon_{ij} + \frac{k-1}{2} e \delta_{ij} \right].$$

Po podstawieniu do (22)

$$(24) \quad u_i = (1+k) \nabla^2 \Phi_i - k (\Phi_{j,j})_{,i}$$

otrzymamy na funkcje Φ_i równania

$$(25) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi_i = 0.$$

Tak jak w poprzednio rozważanych teoriach przybliżonych rozważmy dowolną parę indeksów (m, n) oraz przynależny do niej wyraz obciążenia $q_{mn} [c_x c_y]$. Rozwiązanie równań (25) przyjmijmy w postaci

$$(26) \quad \begin{aligned} \Phi_x &= A_x \lambda z \operatorname{Cosh} \lambda z [s_x c_y], \\ \Phi_y &= A_y \lambda z \operatorname{Cosh} \lambda z [c_x s_y], \\ \Phi_z &= A_z \lambda z \operatorname{Sinh} \lambda z [c_x c_y]. \end{aligned}$$

Tak przyjęte rozwiązania spełniają warunki brzegowe (1). Stałe A_i wyznaczmy z warunku

$$(27) \quad \sigma_{iz} \Big|_{z=h} = q_{mn} [c_x c_y] \delta_{iz}, \quad i = x, y, z.$$

Otrzymamy stąd

$$(28) \quad \begin{aligned} A_x &= q_{mn} \frac{\lambda_1}{2\mu\lambda^4} \frac{(1-k) \operatorname{Cosh} \gamma - k\gamma \operatorname{Sinh} \gamma}{k(k+2) (\operatorname{Sin} \gamma \operatorname{Cosh} \gamma - \gamma)}, \\ A_y &= q_{mn} \frac{\lambda_2}{2\mu\lambda^4} \frac{(1-k) \operatorname{Cosh} \gamma - k\gamma \operatorname{Sinh} \gamma}{k(k+2) (\operatorname{Sinh} \gamma \operatorname{Cosh} \gamma - \gamma)}, \\ A_z &= q_{mn} \frac{1}{2\mu\lambda^3} \frac{(1+2k) \operatorname{Cosh} \gamma + k\gamma \operatorname{Sinh} \gamma}{k(k+2) (\operatorname{Sinh} \gamma \operatorname{Cosh} \gamma - \gamma)}. \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu tych stałych możemy wyliczyć przemieszczenia i naprężenia w dowolnym punkcie rozpatrywanego obszaru. Znajdziemy

$$(29) \quad \sigma_{xx} = q_{mn} \left\{ \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} \left[\frac{\operatorname{Cosh} \gamma - \gamma \operatorname{Sinh} \gamma}{\operatorname{Sinh} \gamma \operatorname{Cosh} \gamma - \gamma} \operatorname{Sinh} \lambda z + \frac{\operatorname{Cosh} \gamma}{\operatorname{Sinh} \gamma \operatorname{Cosh} \gamma - \gamma} \lambda z \operatorname{Cosh} \lambda z \right] + \frac{\lambda_2^2}{\lambda^2} \frac{k-1}{k} \frac{\operatorname{Cosh} \gamma}{\operatorname{Sinh} \gamma \operatorname{Cosh} \gamma - \gamma} \operatorname{Sinh} \lambda z \right\} [c_x \ c_y].$$

Na powierzchni $z = h$ naprężenie to będzie miało wartość

$$\sigma_{xx}|_{z=h} = q_{mn} \left\{ \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} \frac{\operatorname{Sinh} \gamma \operatorname{Cosh} \gamma + \gamma}{\operatorname{Sinh} \gamma \operatorname{Cosh} \gamma - \gamma} + \frac{\lambda_2^2}{\lambda^2} \frac{k-1}{k} \frac{\operatorname{Sinh} \gamma \operatorname{Cosh} \gamma}{\operatorname{Sinh} \gamma \operatorname{Cosh} \gamma - \gamma} \right\} [c_x \ c_y].$$

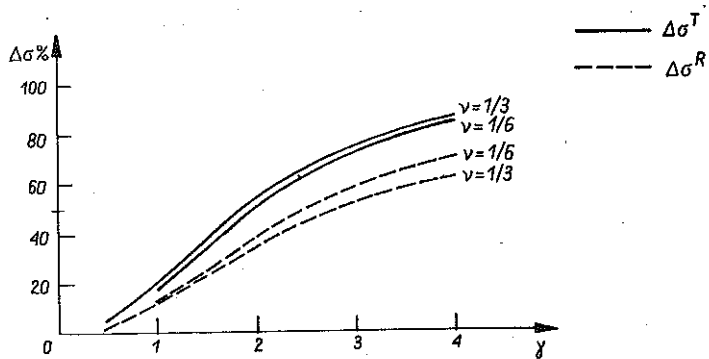
Suma naprężeń $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ gdy $z = h$ wynosi

$$\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})_{z=h} = q_{mn} \left[\frac{(1+2\nu) \operatorname{Sinh} 2\gamma + 2\gamma}{\operatorname{Sinh} 2\gamma - 2\gamma} \right] [c_x \ c_y].$$

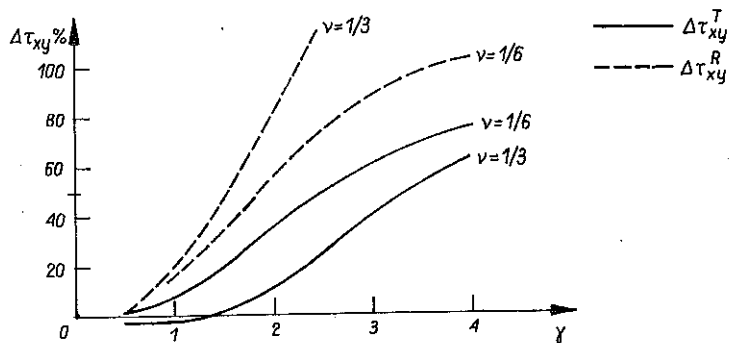
Wyznaczyliśmy poprzednio sumę naprężeń na podstawie rozważań przybliżonych teorii technicznej σ^T (wzór 9) i teorii Reissnera σ^R (wzór 19). Możemy porównać tak wyznaczone naprężenia z naprężeniami wyznaczonymi z rozwiązania ścisłego. I tak na przykład

$$(30) \quad \frac{\sigma^T}{\sigma} = \frac{3(1+\nu)}{\gamma^2} \cdot \frac{(1+2\nu) \operatorname{Sinh} 2\gamma + 2\gamma}{\operatorname{Sinh} 2\gamma - 2\gamma}.$$

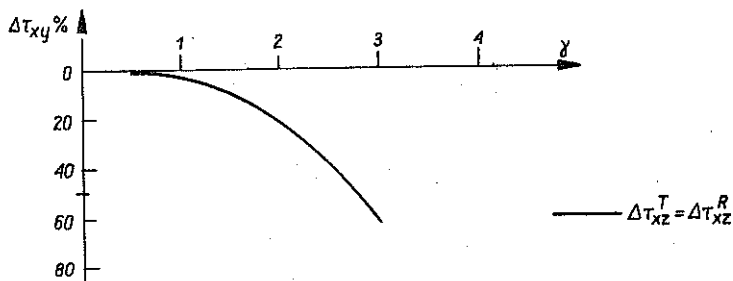
Widzimy, że stosunek ten dla danej pary (m, n) nie zależy od obciążenia q_{mn} oraz od współrzędnych x i y , a więc jest identyczny dla każdego punktu powierzchni $z = h$.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Na rys. 2 podano procentowy błąd rozwiązań przybliżonych jako funkcji parametru γ dla $\nu = 1:3$ i $\nu = 1:6$

$$(31) \quad \Delta\sigma^T = \left(1 - \frac{\sigma^T}{\sigma}\right) \cdot 100\%,$$

$$\Delta\sigma^R = \left(1 - \frac{\sigma^R}{\sigma}\right) \cdot 100\%.$$

Rozważaliśmy tu sumę naprężeń $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$. Gdybyśmy rozpatrywali tylko jedno z tych naprężeń, otrzymalibyśmy wynik zależny od parametrów γ_1 i γ_2 , a więc nie krzywą lecz powierzchnię jako funkcję tych dwóch parametrów. Skomplikowałoby to obliczenia i rysunki, nie zmieniając w istotny sposób końcowych wniosków.

Wyznaczamy pozostałe naprężenia

$$(32) \quad \sigma_{xy} = -q_{mn} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda^2} \left\{ \frac{\text{Cosh } \gamma - k\gamma \text{ Sinh } \gamma}{k (\text{Cosh } \gamma \text{ Sinh } \gamma - \gamma)} \text{ Sinh } \lambda z + \frac{\text{Cosh } \gamma}{\text{Cosh } \gamma \text{ Sinh } \gamma - \gamma} \lambda z \text{ Cosh } \lambda z \right\} [s_x s_y].$$

Dla $z = h$ znajdziemy

$$\tau_{xy} = \sigma_{xy}|_{z=h} = -q_{mn} \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{\gamma^2} \left\{ \frac{(1-2\nu) \text{ Sinh } 2\gamma + 2\gamma}{\text{Sinh } 2\gamma - 2\gamma} \right\} [s_x s_y].$$

Na rys. 3 podano procentowy błąd rozwiązań przybliżonych w stosunku do rozwiązania ścisłego. Interesujące jest, że błąd teorii Reissnera rośnie wraz ze wzrostem parametru γ znacznie szybciej niż błąd teorii technicznej.

Trzecim interesującym nas naprężeniem jest

$$(33) \quad \sigma_{xz} = -q_{mn} \frac{\lambda_1}{\lambda} \left\{ \frac{\gamma \text{ Sinh } \gamma}{\text{Sinh Cosh } \gamma - \gamma} \text{ Cosh } \lambda z - \frac{\text{Cosh } \gamma}{\text{Sinh } \gamma \text{ Cosh } \gamma - \gamma} \lambda z \text{ Sinh } \lambda z \right\} [s_x c_y].$$

Na powierzchni środkowej $z = 0$ osiąga ono wartość ekstremalną

$$\tau_{xz} = \sigma_{xz}|_{z=0} = -q_{mn} \gamma_1 \left\{ \frac{2 \text{ Sinh } \gamma}{\text{Sinh } 2\gamma - 2\gamma} \right\} [s_x c_y].$$

Na rys. 4 podano jak rośnie względny błąd $\Delta\tau_{xz}$ wraz ze wzrostem parametru γ .

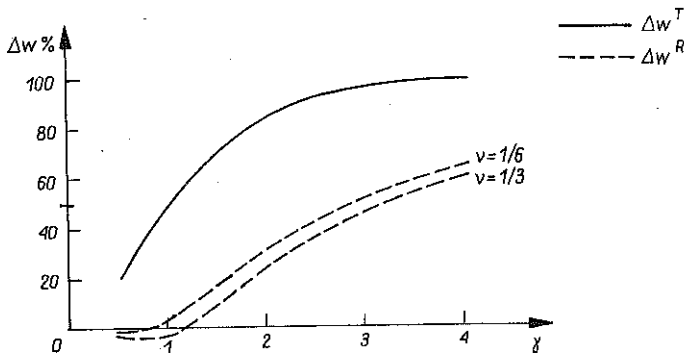
Przemieszczenie U_3 dla rozwiązania ścisłego jest następujące:

$$(34) \quad U_3 = q_{mn} \frac{2(1+\nu)h}{E\gamma} \left\{ \frac{2(1-\nu) \operatorname{Cosh} \gamma + \gamma \operatorname{Sinh} \gamma}{\operatorname{Sinh} 2\gamma - 2\gamma} \operatorname{Cosh} \lambda z - \frac{\operatorname{Cosh} \gamma}{\operatorname{Sinh} 2\gamma - 2\gamma} \lambda z \operatorname{Sinh} \lambda z \right\} [c_x c_y].$$

Przemieszczenie powierzchni $z = h$ wynosi

$$U_3|_{z=h} = w = \frac{q(1-\nu^2)h}{E\gamma} \left[\frac{4 \operatorname{Cosh}^2 \gamma}{\operatorname{Sinh} 2\gamma - 2\gamma} \right] [c_x c_y].$$

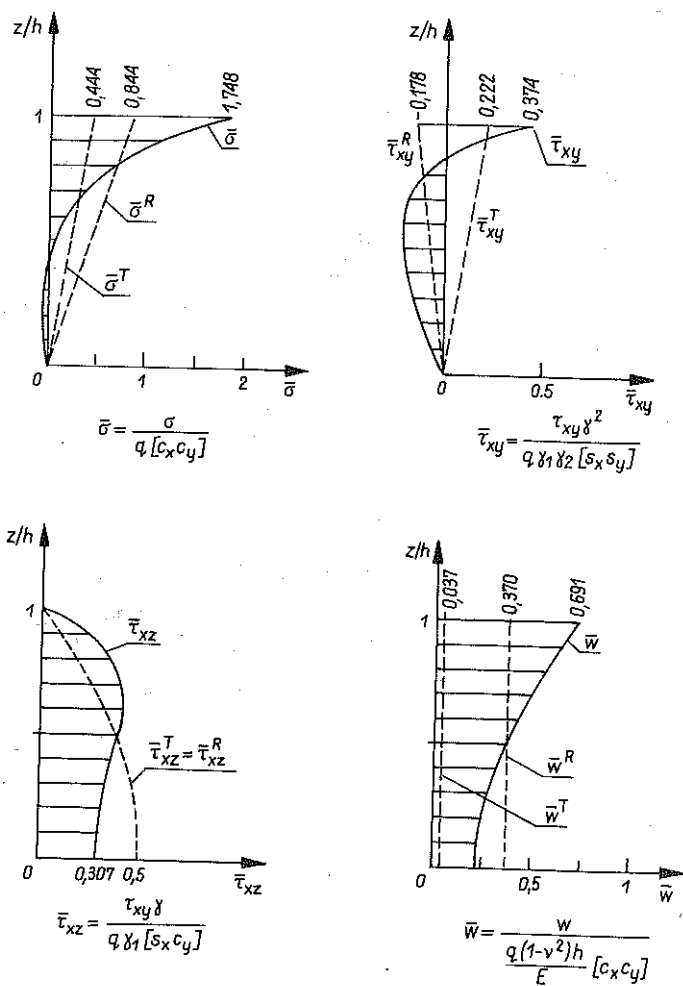
Dla $z=0$ otrzymamy inną wartość przemieszczenia. W teoriach przybliżonych zakłada się nieodkształcalność materiału w kierunku normalnych można więc tam przyjąć, że ugięcie powierzchni górnej jest równe ugięciu powierzchni środkowej. Na rys. 5 podano, jak rośnie względny błąd przemieszczenia powierzchni górnej (dolnej) w teorii technicznej i w teorii Reissnera w zależności od parametru γ .



Rys. 5

Jeżeli wyznaczymy dla pary (m, n) energię sprężystą całkując ją po całej objętości ciała (rys. 1), a następnie obliczymy błędy względne w teoriach przybliżonych, to otrzymamy krzywe pokrywające się z krzywymi na rys. 5. Z pokazanych wykresów można wyciągnąć wniosek, że teoria Reissnera dobrze przybliża ugięcie i energię sprężystą, natomiast znacznie gorzej przybliża momenty skracające.

W przeprowadzonych powyżej rozważaniach zajmowaliśmy się błędami względnymi naprężeń na charakterystycznych powierzchniach $z=0$ $z=h$, gdzie naprężenia te osiągają swoje ekstremalne wartości. Wraz ze wzrostem wartości parametru γ rozkłady naprężeń wyznaczone z rozwiązania ścisłego coraz bardziej odbiegają od założeń przyjętych w teoriach przybliżonych.



Rys. 6

Na rys. 6 podano przykładowo wykresy proporcjonalne do rozkładu naprężeń w przedziale $0 \leq z \leq h$ dla rozwiązania ścisłego oraz rozwiązań przybliżonych, gdy $\gamma = 3$ i $\nu = 1:3$.

WNIOSKI

W obliczeniach, jak to już poprzednio podkreślano, rodzaj obciążenia oraz wymagana dokładność jego przybliżenia wyznaczają parę (m_0, n_0) . Para ta określona minimalną liczbę wyrazów, które należy uwzględnić w podwójnej skończonej sumie. Jako drugie ograniczenie proponuje się przyjęcie kryterium dopuszczalnego błędu względnego w danej teorii przybliżonej. Wyznaczony

na rys. 2-5 błąd względny nie zależy od obciążenia i od punktu (x, y) w rozpatrywanym obszarze — jest błędem zależnym tylko od stopnia przybliżenia teorii. W zależności od rodzaju obciążenia oraz rozpatrywanego punktu (x, y) błędy bezwzględne, jakimi będą obciążone poszczególne wyrazy szeregu będą dodatnie lub ujemne. Na ogół sumowanie błędów będzie zachodziło tam, gdzie obliczane wielkości fizyczne osiągają swoje ekstremalne wartości. Nie można jednak tego sumarycznego błędu w określonej teorii przybliżonej *a priori* wyznaczyć, ani także ocenić, jaki wpływ na całą sumę będzie miał błąd (m, n) -tego wyrazu. Można jednak przyznać zasadę, że uwzględnianie wyrazu szeregu, który będzie obciążony względnym błędem większym od np. 50% jest niecelowe. Wyliczanie i sumowanie takich wyrazów szeregu nie poprawia wyników. W tablicy 1 podano tak przyjęte graniczne wartości γ_f dla każdej z rozpatrywanych wielkości fizycznych.

Tablica 1 — γ_f

	Teoria techniczna		Teoria Reissnera	
	$\nu = 1/3$	$\nu = 1/6$	$\nu = 1/3$	$\nu = 1/6$
$\Delta\sigma$	1,902	2,015	2,875	2,530
$\Delta\tau_{xy}$	3,354	2,530	1,561	1,873
$\Delta\tau_{xz}$	2,774	2,774	2,774	2,774
ΔW	1,022	1,022	3,212	2,874

Kryterium to prowadzi do nierówności

$$\gamma(m, n) < \gamma_f$$

lub

$$(35) \quad \left(\frac{m\pi h}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi h}{2b}\right)^2 < \gamma_f^2.$$

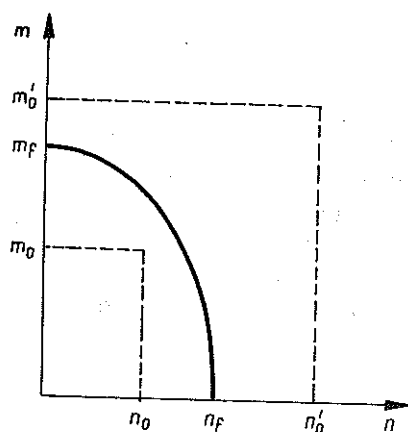
Nierówność tę można przedstawić w innych postaciach:

$$(36) \quad \frac{m^2}{\left(\frac{2a\gamma_f}{\pi h}\right)^2} + \frac{n^2}{\left(\frac{2b\gamma_f}{\pi h}\right)^2} < 1 \quad \text{lub} \quad \frac{m^2}{m_f^2} + \frac{n^2}{n_f^2} < 1.$$

Wzór (36) określa wnętrze elipsy o półosiach

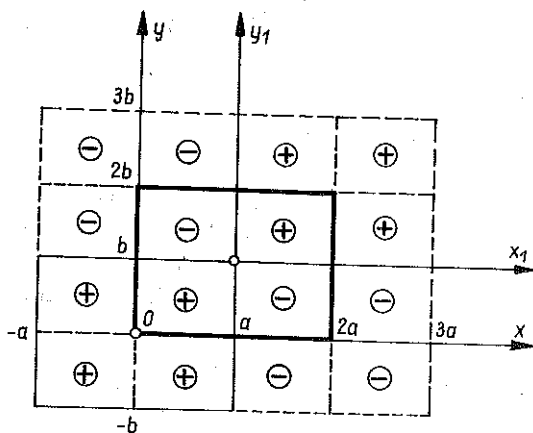
$$(37) \quad m_f = \frac{2a\gamma_f}{\pi h}, \quad n_f = \frac{2b\gamma_f}{\pi h}.$$

Warunek (35) jest oszacowaniem od góry wszystkich par (m, n) , w cząstkowej sumie szeregu. Na rys. 7 podano ten warunek w postaci elipsy. Warunek dobrego przybliżenia obciążenia działającego na płytę wyznacza, jak to uprzednio podkreślono, minimalną parę (m_0, n_0) . Odpowiadający tej parze



Rys. 7

prostokąt, jak to widać na rys. 7, mieści się wewnątrz elipsy, a więc nie zachodzi tu sprzeczność między tymi dwoma warunkami. Sumowanie może przebiegać tu we wnętrzu całej elipsy. Na rys. 7 pokazano też drugi możliwy przypadek, gdy prostokąt wyznaczony przez parę (m'_0, n'_0) leży na zewnątrz elipsy. W przypadku tym zachodzi sprzeczność między oboma warunkami. Rozciągnięcie sumowania na wyrazy leżące na zewnątrz elipsy nie zapewnia wymaganej dokładności obliczeń. Taka sytuacja jest możliwa, gdy na stosunkowo grubą płytę działają obciążenia zbliżone do skupionych lub obciążenia o dużej zmienności amplitud w obszarze płyty. W tym przypadku należy zastosować dokładniejszą teorię (np. teorię Reissnera lub teorię wyższych przybliżeń [5]).



Rys. 8

W rozwiązany przykładzie rozpatrzyliśmy najogólniejszą postać obciążenia symetrycznego (3) oraz pewne szczególne warunki brzegowe (1). W przypadku innych warunków brzegowych całki szczególne równań (2) lub (15) będą miały przy symetrycznym obciążeniu zawsze postać podanych przez nas rozwiązań. Aby spełnić dane dowolne warunki brzegowe dla każdej pary (m, n) , należy dodać odpowiednią całkę równania jednorodnego. Jeżeli jednak całka szczególna dla pary (m, n) jest obarczona na całym obszarze płyty błędem (także na brzegu), to całka ogólna wyznaczona z warunków brzegowych też będzie obarczona tym samym błędem. Wynika stąd, że wyznaczone krzywe błędu (rys. 2-5) odnoszą się także do dowolnych warunków brzegowych.

Rozpatrzyliśmy przypadek symetrycznego obciążenia płyty. W prosty sposób można wykazać, że krzywe błędu z rys. 2-5 odnoszą się także dla dowolnego obciążenia płyty. Rozszerzamy w tym celu wyznaczone przez nas rozwiązania na całą nieograniczoną płytę. Otrzymamy wtedy nieograniczoną połudowaną w dwóch kierunkach warstwę płytową. Na rys. 8 zaznaczono dodatnie i ujemne kierunki obciążeń i przemieszczeń. Wydzielmy z tej warstwy nowy obszar $0 \leq x \leq 2a, 0 \leq y \leq 2b$. Na obszar ten działa obciążenie podwójne antysymetryczne, które w nowym przesuniętym układzie współrzędnych (x_1, y_1) da się rozłożyć w szereg o wyrazach $[\sin \lambda_1 x_1 \sin \lambda_1 y_1]$. Całka szczególna takiego obciążenia będzie spełniała inne warunki brzegowe. Tak więc na brzegu s tego obszaru $w(s) \neq 0, M_{nn} \neq 0, Q_n = 0, M_{ns} = 0$. Jednak dla każdej pary (m, n) wielkości fizyczne na całym obszarze będą obarczone wyznaczonym uprzednio względny błędem. A więc dla obciążenia podwójnie antysymetrycznego prawdziwe są krzywe błędu podane na rys. 2-5. Podobnie rozważając obszary $[-a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq 2b]$ i $[0 \leq x \leq 2a, -b \leq y \leq b]$ dojdziemy do wniosku, że wyznaczone krzywe błędu są poprawne, gdy na płytę działa obciążenie symetryczne względem jednej i antysymetryczne względem drugiej osi współrzędnych.

Każde dowolne obciążenie działające na płytę (rys. 1) da się rozłożyć w szereg o czterech możliwych kombinacjach funkcji trygonometrycznych: $[c_x, c_y], [c_x, s_y], [s_x, c_y], [s_x, s_y]$. Ale wykazaliśmy powyżej, że dla dowolnej pary (m, n) błąd względny całki szczególnej dla każdej z tych kombinacji będzie taki sam. Doszliśmy w ten sposób do ogólnego wniosku, że wyznaczone przez nas krzywe błędu nie zależą od rodzaju obciążenia oraz warunków brzegowych. Są to więc krzywe błędu informujące, z jaką dokładnością dla danej pary (m, n) rozwiązania teorii przybliżonych są zgodne z rozwiązaniami ścisłymi.

Warunek (35) można napisać w innej postaci

$$\left(\frac{h}{a_m}\right)^2 + \left(\frac{h}{b_n}\right)^2 < \left(\gamma_f \frac{\pi}{2}\right)^2,$$

gdzie

$$a_m = \frac{a}{m}, \quad b_n = \frac{b}{n}.$$

Powyższy warunek wyznacza największe stosunki wymiarów $h:a_m$ i $h:b_n$, przy których przybliżona teoria daje dla danej pary (m_f, n_f) wyniki obarczone mniejszym błędem względnym od założonego (np. 50%). Tak więc para (m_f, n_f) wyznacza najmniejszy element o wymiarach $(2h, 2a_m, 2b_n)$, dla którego przybliżona teoria może znaleźć jeszcze zastosowanie. Para (m_f, n_f) wyznacza więc graniczną siatkę podziału całej płyty na takie elementy.

Na zakończenie należy podkreślić, że wyprowadzone w pracy zależności i wnioski dotyczą tylko zastosowania podwójnych szeregów trygonometrycznych do efektywnych obliczeń w teorii płyt. Wydaje się jednak, że rzutują one w pewien sposób także na inne przybliżone metody rozwiązywania takie, jak pojedyncze szeregi trygonometryczne, najmniejsze wymiary elementów skończonych czy gęstość siatki w metodach różnic skończonych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. REISSNER, *On the theory of bending of elastic plates*, J. Math. Phys., **23**, 1944.
2. W. NOWACKI, *Dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1979.
3. I. N. SNEDDON, F. J. LOCKETT, *On the steady state thermoelastic problem for the half-space and for the thick plate*, Quart. Appl. Math., **18**, 1960.
4. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
5. А. И. ЛУРЬЕ, *Пространственные задачи теории упругости*, ГИТТЛ, Москва 1955.

РЕЗЮМЕ

О ПРИМЕНЕНИИ ДВОЙНЫХ ТРИГОНЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ РАСЧЕТОВ В ТЕОРИИ ПЛИТ

Проведен анализ применения двойных тригонометрических рядов для эффективных расчетов в теории плит. На примере некоторых частных граничных условий определена, для m, n -ого члена ряда, относительная ошибка физических и геометрических величин теории технических плит и теории Рейсснера по отношению к точному решению упругости. Показано, что эта ошибка не зависит от граничных условий и рода нагружения. Предложен критерий, который ограничивает сверху количество членов тригонометрических рядов в зависимости от типа принятой приближенной теории.

SUMMARY

ON THE APPLICATION OF DOUBLE TRIGONOMETRIC SERIES TO THE PLATE THEORY

The problem of application of double trigonometric series to effective calculations in the theory of plates is analyzed. Using the example of certain particular type of boundary

conditions, the relative error of the (m, n) -th term of geometric and physical magnitudes is determined by comparing the results of the technical theory and the Reissner theory with the accurate solution known from the elasticity theory. This error is shown to be independent of the boundary conditions and of the type of loading. A criterion is proposed which bounds (from above) the number of terms of the trigonometric series, depending on the type of the approximate theory assumed.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 listopada 1984 r.
